Divergenz


FUJI RTP
FUJI RTP
FUJI RTP
FUJI RTP
FUJI RTP
FUJI RTP
FUJI RTP

Stellen Sie graphisch folgende Vektorfelder dar

$$a)\quad \vec{F}(x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

$$b)\quad \vec{F}(x, y) = -x\,\vec{i} - y\,\vec{j}$$

Welcher Unterschied besteht zwischen den beiden Vektorfeldern ?

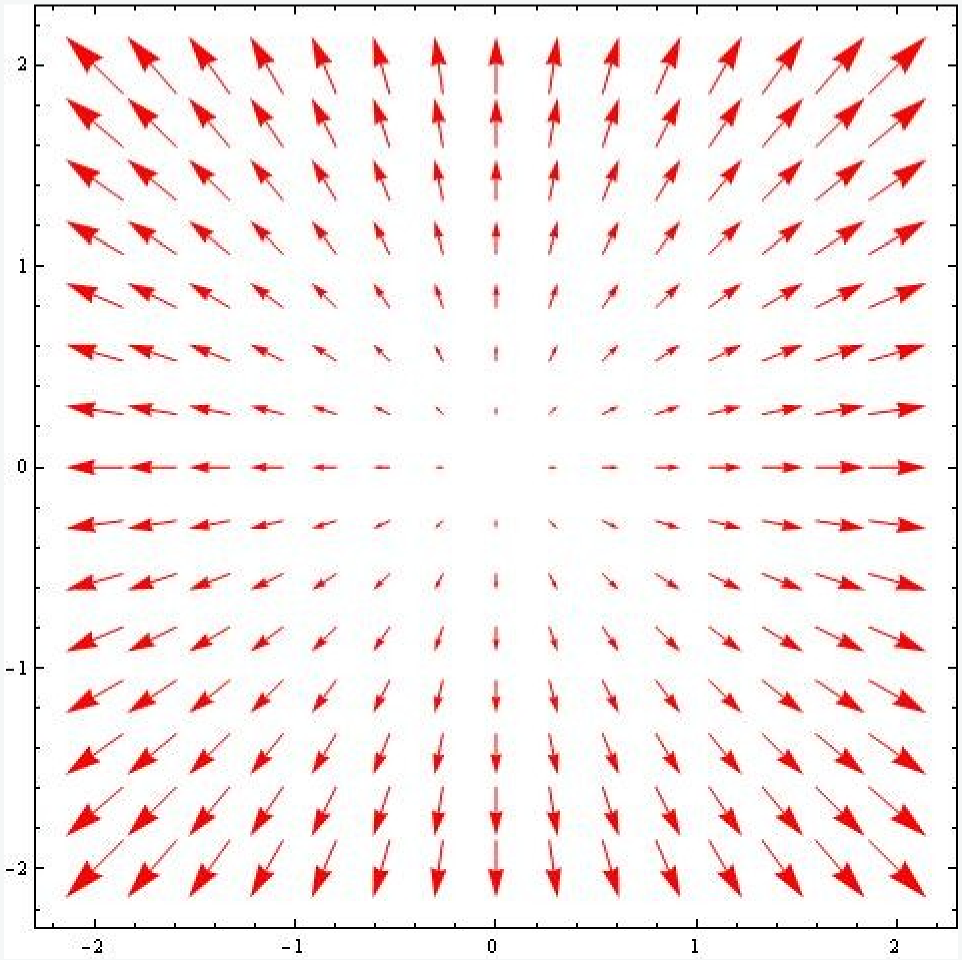


