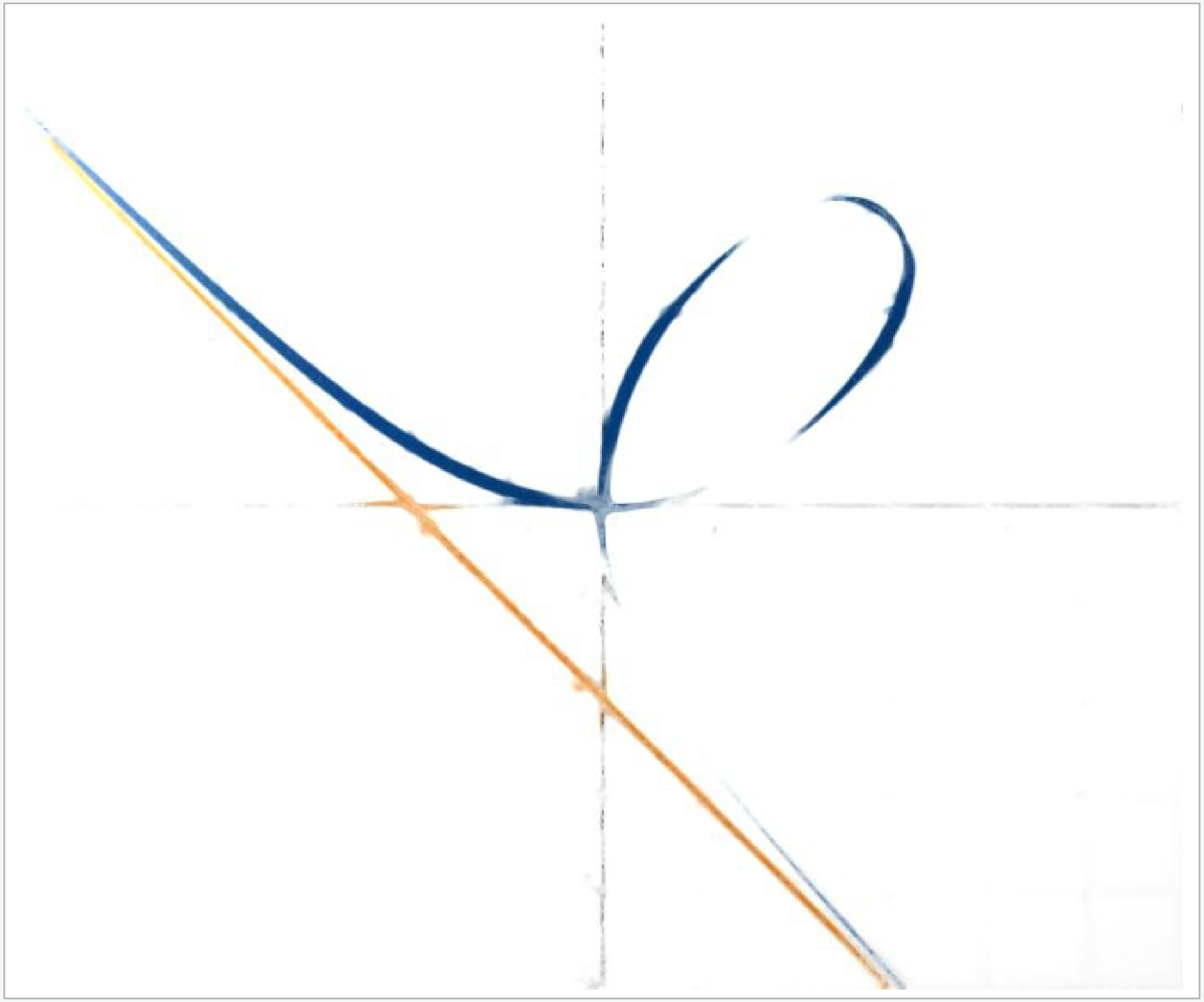

Divergenz: Aufgaben

Bestimmen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder

$a)\ \vec{F} = x\,y \cdot \vec{i} + x\,z \cdot \vec{j} + x^2\,y\,z^2 \cdot \vec{k}$

$b)\ \vec{F} = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) + z^4 \cdot \vec{k}$

$c)\ \vec{F} = \dfrac{y\,\vec{i} + x\,\vec{j}}{x^2 + y^2}$

$d)\ \vec{F} = x \cdot \vec{i} + 2\,y \cdot \vec{j} + 3\,z \cdot \vec{k}$

$e)\ \vec{F} = 3\,x \cdot \vec{i} + 2\,y \cdot \vec{j} - 5\,z \cdot \vec{k}$

$f)\ \vec{F} = x\,y \cdot \vec{i} + y\,z \cdot \vec{j} + x\,z \cdot \vec{k}$

$g)\ \vec{F} = y\,z \cdot \vec{i} + x\,z \cdot \vec{j} + x\,y \cdot \vec{k}$

$$a)\quad \operatorname{div} \vec{F} = y + 2x^2 y z$$

$$b)\quad \operatorname{div} \vec{F} = \frac{x + y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + 4z^3$$

$$c)\quad \operatorname{div} \vec{F} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$d)\quad \operatorname{div} \vec{F} = 6$$

$$e)\quad \operatorname{div} \vec{F} = 0$$

$$f)\quad \operatorname{div} \vec{F} = x + y + z$$

$$g)\quad \operatorname{div} \vec{F} = 0$$

In welchen Punkten der x, y-Ebene verschwindet die Divergenz des Vektorfeldes in den folgenden Aufgaben?

Aufgabe 18: $$\vec{F} = \begin{pmatrix} x\, y^2 \\ x^2\, y - 4\, y \end{pmatrix}$$

Aufgabe 19: $$\vec{F} = \begin{pmatrix} x\, y^{\frac{2}{3}} \\ y\, x^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}\, y \end{pmatrix}$$

Aufgabe 20: $$\vec{F} = \begin{pmatrix} x\, y \\ x^2\, y - 2\, y \end{pmatrix}$$

Aufgabe 21: $$\vec{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{x^4}{4} \\ \dfrac{y^4}{4} - 3\, x\, y^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 22:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{x\,y^2}{5} - x \\[2mm] \dfrac{x^2\,y}{5} - \dfrac{2\,y^3}{15} \end{pmatrix}$$

