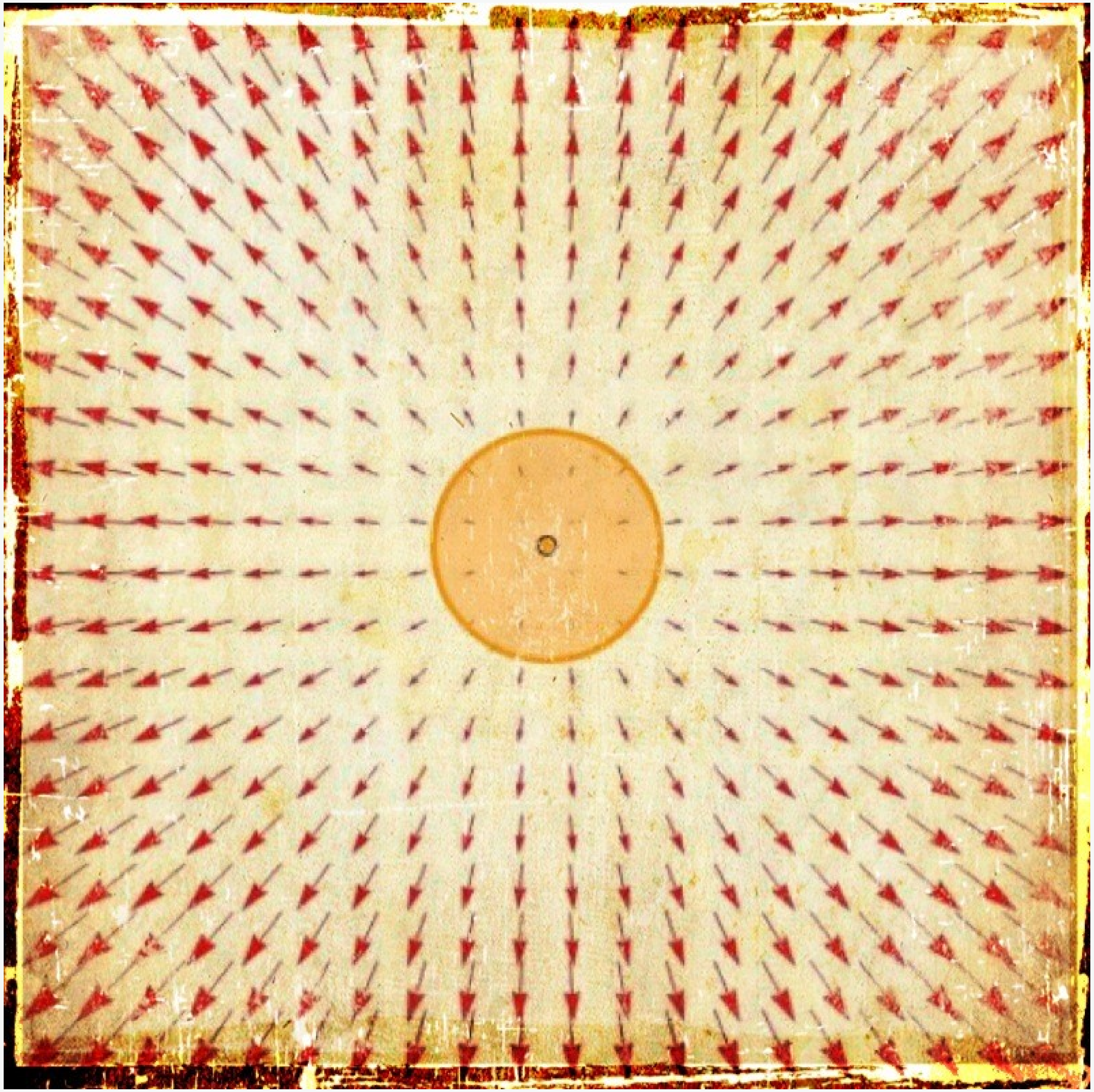
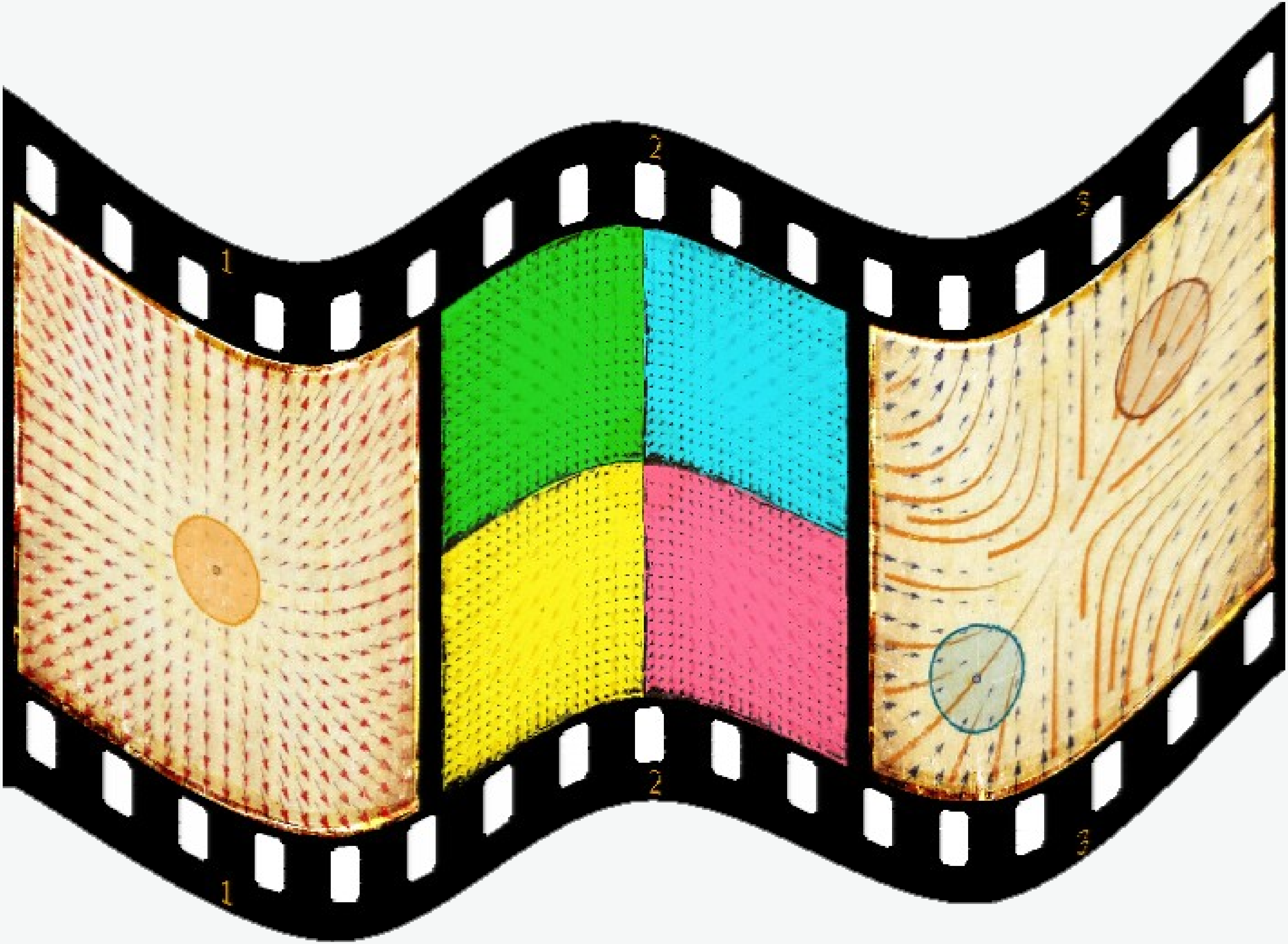
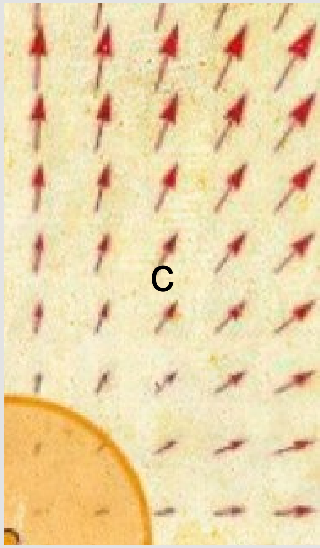