Abb. 1-1: Das Vektorfeld der Funktion $\boldsymbol{F}(x, y) = (x, y)$

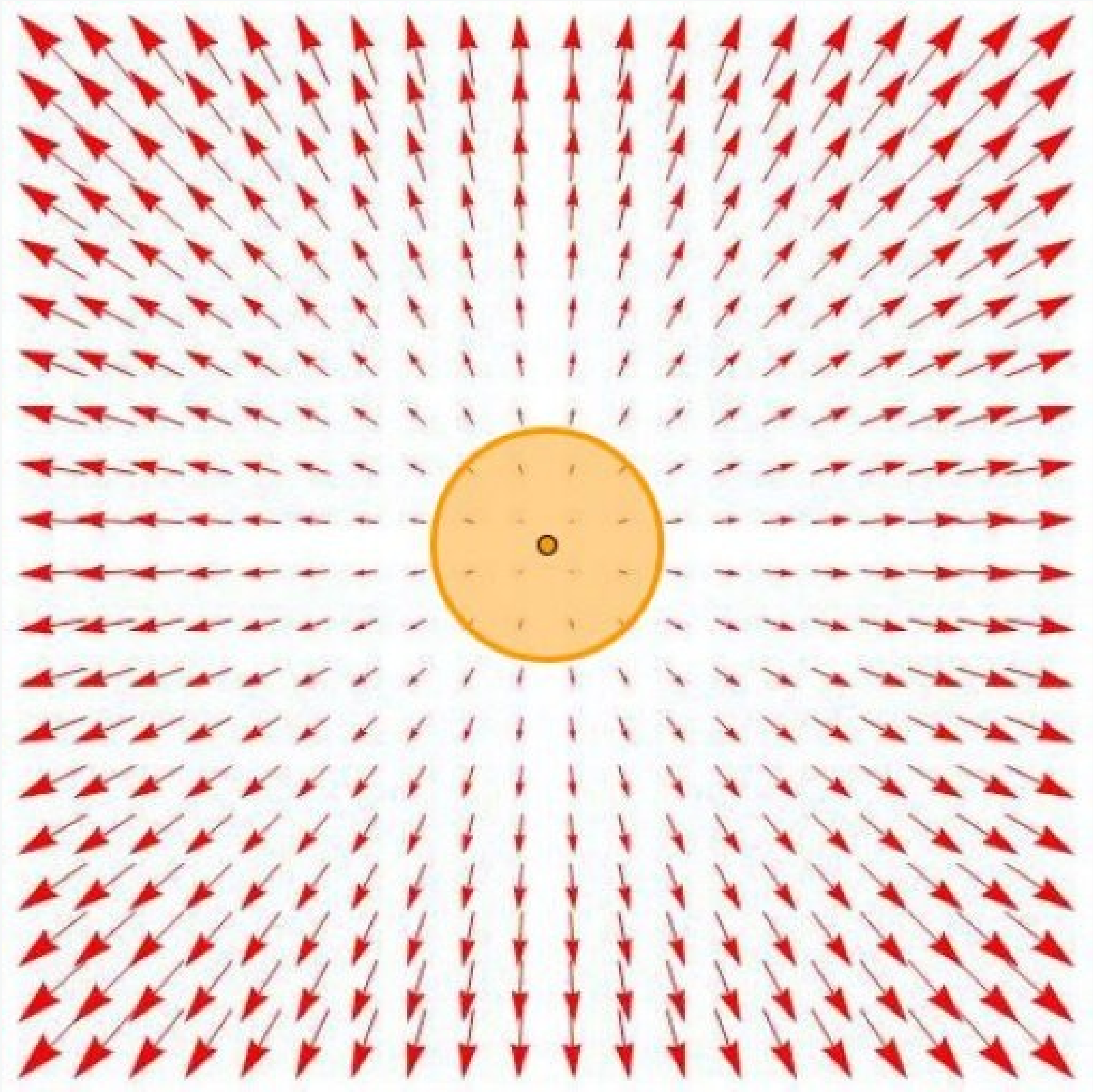
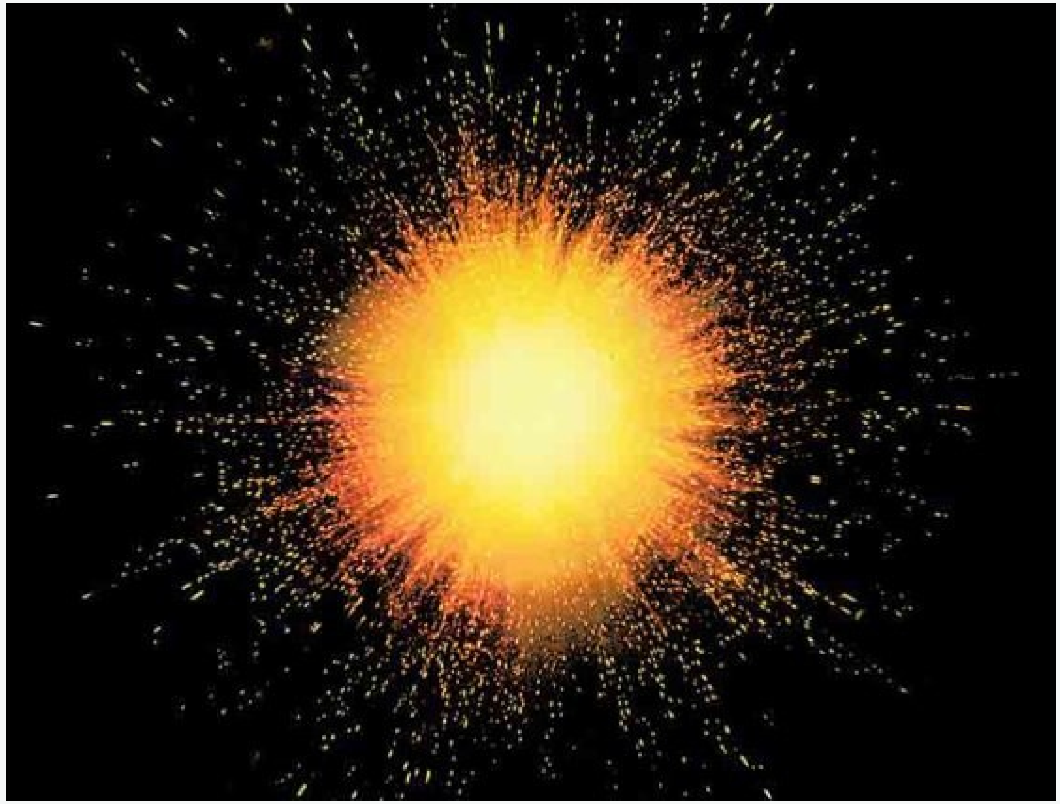