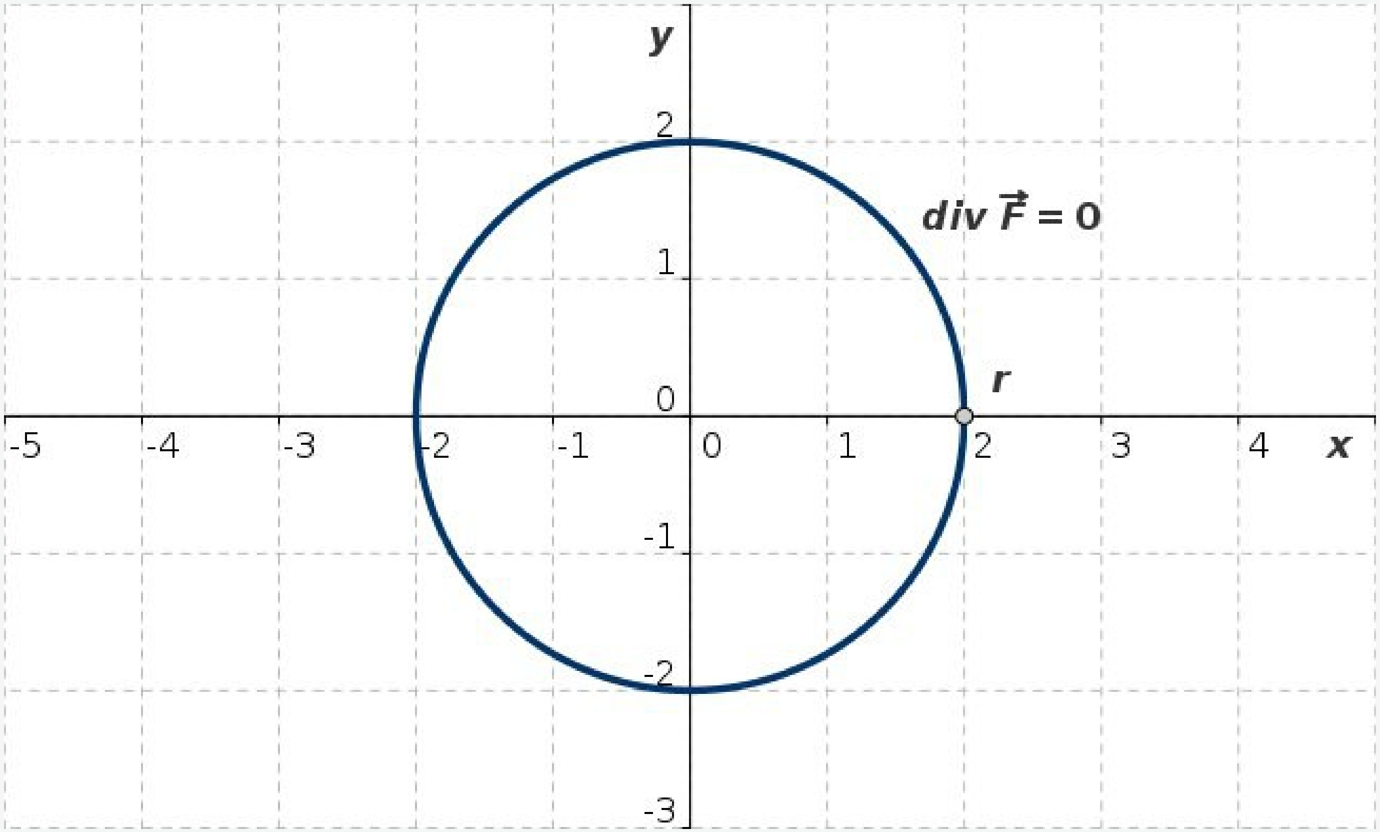

Abb. L18-1: div ***F*** *(x, y) ist gleich Null längs des Kreises mit dem Radius 2*

$$\vec{F} = x\, y^2 \cdot \vec{i} + (x^2\, y - 4\, y) \cdot \vec{j}$$

$$div\, \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\,(x\, y^2) + \frac{\partial}{\partial y}\,(x^2\, y - 4\, y) = y^2 + x^2 - 4$$

$$div\, \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4$$

Die Divergenz des Vektorfeldes verschwindet längs des Mittelpunktkreises mit dem Radius $r = 2$.

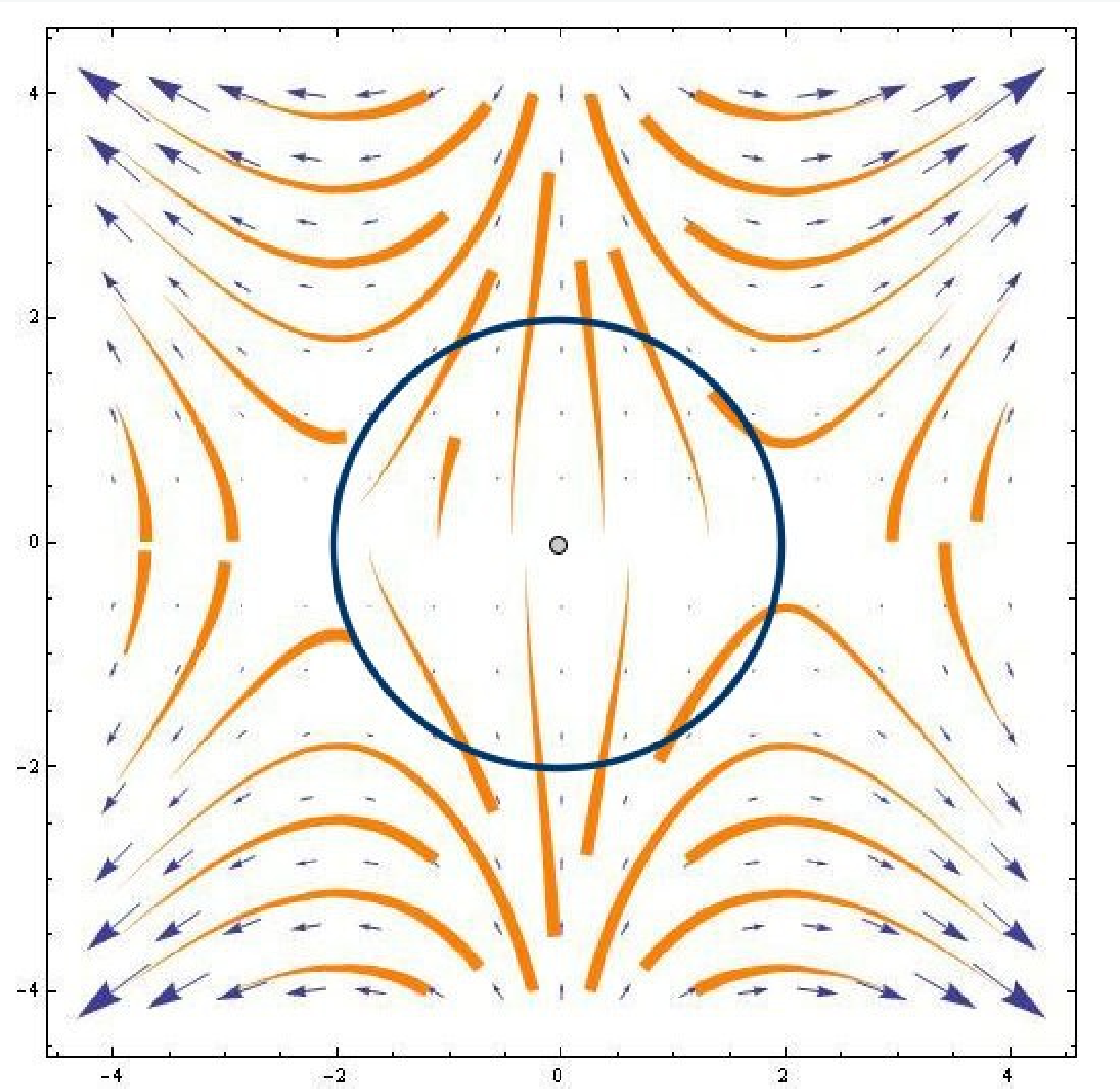

Abb. L18-2: Das Vektorfeld der Funktion $\boldsymbol{F}(x, y) = (x\,y^2,\; x^2\,y - 4y)$ *und der Kreis mit dem Radius 2, längs dessen div* $\boldsymbol{F}(x, y) = 0$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x\, y^{\frac{2}{3}} \\ y\, x^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}\, y \end{pmatrix}$$

$$div\, \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\, y^{\frac{2}{3}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y\, x^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}\, y\right) = y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}$$

$$div\, \vec{F} = 0 : \quad y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}} = 0$$

Die Gleichung $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ ist die implizite Gleichung der Astroide, auch Sternkurve genannt.