Divergenz: Aufgaben


1
2
3
1
2
3



Bestimmen Sie die Divergenz eines Vektorfeldes ***F***, gegebenenfalls im Punkt *P*

Aufgabe 2:

$$\vec{F}(x, y) = -x\,\vec{i}\,, \qquad P_1 = (-1, -1); \quad P_2 = (1, 1)$$

Aufgabe 3:

$$\vec{F}(x, y) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$$

Aufgabe 4:

$$\vec{F}(x, y) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j}\,, \qquad P_1 = (-1, -1); \quad P_2 = (1, 1)$$

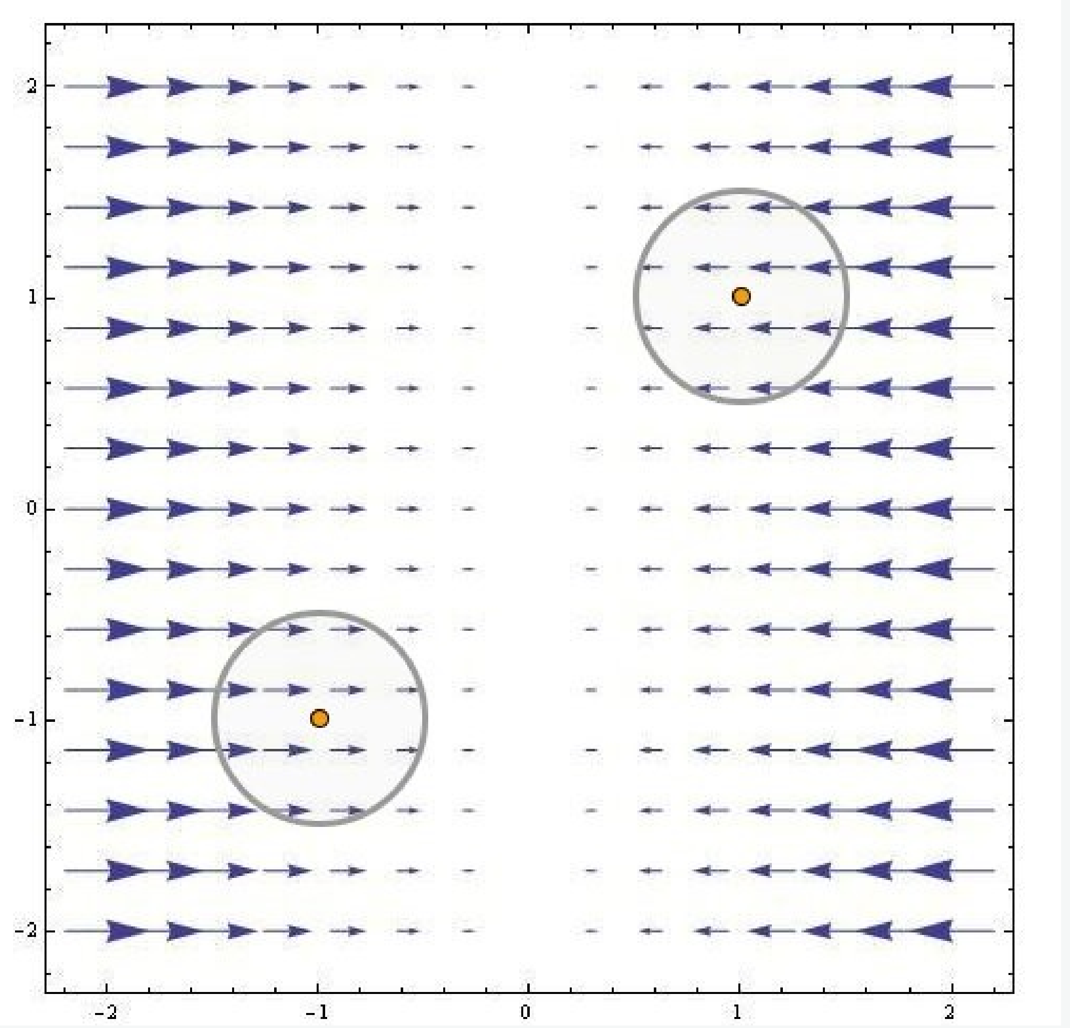


Abb. L2-1: Das Vektorfeld der Funktion ***F*** *(x, y) = (–x, 0)*

$$\vec{F}(x, y) = -x\ \vec{i}\,, \qquad div\,\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-x) + \frac{\partial}{\partial y}(0) = -1$$