Abb. 1-2: Das Vektorfeld der Funktion $\boldsymbol{F}(x, y) = (x, y)$. *Diese Abbildung kann man so interpretieren: Im Ursprung O befindet sich eine Quelle, die das Vektorfeld produziert.*

http://watchmojo.com/blogs/images/Big-Bang.jpg

Abb. 1-3: Der Urknall. Die Expansion des Universums

Das heute allgemein anerkannte Modell zur Entstehung des Universums ist der Urknall, auch Big Bang genannt. Der Urknall ist der Zustand, in dem das Universum aus einem unendlich kleinen Volumen mit unendlich hoher Energiekonzentration entsteht.



http://lifeboat.com/images/big.bang.jpg

Abb. 1-4: Der Urknall. Die Expansion des Universums

Wir haben das Vektorfeld in den Abbildungen *1-1* und *1-2* als ein Feld mit einer Quelle interpretiert. Es kann z.B. sich ausdehnende Materie in der Big Bang Theorie repräsentieren.

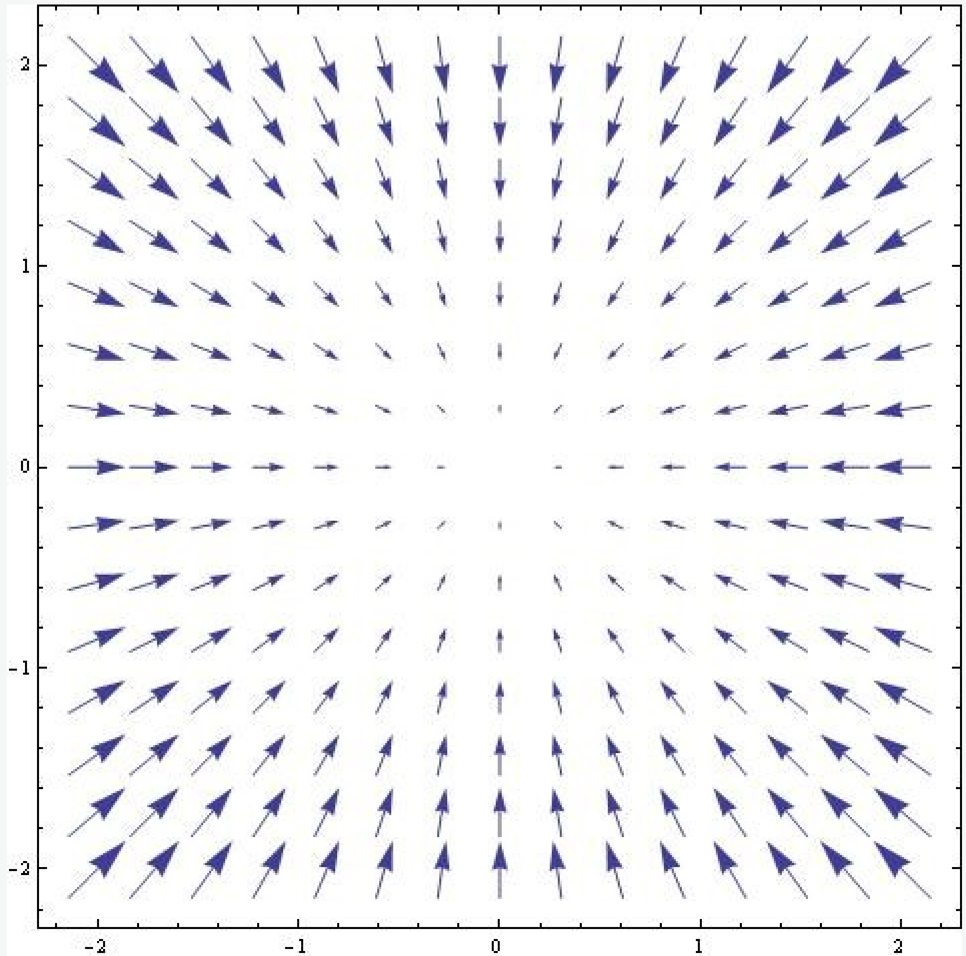


Abb. 1-5: Das Vektorfeld der Funktion ***F*** *(x, y) = (-x, -y)*
mit einer Senke im Ursprung