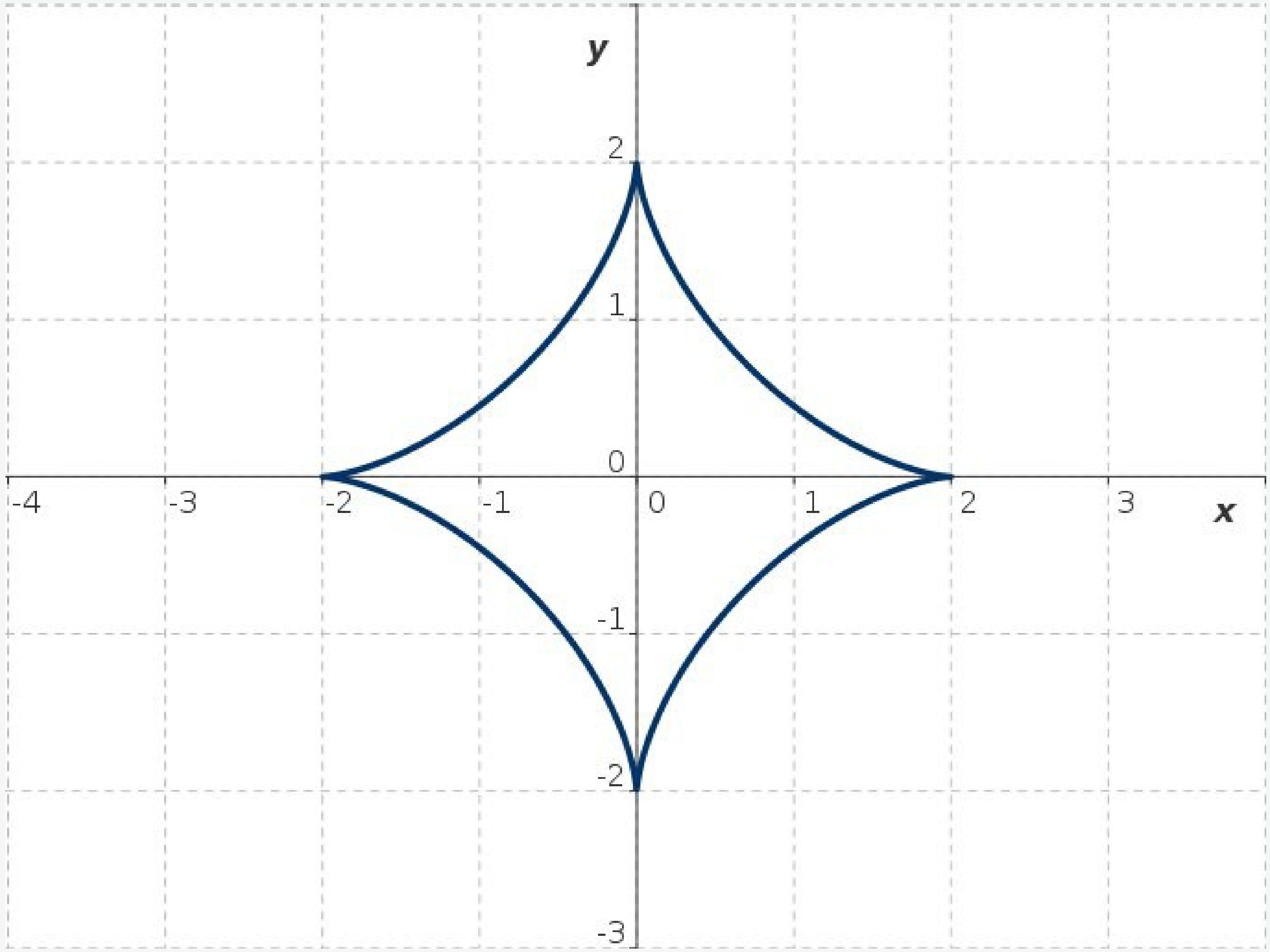

Abb. L19-1: div $\mathbf{F}\,(x, y)$ *ist gleich Null längs der Asroide A (vorgeschlagen von Michel Jürgensen)*

