http://images.dpchallenge.com/images_challenge/0-999/287/800/Copyrighted_Image_Reuse_Prohibited_128244.jpg

Rotation und Laplace-Operator mit Maple

Definition:

Unter der Rotation eines Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$ versteht man das Vektorfeld

$$rot\ \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

In Maple wird die Rotation eines Vektorfeldes durch den Befehl curl realisiert. (Rotation heißt auf Englisch *curl* !) Ähnlich wie der diverge-Befehl wird neben dem Vektorfeld auch der Vektor der Variablen gegeben. Der curl-Befehl ist im Paket linalg-enthalten.

```
vf:=[fx(x, y, y), fy(x, y, z), fz(x, y, z)]:

with(linalg):

curl(vf, [x, y, z]);
```

Als vektorielle Funktion gibt die Rotation Stärke und Richtung der im vektoriellen Feld auftretenden Wirbel an.

Bestimmen Sie die Rotation der folgenden Vektorfelder:

Aufgabe 1: $\vec{F} = x^2 \, \vec{i} + y^2 \, \vec{j} + z^2 \, \vec{k}$

Aufgabe 2: $\vec{F} = \sin y \, \vec{i} + \sin z \, \vec{j} + \sin x \, \vec{k}$

Aufgabe 3: $\vec{F} = x\, y \, \vec{i} + y\, z \, \vec{j} + x\, z \, \vec{k}$

Rotation eines Vektorfeldes: Lösungen 1, 2

<u>Lösung 1:</u> $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$

```
vf:=[x², y², z²]:                 [x², y², z²]

with(linalg):

curl(vf, [x, y, z]);              [0, 0, 0]
```

$$rot\,\vec{F} = \vec{\cdot}$$

<u>Lösung 2:</u> $\vec{F} = \sin y\,\vec{i} + \sin z\,\vec{j} + \sin x\,\vec{k}$

```
vf:=[sin(y), sin(z), sin(x)]:    [sin(y), sin(z), sin(x)]

with(linalg):

curl(vf, [x, y, z]);              [-cos(z), -cos(x), -cos(y)]
```

$$rot\,\vec{F} = -\cos z\,\vec{i} - \cos x\,\vec{j} - \cos y\,\vec{k}$$

Lösung 3: $\vec{F} = x\,y\,\vec{i} + y\,z\,\vec{j} + x\,z\,\vec{k}$

```
vf:=[x*y, y*z, x*z]:                [x*y, y*z, x*z]

with(linalg):

curl(vf, [x, y, z]);                [-y, -z, -x]

convert(%, matrix);
```

$$\begin{pmatrix} -y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = -y\,\vec{i} - z\,\vec{j} - x\,\vec{k}$$

Der Laplace-Operator

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ist ein formales Skalarprodukt des Nabla-Operators mit sich selbst.

$$div\,(grad\;\phi) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta$$

Wenden Sie den Laplace-Operator auf folgende Skalarfelder

Aufgabe 4: $\phi = x\, y\, z$

Aufgabe 5: $\phi = x^2 + y^2 + z^2$

Aufgabe 6: $\phi = 2\,x^2 + 5\,y^2 + 3\,z^2$

Aufgabe 7: $\phi = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Lösung 4: $\phi = x\,y\,z$

```
sf:=x*y*z;                              x y z
with(linalg):
g1:=grad(sf, [x,y,z]);                  [yz, xz, xy]
diverge(g1, [x,y,z]);                   0
```

$\Delta\,\phi = 0$ – harmonische Funktion

Lösung 5: $\phi = x^2 + y^2 + z^2$

```
sf:=x² + y² + z²;                       x² + y² + z²
with(linalg):
g1:=grad(sf, [x,y,z]);                  [2x, 2y, 2z]
diverge(g1, [x,y,z]);                   6
```

$\Delta\,\phi = 6$

Lösung 6: $\phi = 2\,x^2 + 5\,y^2 + 3\,z^2$

```
sf:=x² + y² + z²;                    2x² + 5y² + 3z²
with(linalg):
g1:=grad(sf, [x,y,z]);               [2x, 10y, 6z]
diverge(g1, [x,y,z]);                20
```

$$\Delta\,\phi = 20$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

```
sf:=1/(x² + y² + z²)½;
```

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

```
with(linalg):

g1:=grad(sf, [x,y,z]):

diverge(g1, [x,y,z]);
```

$$\frac{3\,x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3\,y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{3\,z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

```
normal(%);
```

$$0$$

$\Delta\,\phi = 0$ – harmonische Funktion