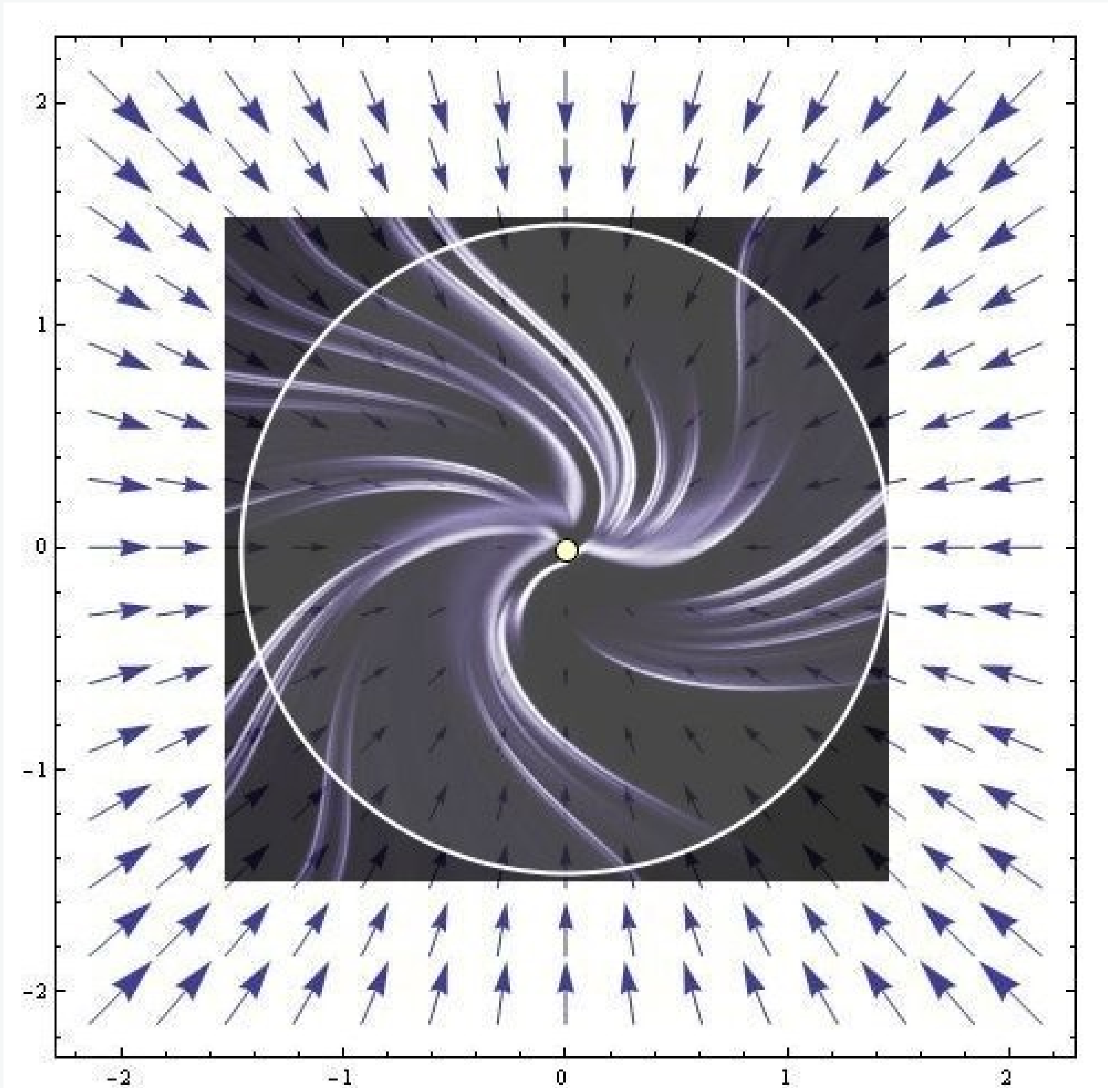