$$A: \quad y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

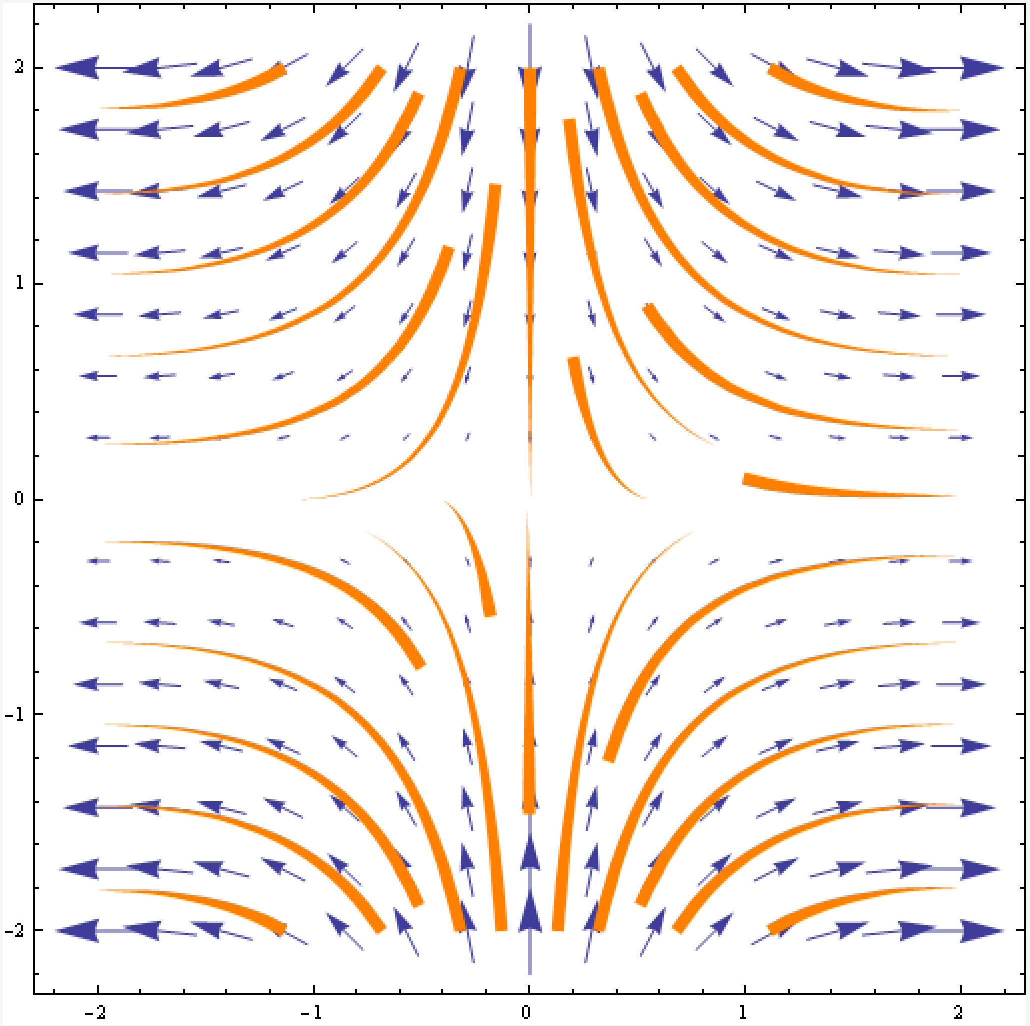

Abb. L19-2: Das Vektorfeld und die Feldlinien der Funktion ***F*** *(x, y)*

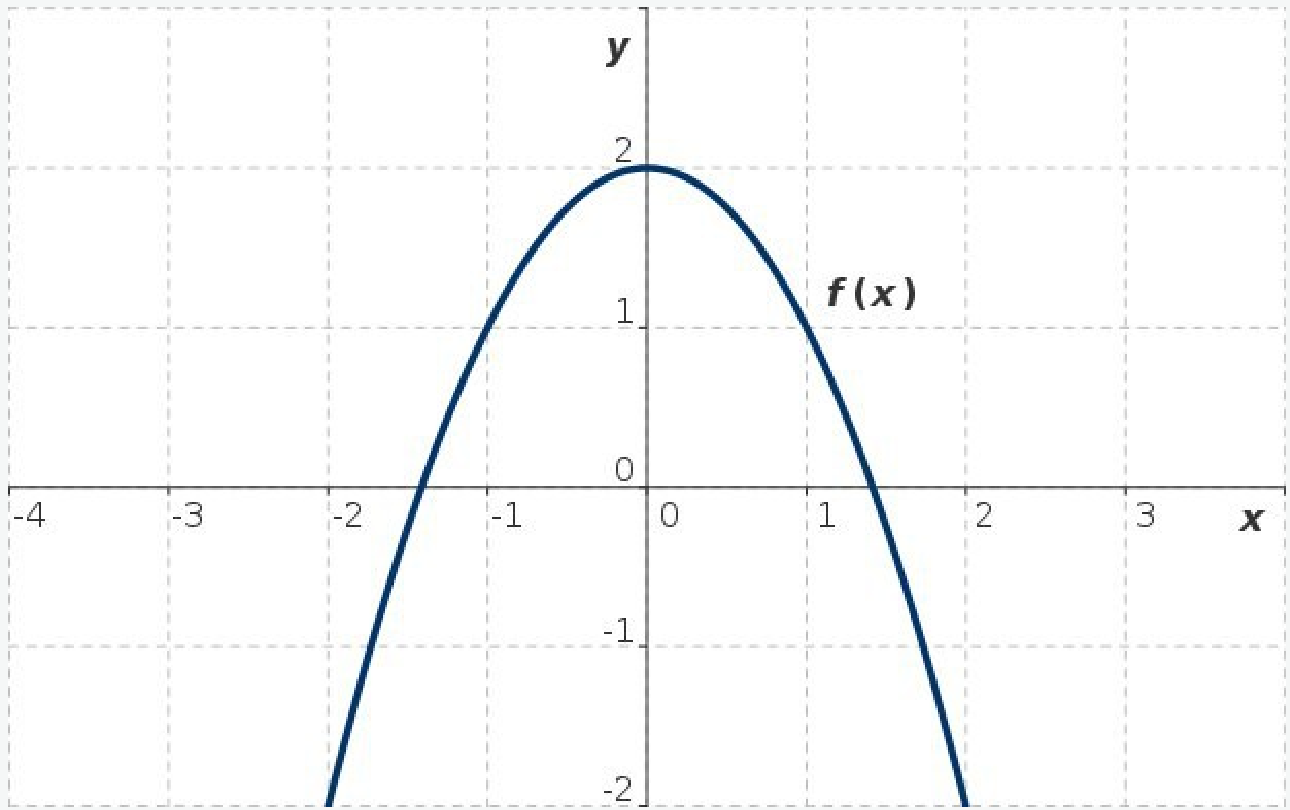

Abb. L20-1: div **F** *(x, y) ist gleich Null längs der Parabel y = f (x)*

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x\,y \\ x^2 y - 2\,y \end{pmatrix}$$

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\,(x\,y) + \frac{\partial}{\partial y}\,\left(x^2 - 2\,y\right) = y - 2 + x^2$$

$$div\,\vec{F} = 0: \qquad y - 2 + x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - x^2$$