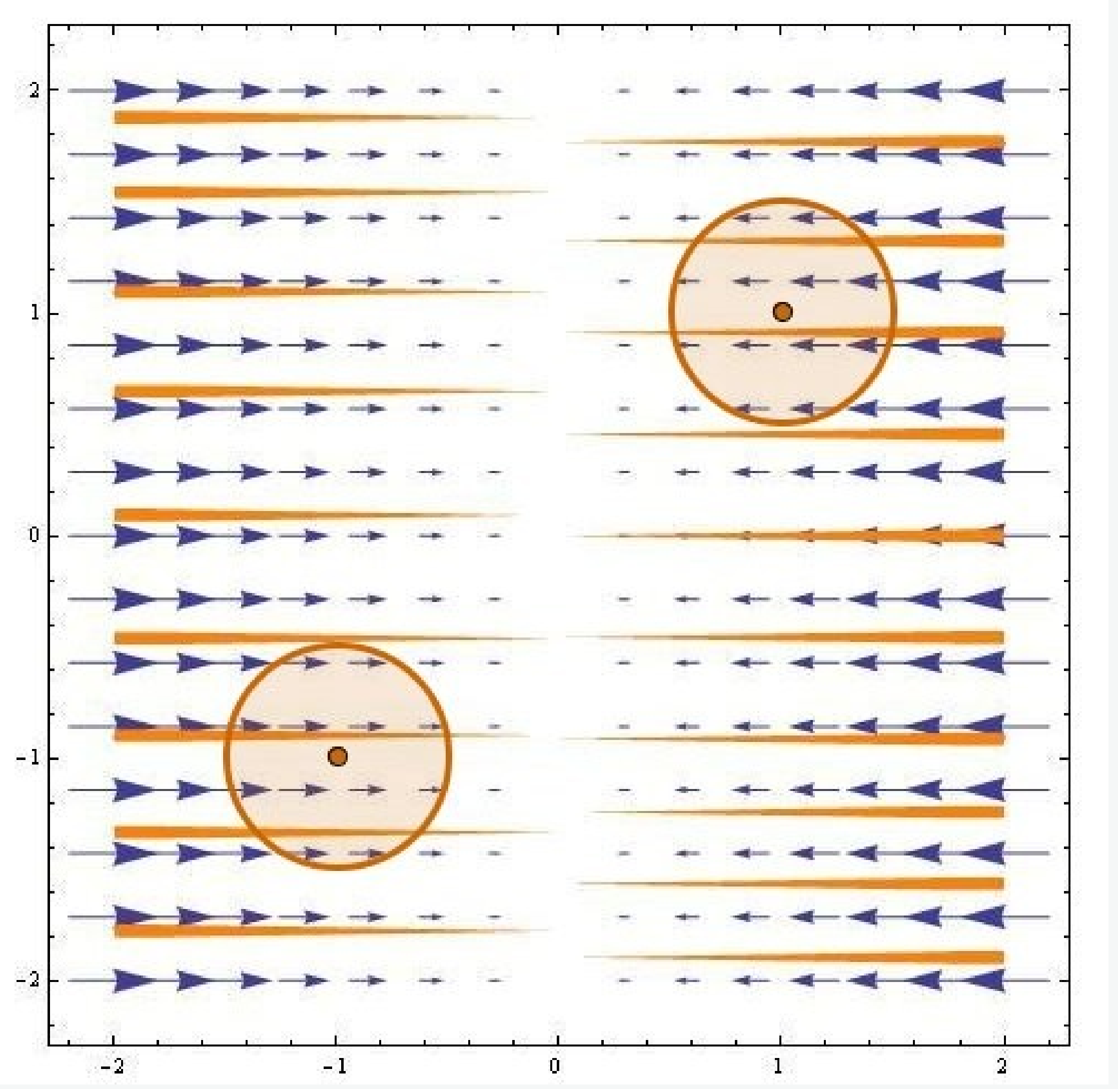


Abb. L2-2: Das Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $\boldsymbol{F}(x, y) = (-x, 0)$

In jedem Punkt des Feldes bleibt die Divergenz unverändert und gleich -1.

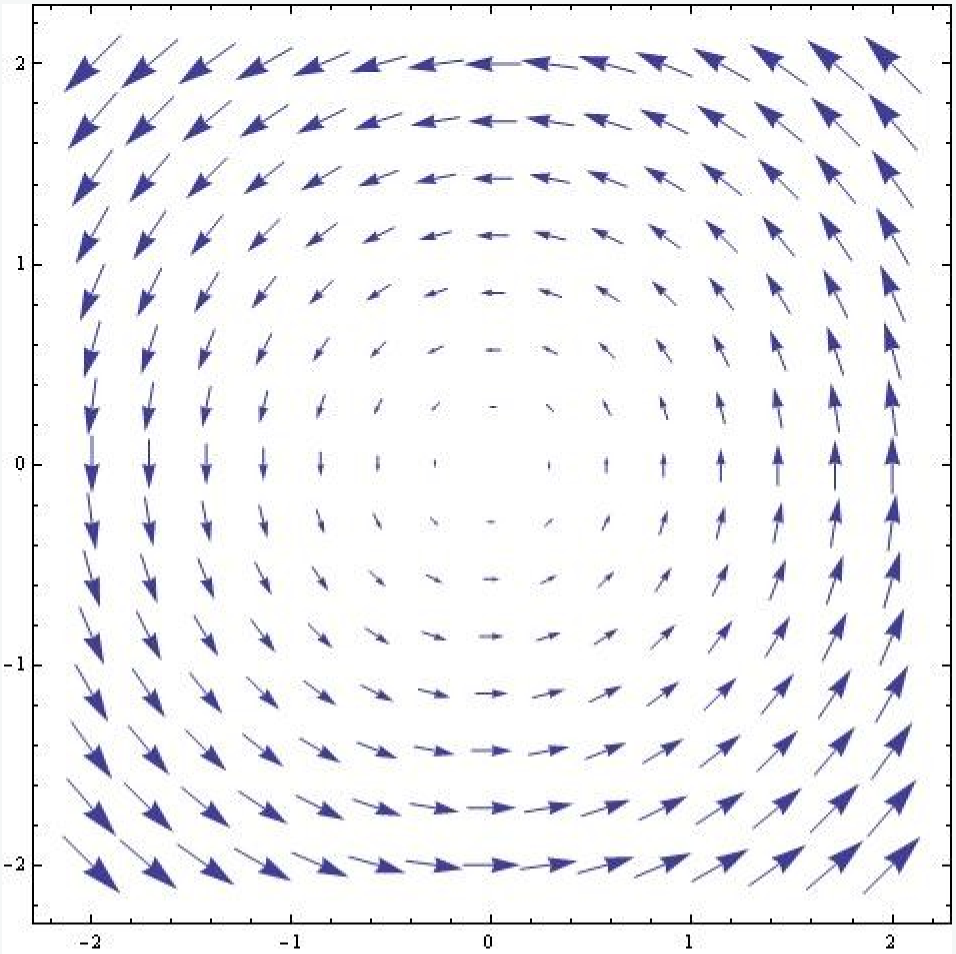


Abb. L3-1: Das Vektorfeld der Funktion ***F*** *(x, y) = (–y, x)*

$$\vec{F}(x, y) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}, \qquad div\,\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0$$