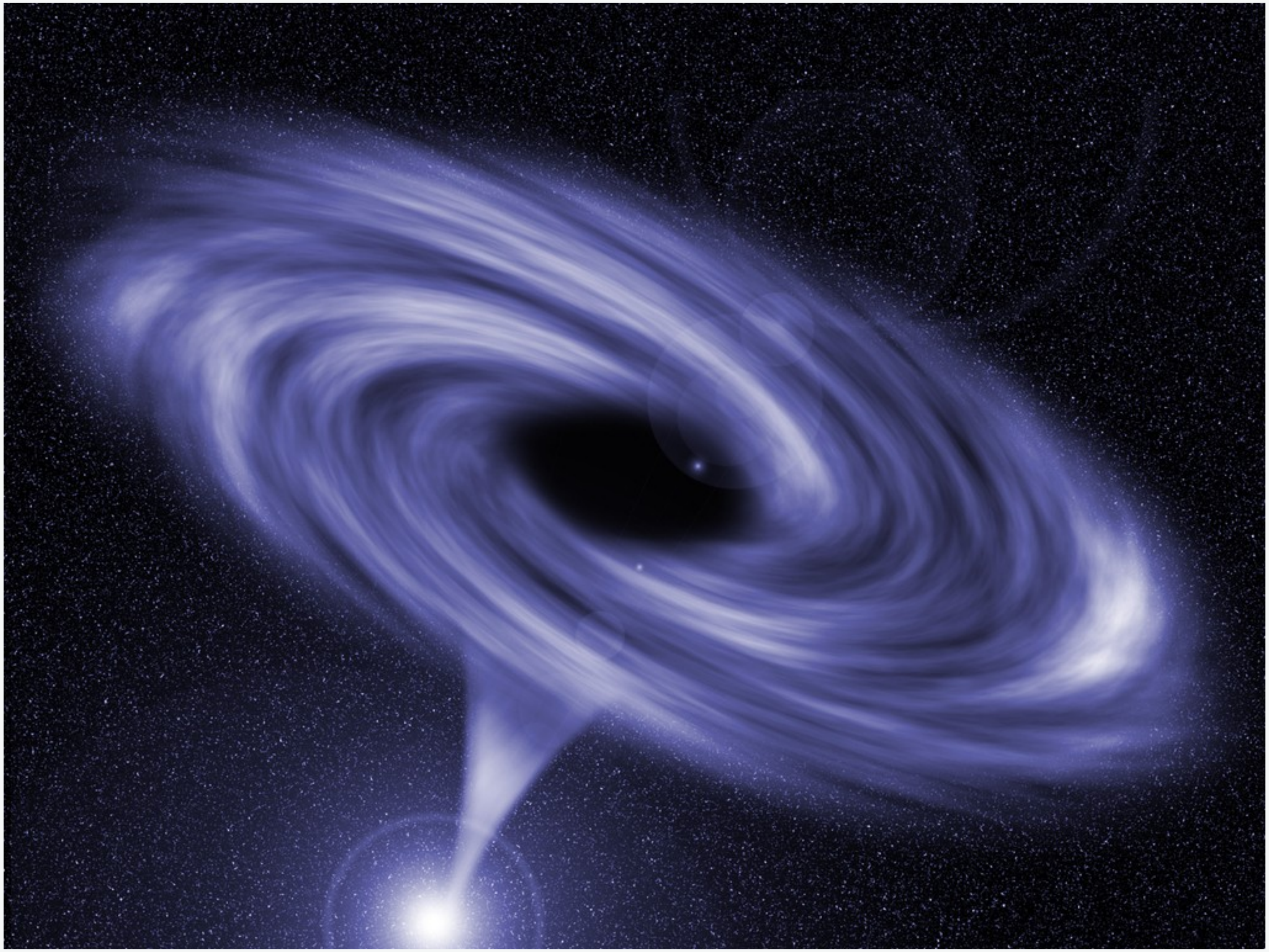