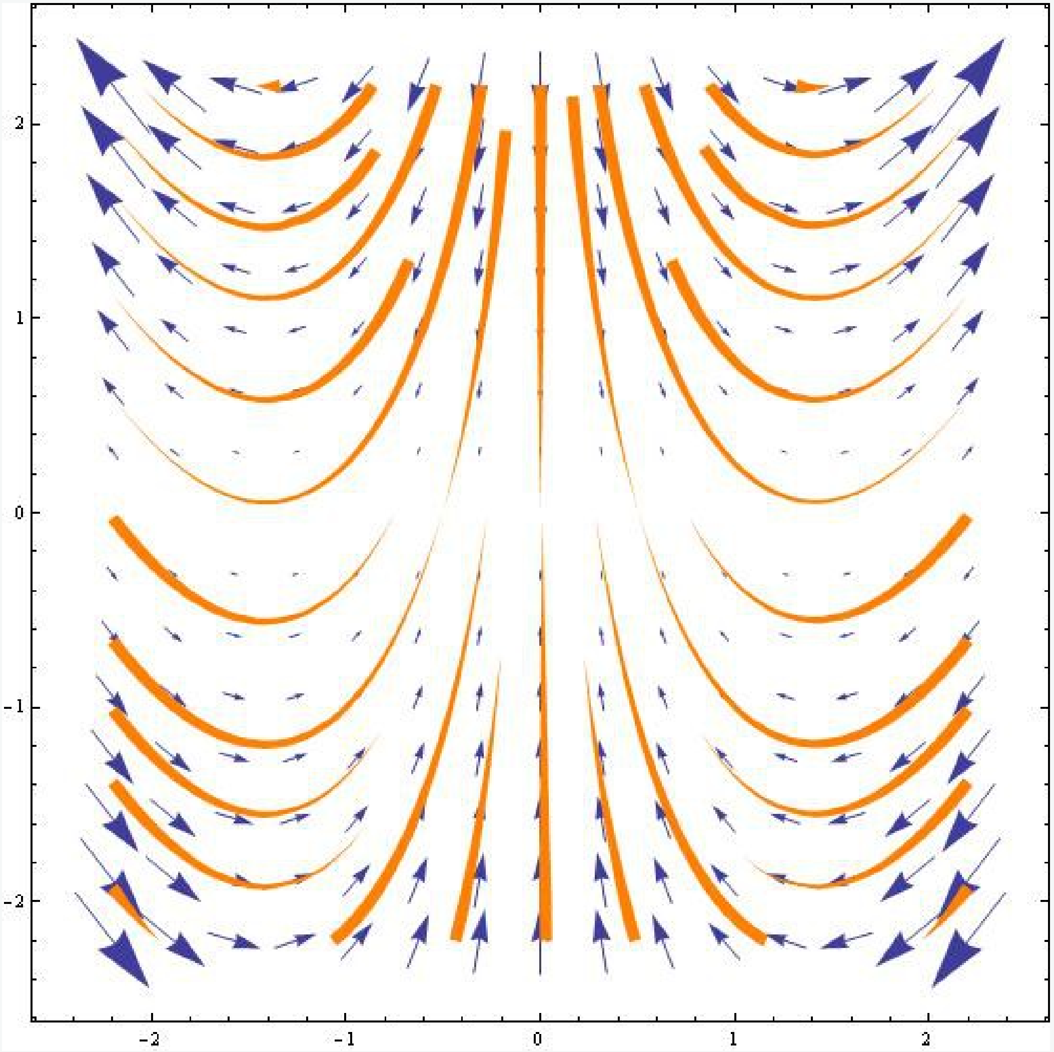

*Abb. L20-2: Das Vektorfeld und die Feldlinien der Funktion **F** (x, y)*

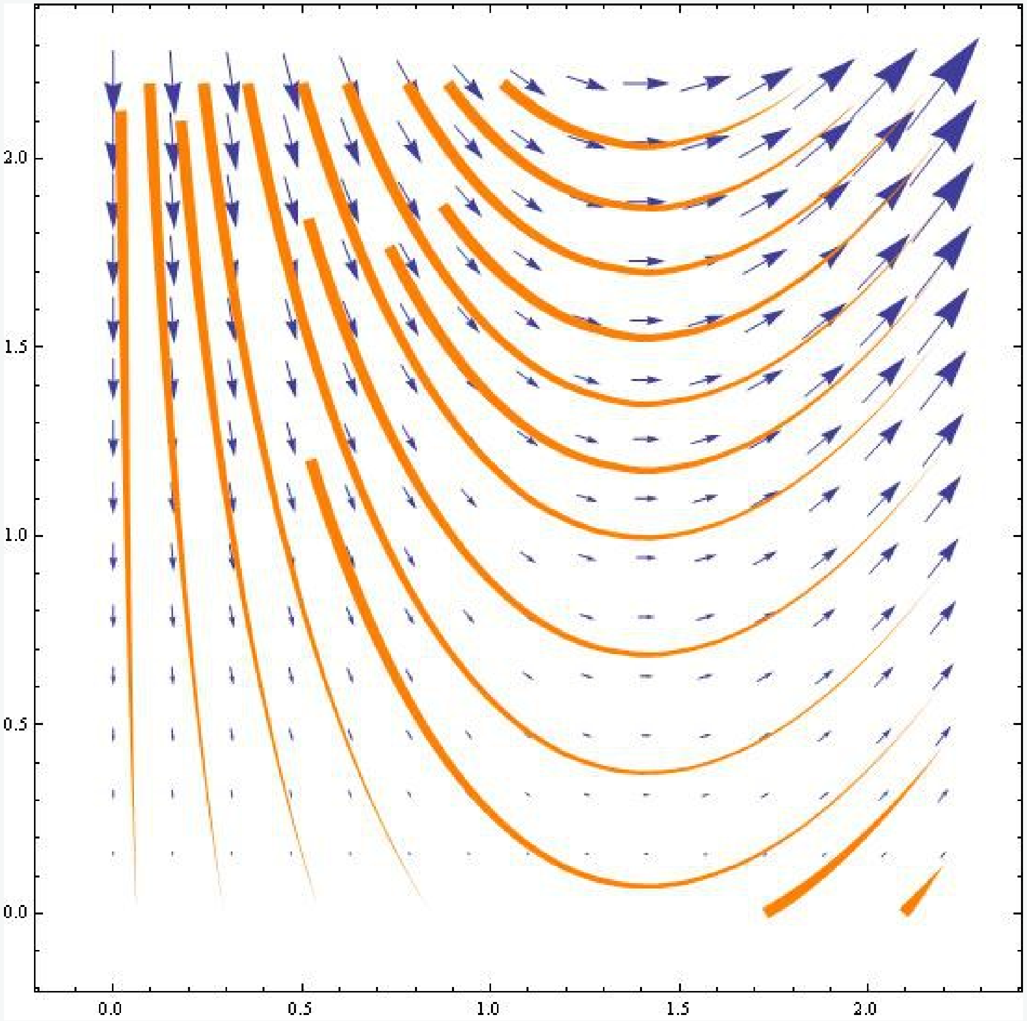

Abb. L20-3: Das Vektorfeld und die Feldlinien der Funktion $\boldsymbol{F}(x, y)$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{x^4}{4} \\ \dfrac{y^4}{4} - 3\,x\,y^2 \end{pmatrix}$$

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial}{\partial\,x}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{\partial}{\partial\,y}\left(\frac{y^4}{4} - 3\,x\,y^2\right) = x^3 + y^3 - 6\,x\,y$$

$$div\,\vec{F} = 0\,: \qquad x^3 + y^3 - 6\,x\,y = 0$$

Divergenz des Vektorfeldes ist gleich Null längs der Kurve

$$x^3 + y^3 = 6\,x\,y$$

Diese Kurve ist eine ebene Kurve 3. Ordnung, die auch als das kartesische Blatt (oder cartesische Blatt, folium cartesii) bekannt ist. Die Kurve ist nach dem französischen Mathematiker René Descartes benannt.