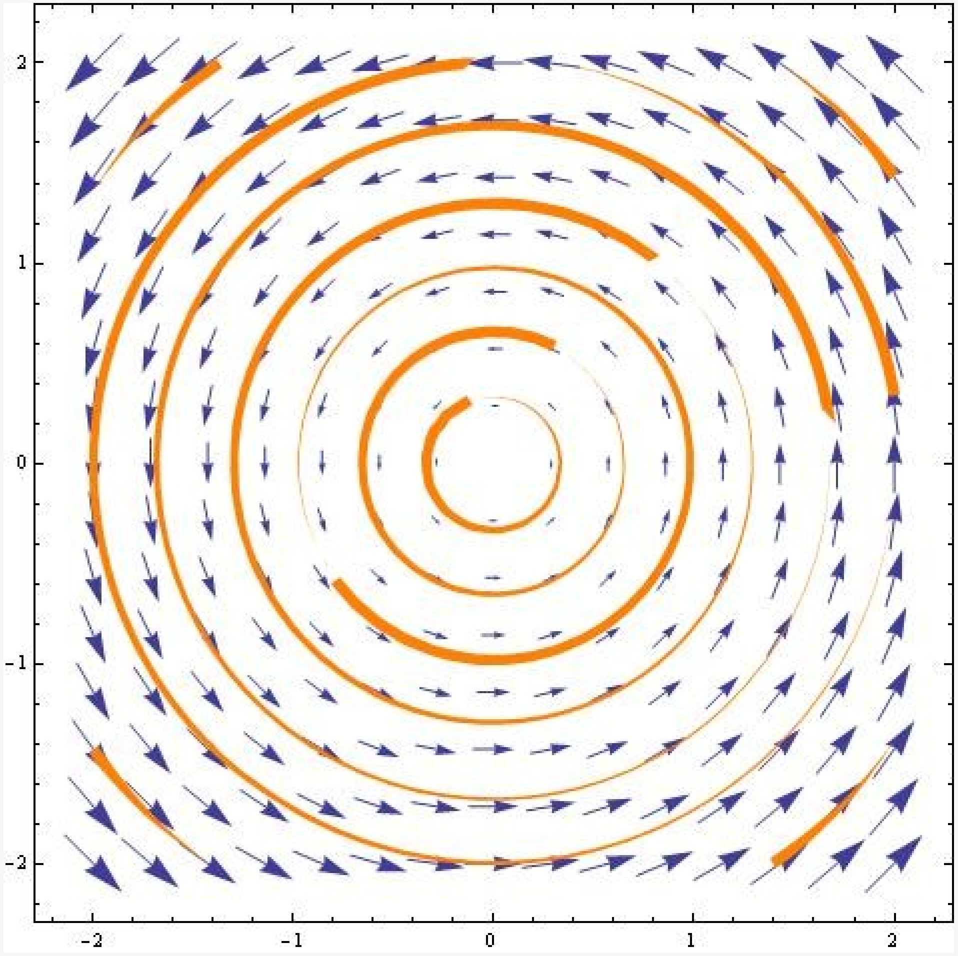


Abb. L3-2: Das Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $\boldsymbol{F}(x, y) = (-y, x)$

Dieses Vektorfeld ist quellenfrei.

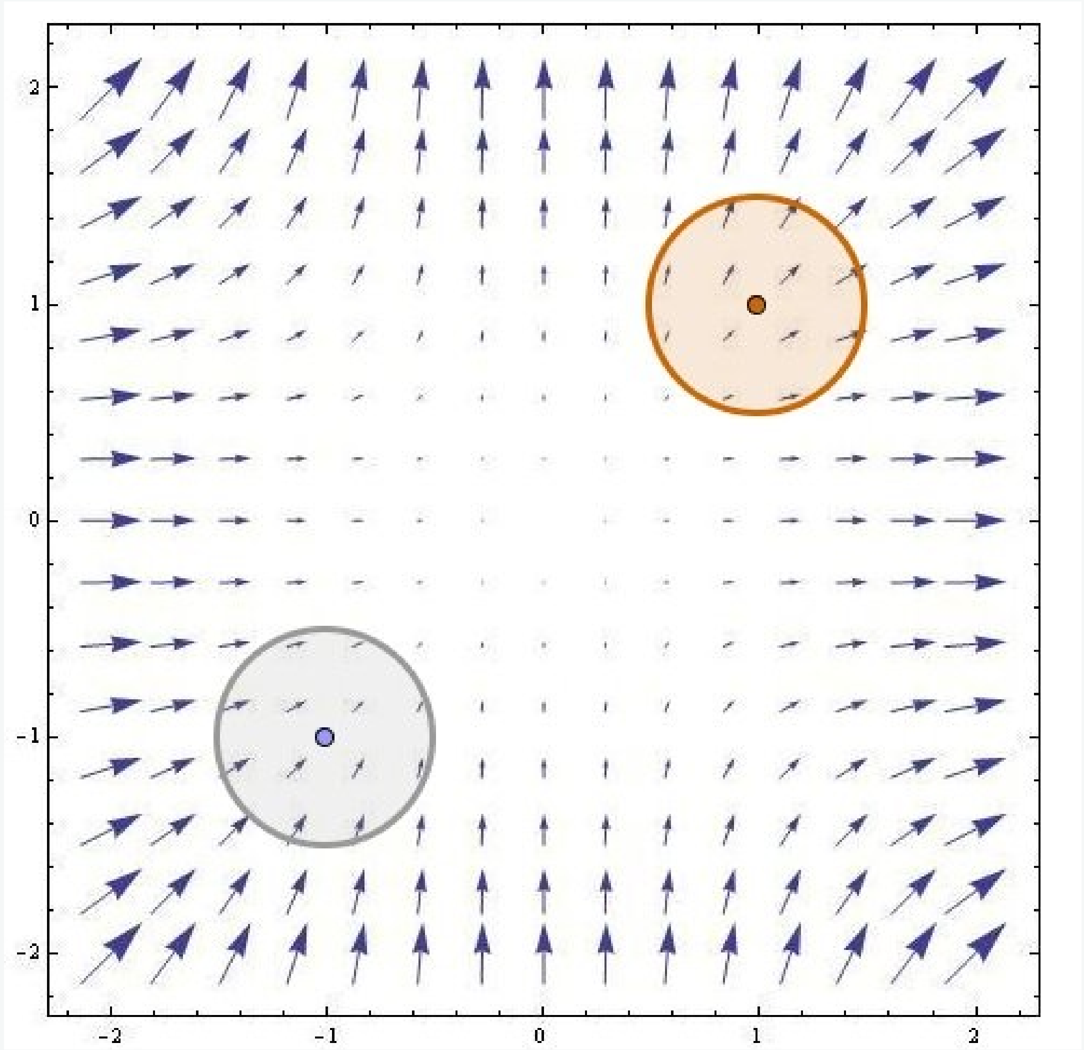


Abb. L4-1: Das Vektorfeld der Funktion ***F*** *(x, y) = (x², y²)*

$$\vec{F}(x, y) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j}, \qquad div\,\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2x + 2y$$