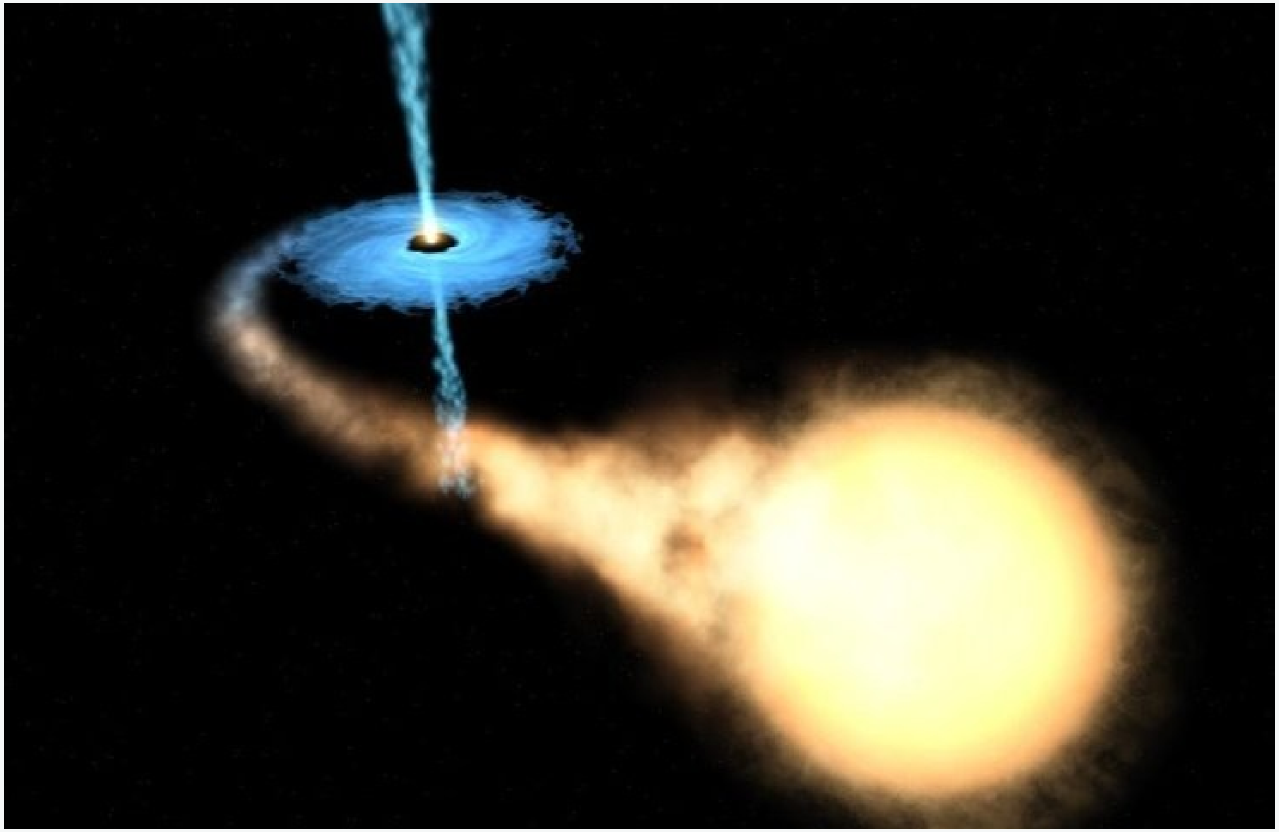