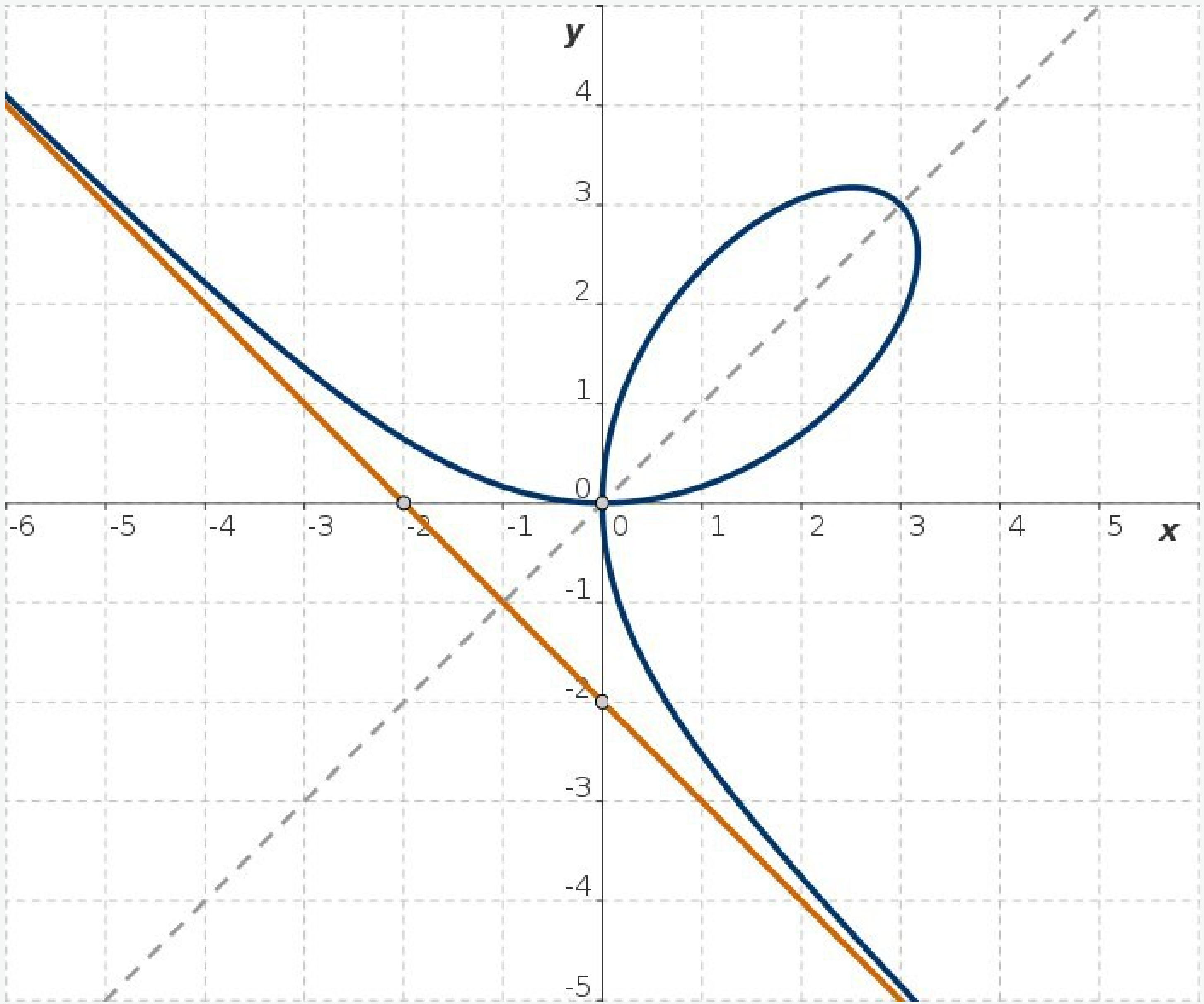

Abb. L21-1: div ***F*** *(x, y) ist gleich Null längs der ebenen Kurve 3. Ordnung, dem kartesischen Blatt (vorgeschlagen von Konstantin Lühe)*