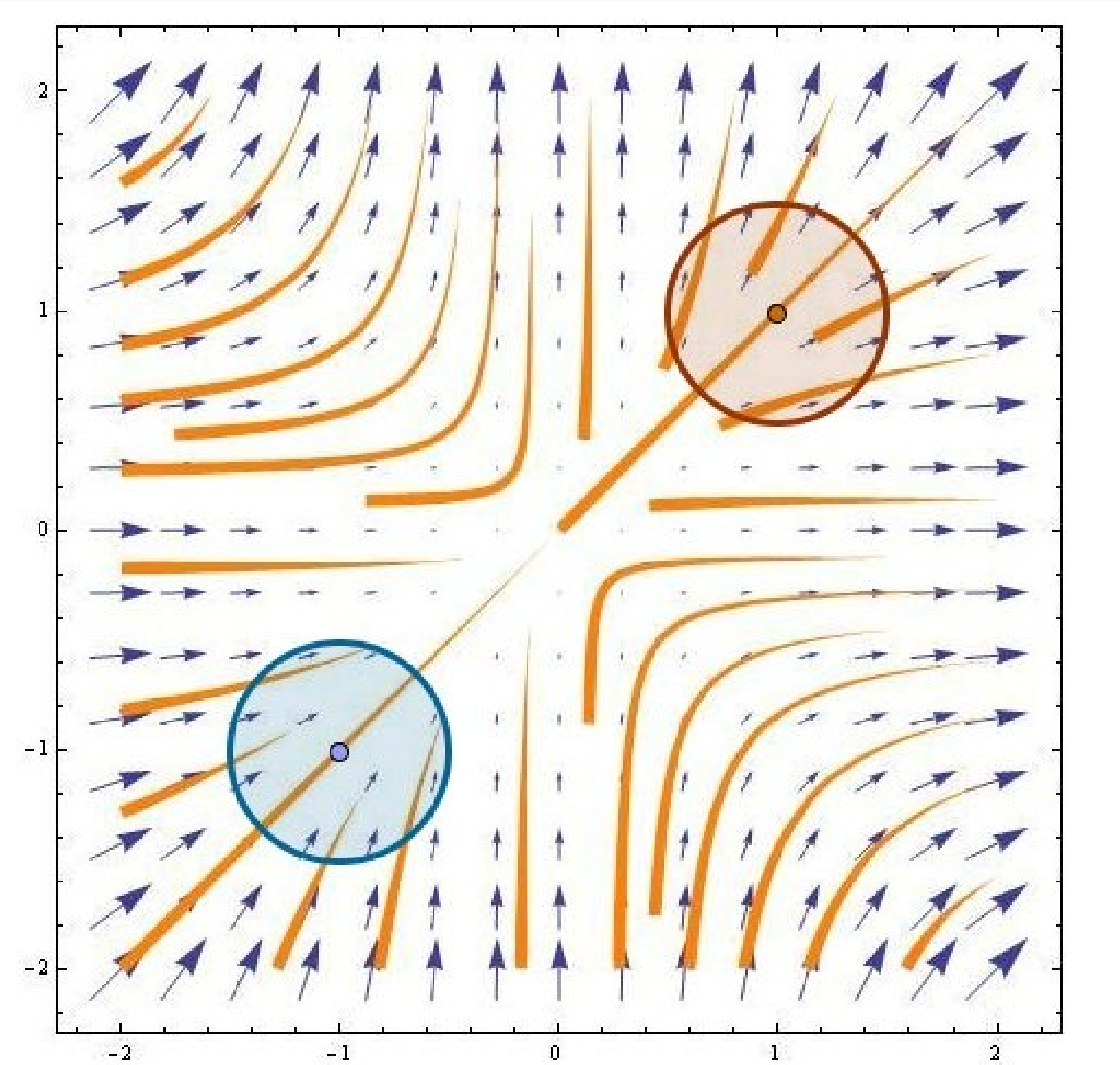


Abb. L4-2: Das Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $\mathbf{F}(x, y) = (x^2, y^2)$

$$div\,\vec{F}\,\Big|_{P_1(-1,\,-1)} = 2(-1) + 2(-1) = -4\,, \qquad div\,\vec{F}\,\Big|_{P_2(1,\,1)} = 4$$

Die Divergenz ist ein Skalarfeld, das an jedem Punkt angibt, ob das Feld an diesem Punkt eine Quelle/Senke besitzt und bestimmt deren Große.

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein Maß für die Ergiebigkeit des Vektorfeldes. Sie gibt an, wie viel Fluss pro Volumeneinheit in einer kleinen Umgebung des Feldpunktes P entsteht oder verschwindet.

Bestimmen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder

Aufgabe 5:

$$a)\quad \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

$$b)\quad \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Aufgabe 6:

$$\vec{F} = x\,z\,\vec{i} + 2\,x\,y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}\,, \qquad P = (1,\,-1,\,1)$$

Aufgabe 7:

$$a)\quad \vec{F} = \begin{pmatrix} x^3 + 1 \\ x\,y^2 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad \vec{F} = \begin{pmatrix} x\,e^{-y} \\ y\,e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \vec{F} = \frac{1}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lösung 5:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}, \qquad div\,\vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2$$

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}, \qquad div\,\vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Lösung 6:

$$\vec{F} = x\,z\,\vec{i} + 2\,x\,y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}, \qquad P = (1, -1, 1)$$

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial (x\,z)}{\partial x} + 2\,\frac{\partial (x\,y^2)}{\partial y} + \frac{\partial z^2}{\partial z} = z + 4\,x\,y + 2\,z = 4\,x\,y + 3\,z$$

$$div\,\vec{F}\,\big|_P = (4\,x\,y + 3\,z)\big|_{x=1,\ y=-1,\ z=1} = 4\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot 1 = -1$$

Lösung 7 c:

$$\vec{F} = \frac{1}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad div\,\vec{F} = 0$$