*Abb. 1-6: Das Vektorfeld der Funktion **F** (x, y) = (-x, -y). Diese Abbildung kann man so interpretieren: Im Ursprung O befindet sich eine Senke, in der das Vektorfeld verschwindet.*



http://media.photobucket.com/image/black hole/joneagle29/Black_Hole-1024x768.jpg

Abb. 1-7: Modell eines Schwarzes Loches



http://www.schoenitzer.de/images/Schwarzes_Loch.jpg

Abb. 1-8: Ein Schwarzes Loch verschlingt einen Stern

Als Schwarzes Loch bezeichnet man ein astronomisches Objekt, dessen Gravitation so hoch ist, dass die Fluchtgeschwindigkeit höher liegt als die Lichtgeschwindigkeit.

http://www.cosmographica.com/gallery/portfolio2007/content/bin/images/large/131_BlackHole.jpg

Abb. 1-9 Ein Schwarzes Loch verschlingt eine Materie

Der Ausdruck "Schwarzes Loch" wurde 1967 von *John Archibald Wheeler* geprägt und verweist auf den Umstand, dass auch elektromagnetische Wellen, wie etwa sichtbares Licht, das schwarze Loch nicht verlassen können und es einem menschlichen Auge daher vollkommen schwarz erscheint.

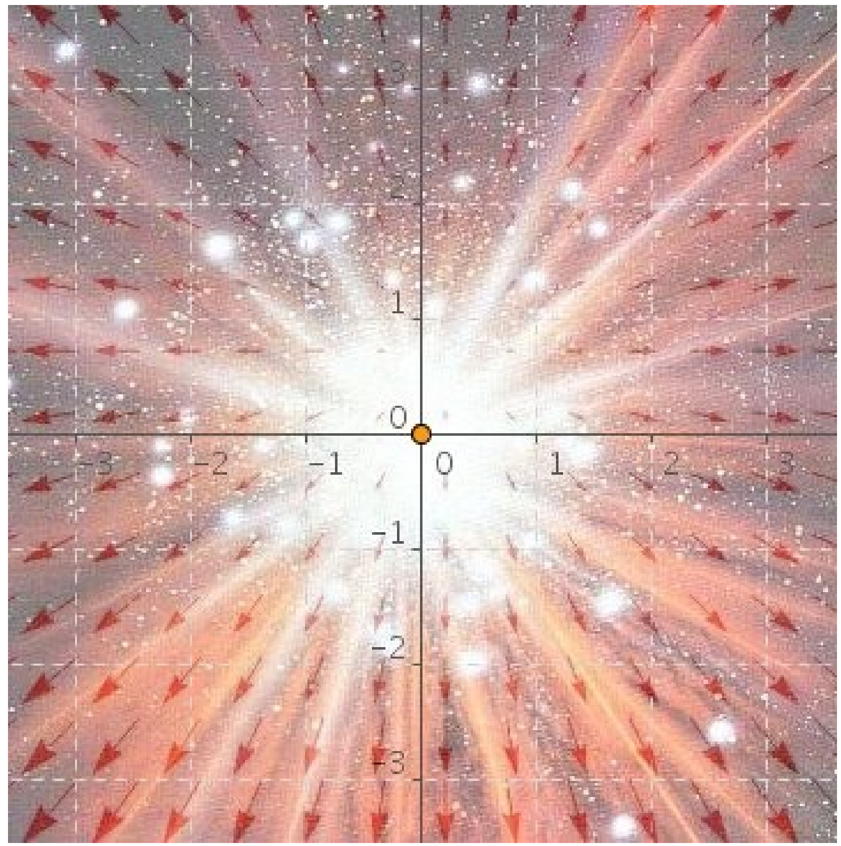


Abb. 2: Das Vektorfeld mit der "Quelle" im Ursprung

Um die Vektorfelder mit Quellen und Senken zu beschreiben, gebraucht man einen neuen Begriff, den der "Divergenz" des Vektorfeldes.

Definition:

Unter der Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{pmatrix}$

versteht man das skalare Feld

$$\vec{\nabla}\,\vec{F} = div\,\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Die Divergenz gibt als skalare Funktion die Dichte der Quellen des Vektorfeldes an jedem beliebigen Koordinatenpunkt an.

Definition und Eigenschaften der Divergenz

Die Bezeichnung "Divergenz" stammt aus der Hydrodynamik und bedeutet dort "Auseinanderströmen einer Flüssigkeit" ("Divergieren"). Die skalare Größe der Divergenz $div\, \boldsymbol{F}$ wird als "Quelldichte" oder "Quellstärke pro Volumenelement" bezeichnet. Dabei gilt in Analogie zum Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit:

$div\, \boldsymbol{F} > 0$: Im Volumenelement befindet sich eine "Quelle".

$div\, \boldsymbol{F} < 0$: Im Volumenelement befindet sich eine "Senke".

$div\, \boldsymbol{F} = 0$: Das Volumenelement ist "quellenfrei".

Angenommen, die Divergenz eines Feldes ist uns bekannt. Was können wir daraus schließen? Am Beispiel eines Geschwindigkeitsfeldes ***v*** einer Flüssigkeit sehen wir, wie sich aus der Divergenz eine Vorstellung der Bewegung der Fluessigkeit ergibt. Denn die Divergenz von ***v*** in einem Punkt P gibt an, ob sich die Flüssigkeit (im Fall negativer Divergenz) zum Punkt P hin bewegt oder (im Fall positiver Divergenz) von diesem Punkt wegströmt.

Beispiel:

Es sei $\vec{v}(x, y, z) = a(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = a\vec{r}$

Die Divergenz ist: $div\,\vec{v} = a\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) = 3a$

Das Vektorfeld ***v*** kann man als Geschwindigkeitsfeld einer radial strömenden Flüssigkeit betrachten; sie strömt zum Koordinatenursprung hin, wenn $a < 0$ ist und von ihm weg für $a > 0$.