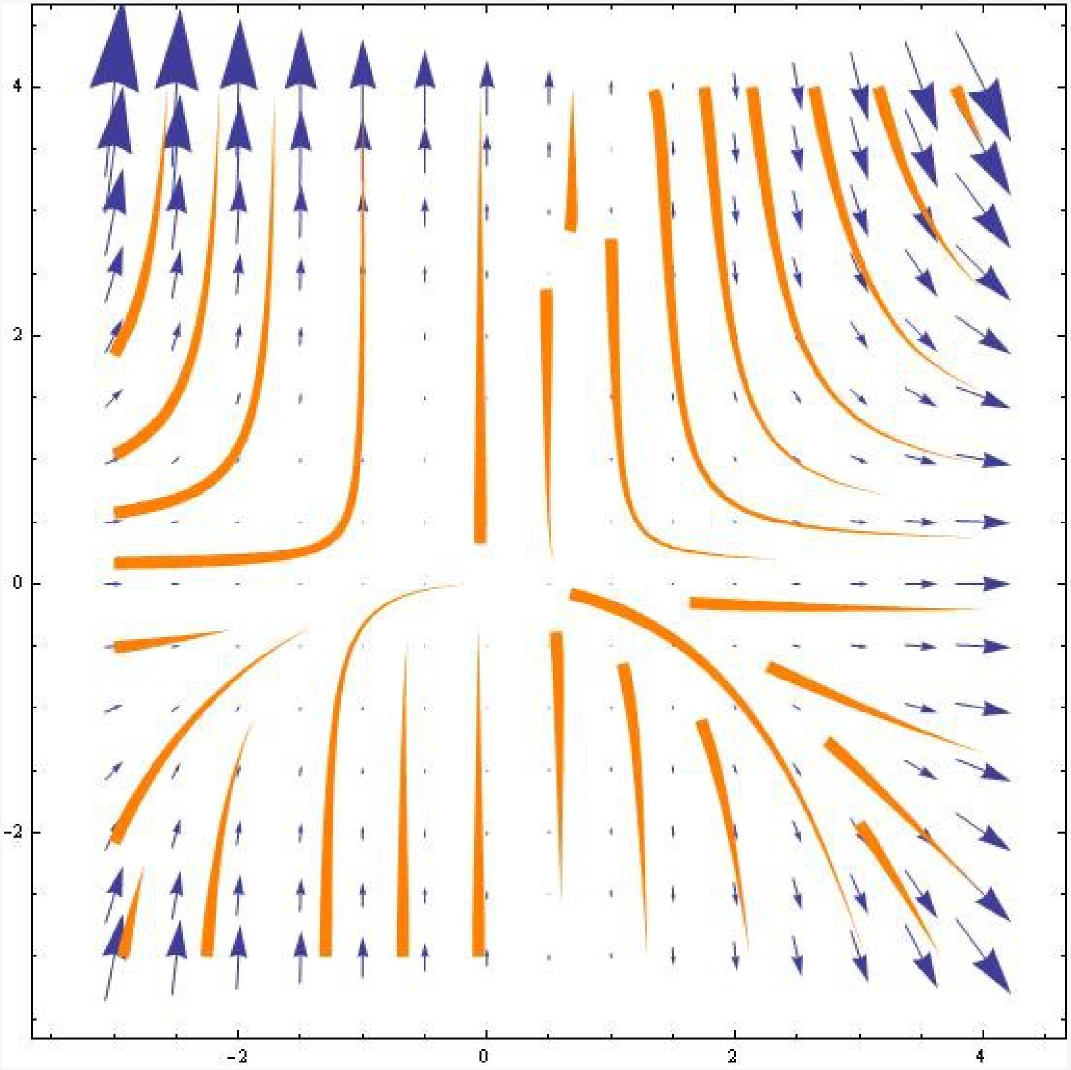

*Abb. L21-2: Das Vektorfeld und die Feldlinien der Funktion **F** (x, y)*

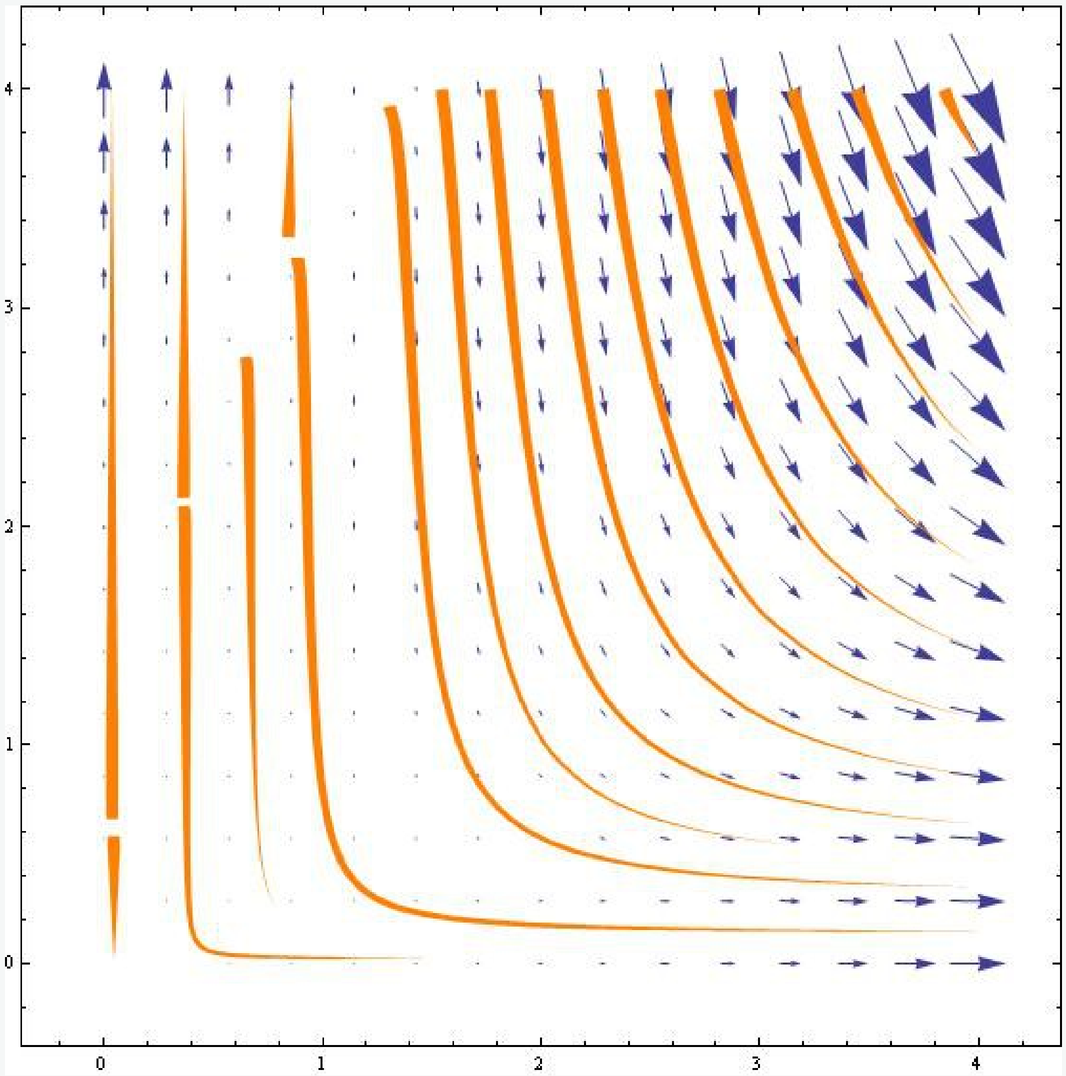

Abb. L21-3: Das Vektorfeld und die Feldlinien der Funktion $\boldsymbol{F}\,(x, y)$

Das kartesische Blatt ist eine algebraische Kurve, die durch die Gleichung

$$C: \qquad x^3 + y^3 - 3\, a\, x\, y = 0$$

bestimmt wird. Im ersten Quadrant ist sie eine Schleife mit einem doppelten Punkt im Ursprung. Sie hat die Asymptote

$$l_A: \qquad x + y + a = 0$$

Die Kurve ist symmetrisch bezüglich der Geraden $y = x$. In unserem Fall ist der Parameter $a = 2$:

$$C: \qquad x^3 + y^3 = 6\, x\, y\,, \qquad l_A: \quad y = -2 - x$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{x\,y^2}{5} - x \\ \dfrac{x^2\,y}{5} - \dfrac{2\,y^3}{15} \end{pmatrix}$$

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\,y^2}{5} - x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2\,y}{5} - \frac{2\,y^3}{15}\right) =$$

$$= \frac{y^2}{5} - 1 + \frac{x^2}{5} - \frac{6\,y^2}{15} = \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} - 1$$

$$div\,\vec{F} = 0 : \quad \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} - 1 = 0$$

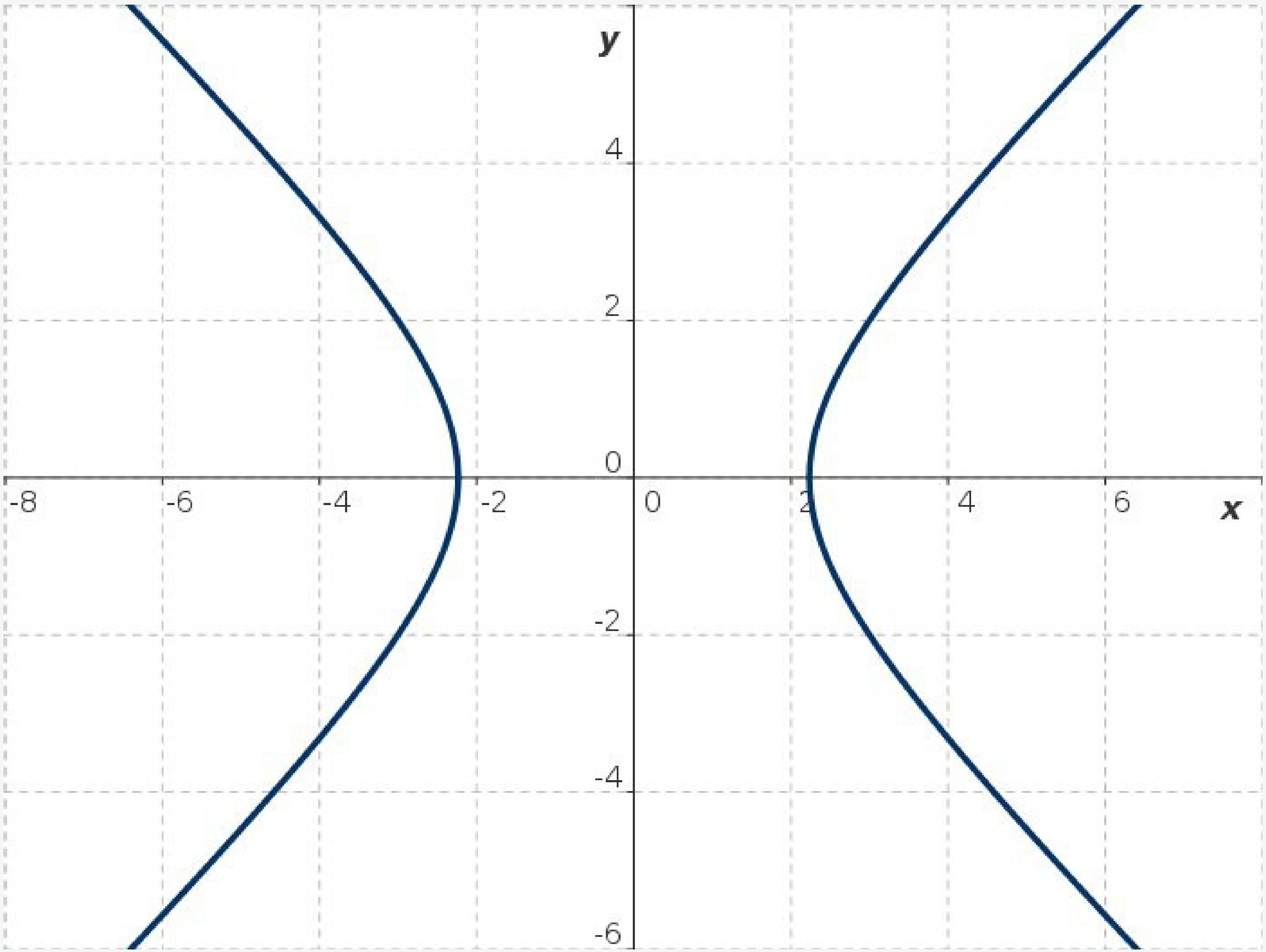

Abb. L22-1: div ***F*** *(x, y) ist gleich Null längs der ebenen Kurve 2. Ordnung (vorgeschlagen von Sebastian Stang)*