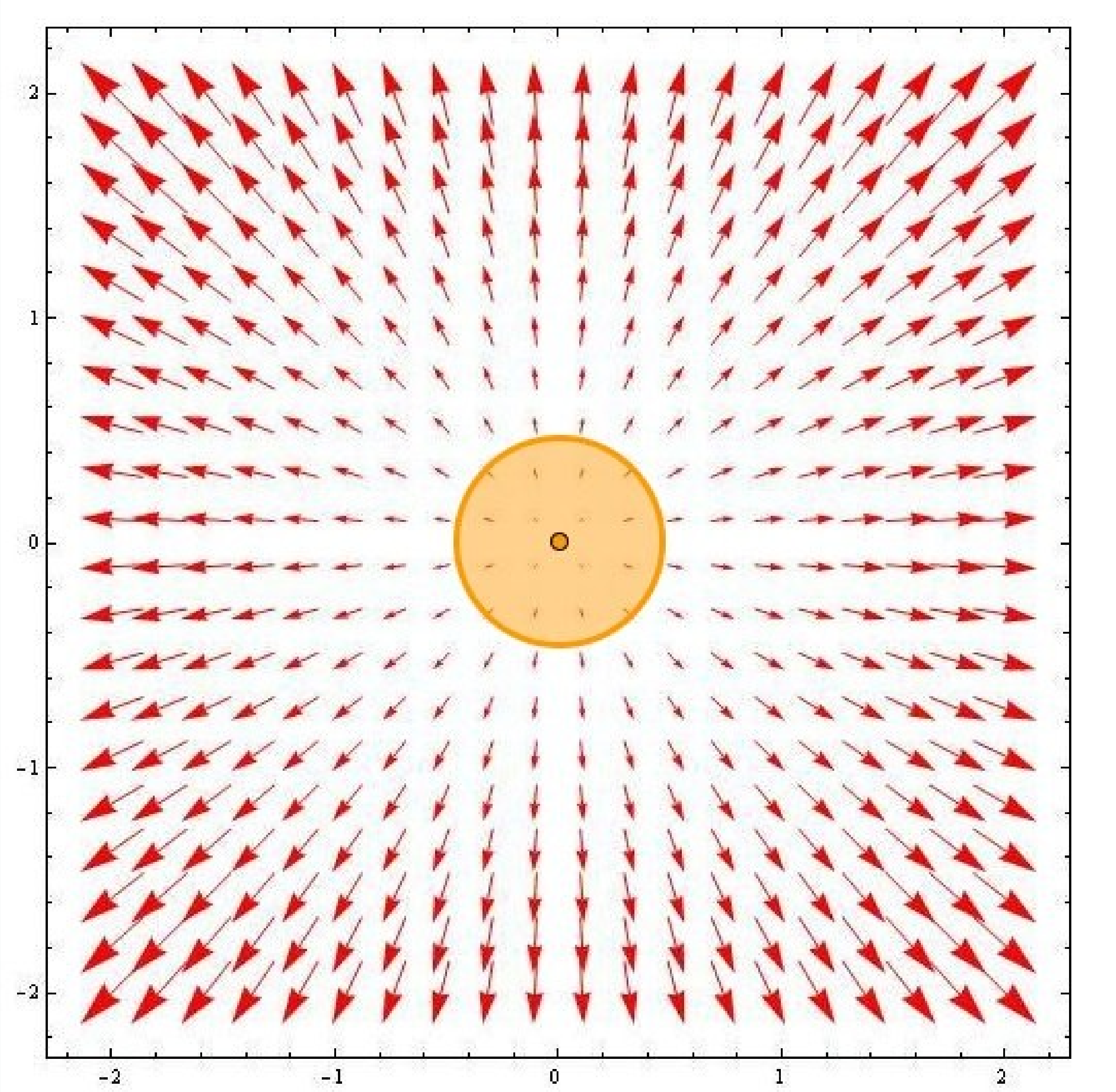


Abb. L5-1: Das Vektorfeld der Funktion **r** *(x, y) = (x, y)*

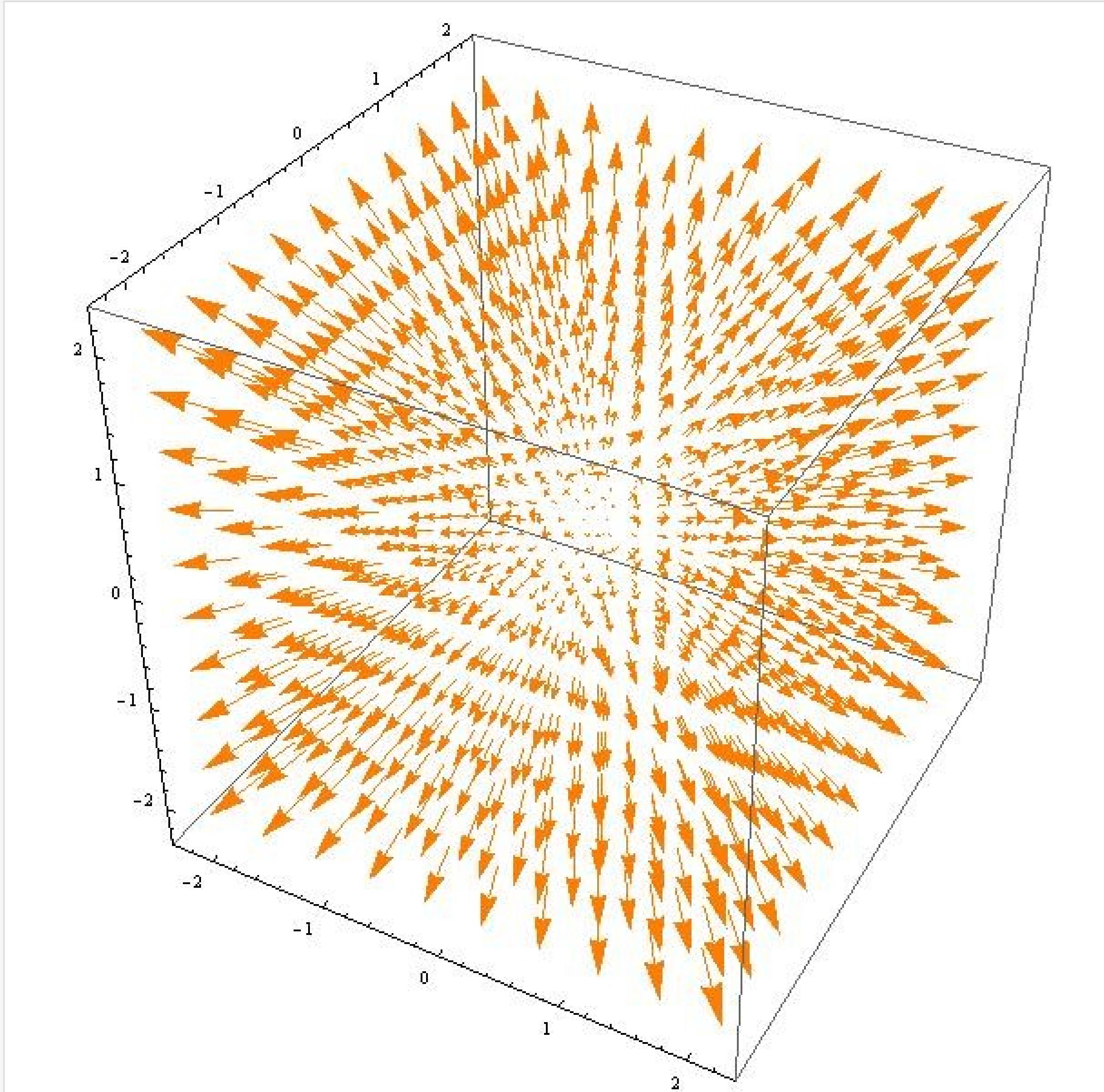


Abb. L5-2: Das Vektorfeld der Funktion $\mathbf{r}\,(x, y, z) = (x, y, z)$

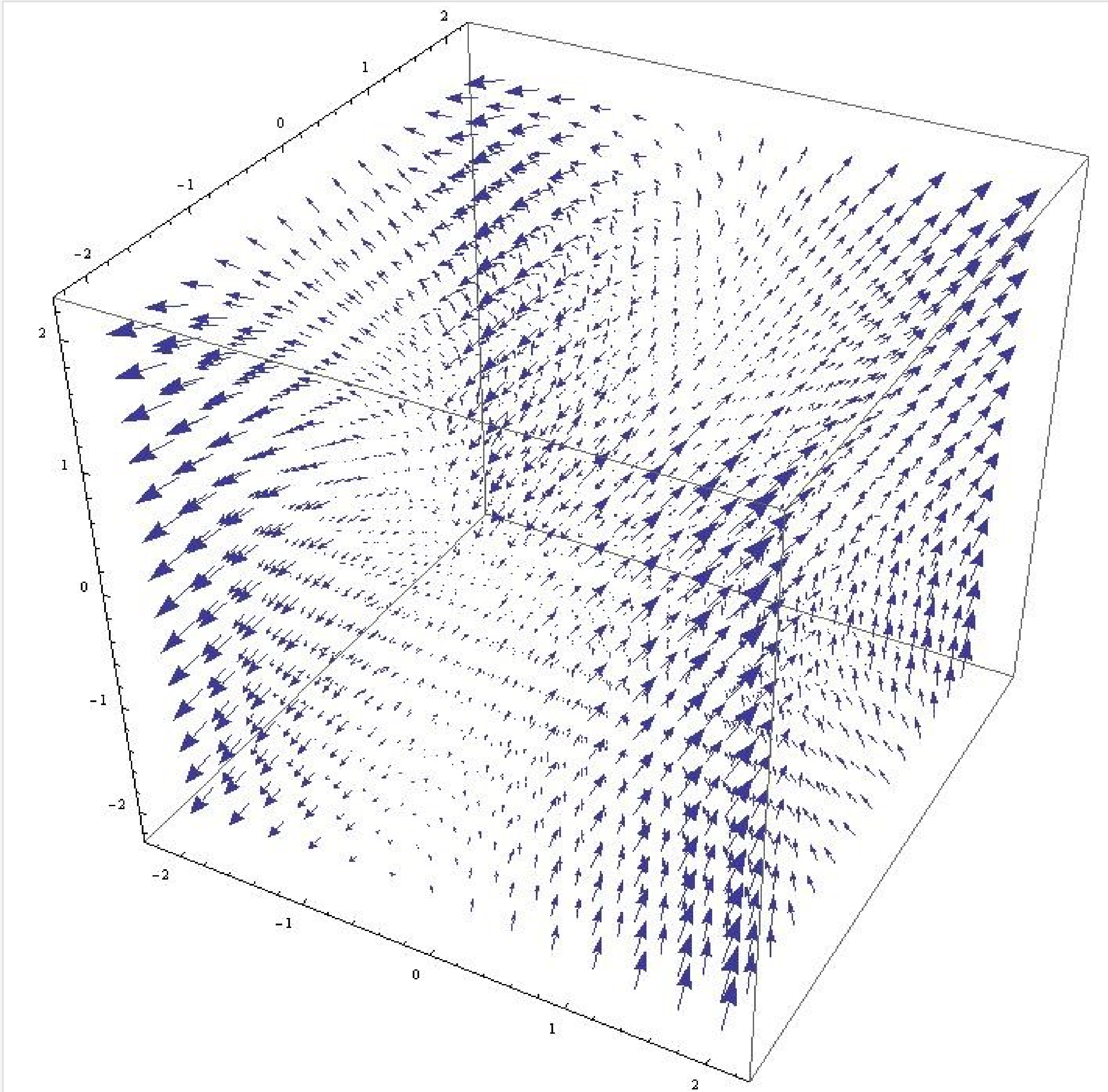


Abb. L6-1: Das Vektorfeld der Funktion $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz,\ 2xy^2,\ z^2)$

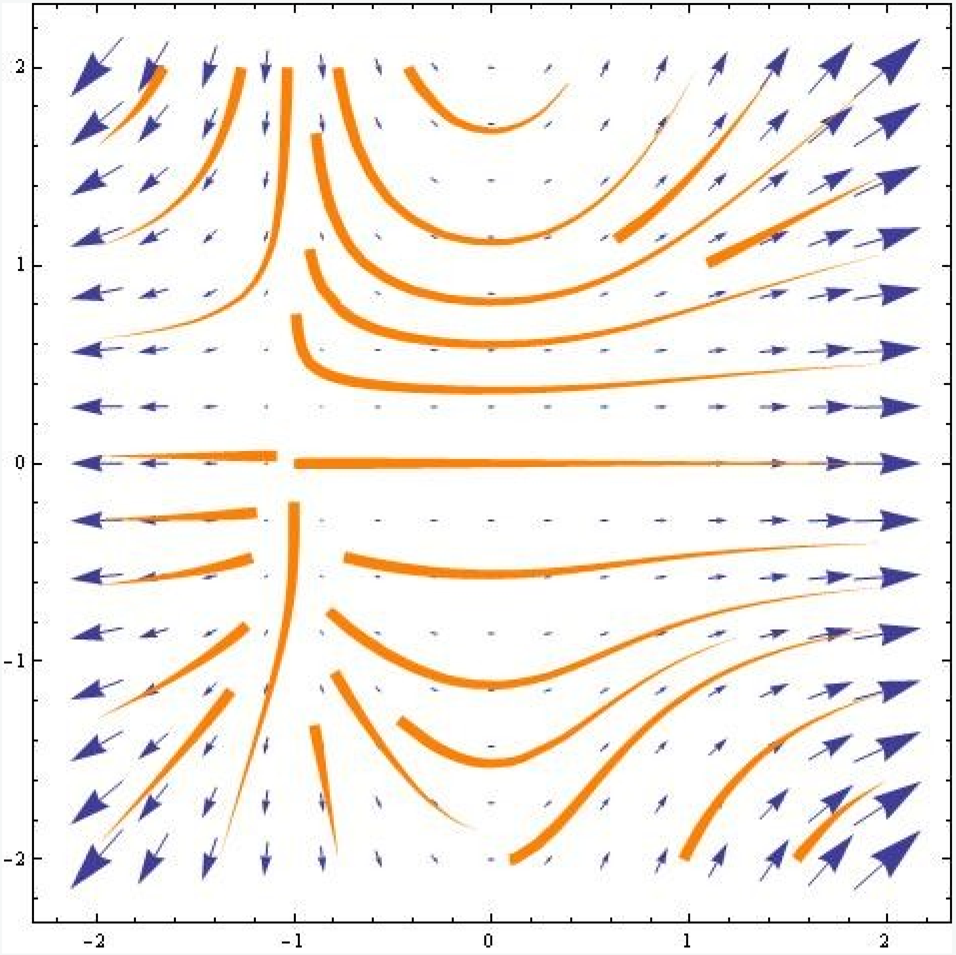


Abb. L7a: Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $\boldsymbol{F}(x, y) = (x^3 + 1,\ xy^2)$

$$\vec{F} = (x^3 + 1,\ x\,y^2), \qquad div\,\vec{F} = 3\,x^2 + 2\,x\,y$$

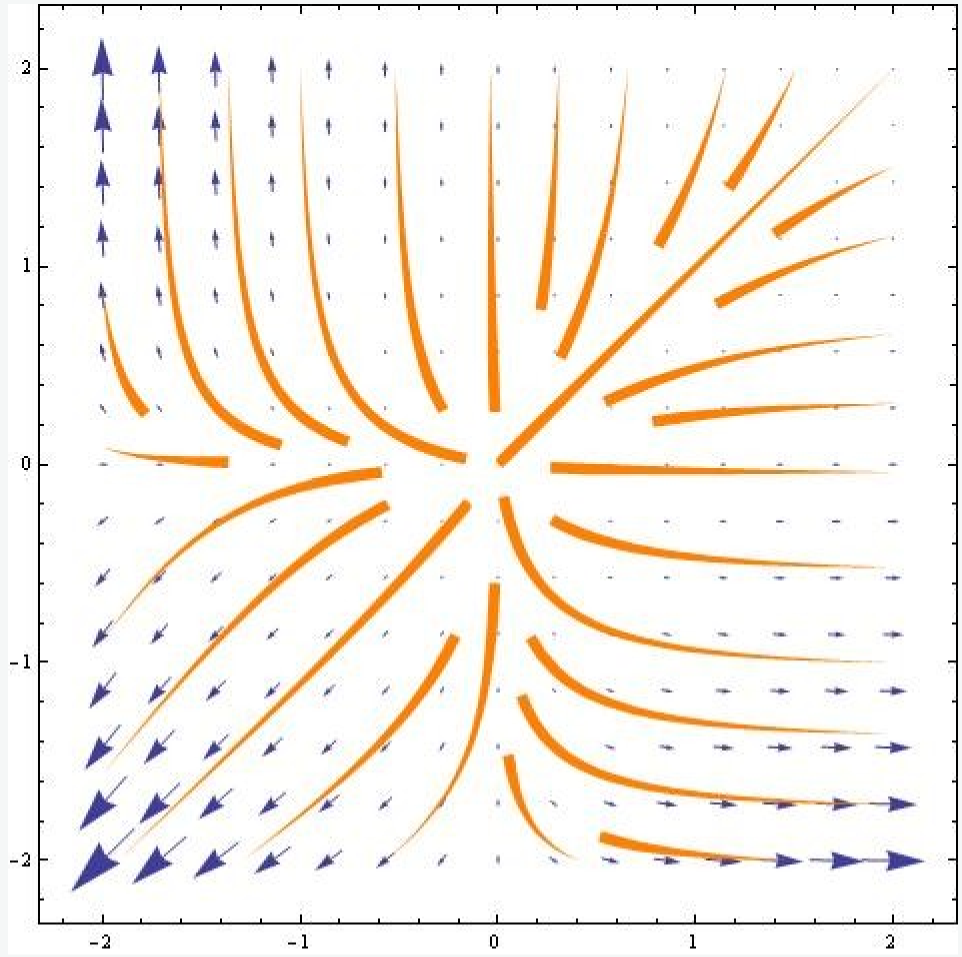


*Abb. L7b: Vektorfeld und Feldlinien der Funktion **F** (x, y) = (x exp(-y), y exp(-x))*

$$\vec{F} = \left(x\, e^{-y},\ y\, e^{-x} \right), \qquad div\, \vec{F} = e^{-y} + e^{-x}$$

$\vec{F}\,,\ \vec{F}_1\,,\ \vec{F}_2$ − Vektorfelder; ϕ − Skalarfeld

a − ein konstanter Vektor; ***c*** − eine Konstante

1. $div\,\vec{a} = 0$
2. $div\,(\vec{F} + \vec{a}) = div\,\vec{F}$
3. $div\,(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = div\,\vec{F}_1 + div\,\vec{F}_2$
4. $div\,(c\,\vec{F}) = c\ div\,\vec{F}$
5. $div\,(\phi\,\vec{F}) = \phi\ div\,\vec{F} + \vec{F}\ grad\,\phi$

1. $\vec{\nabla}\,\vec{a} = \vec{0}$
2. $\vec{\nabla}\,(\vec{F} + \vec{a}) = \vec{\nabla}\,\vec{F}$
3. $\vec{\nabla}\,(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{\nabla}\,\vec{F}_1 + \vec{\nabla}\,\vec{F}_2$
4. $\vec{\nabla}\,(c\,\vec{F}) = c\,\vec{\nabla}\,\vec{F}$
5. $\vec{\nabla}\,(\phi\,\vec{F}) = \phi\,(\vec{\nabla}\,\vec{F}) + \vec{F}\,(\vec{\nabla}\,\phi)$