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 1$$

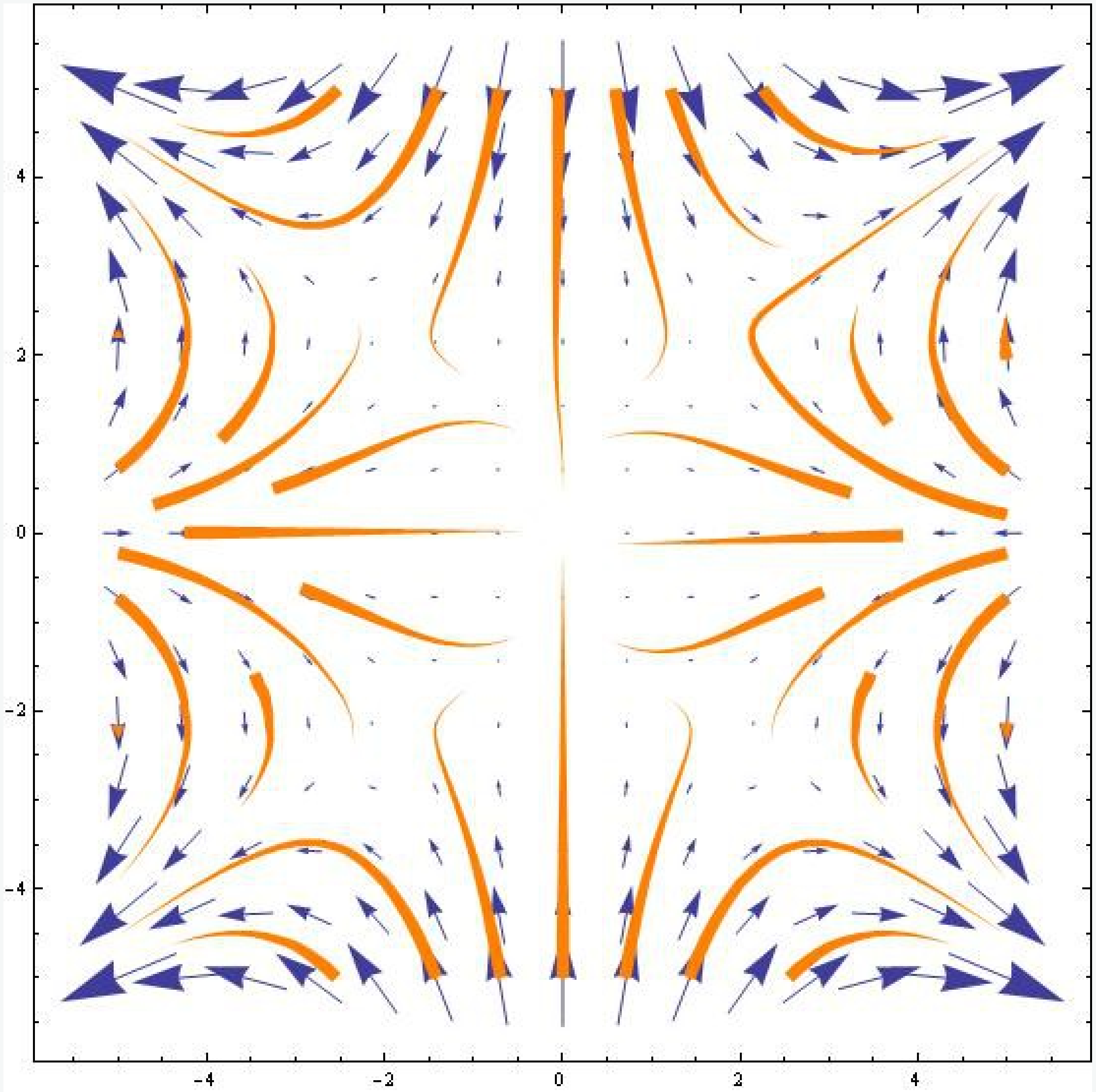

Abb. L22-2: Das Vektorfeld und die Feldlinien der Funktion $\boldsymbol{F}(x, y)$

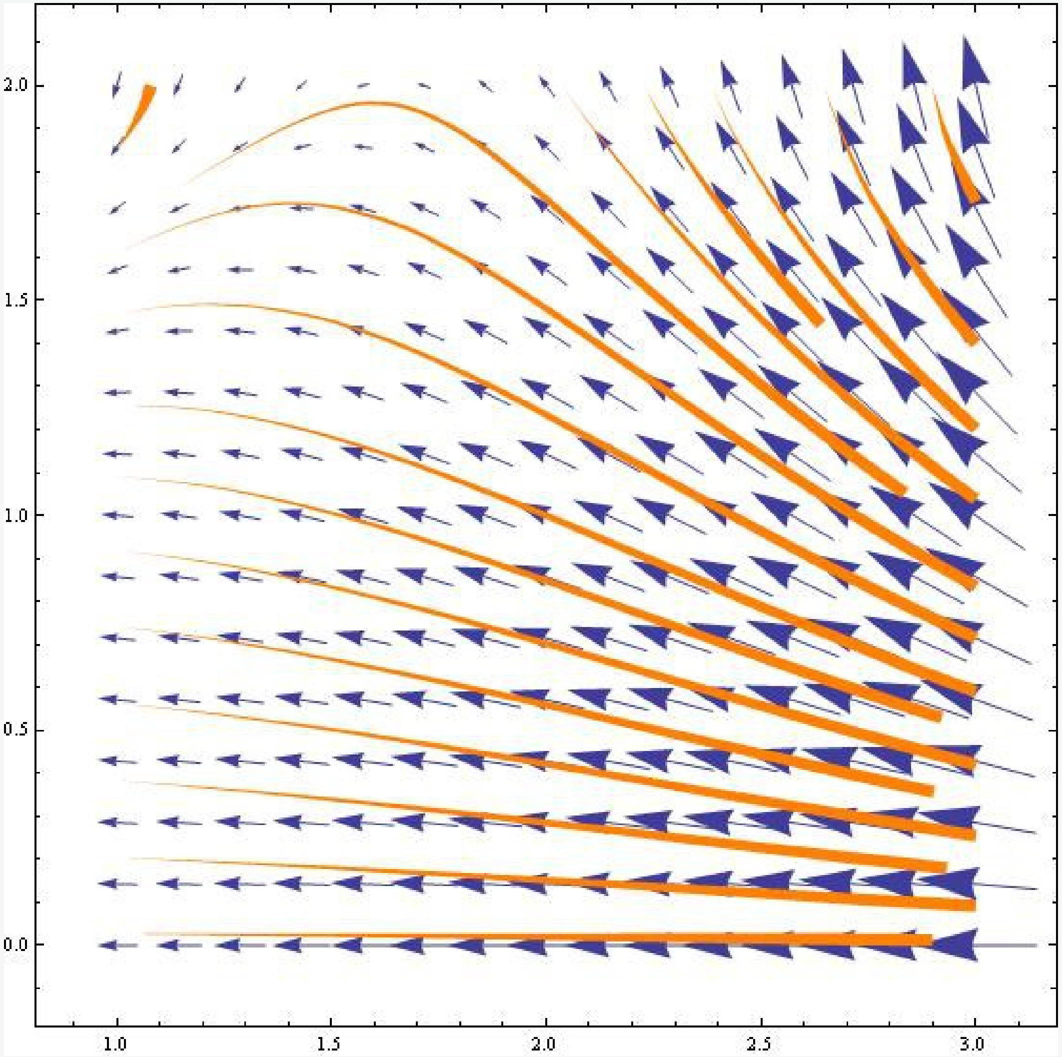

*Abb. L22-3: Das Vektorfeld und die Feldlinien der Funktion **F** (x, y)*