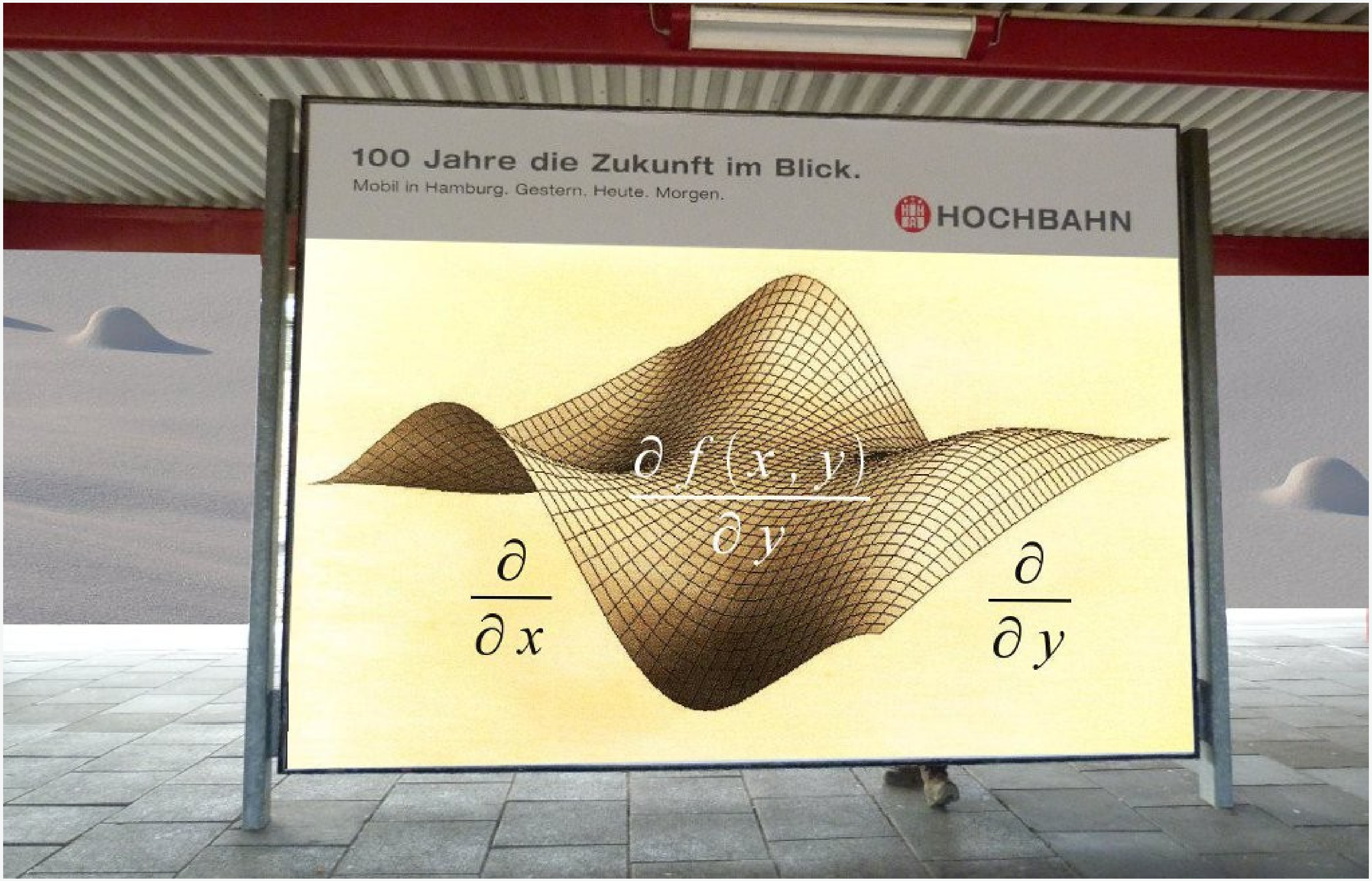
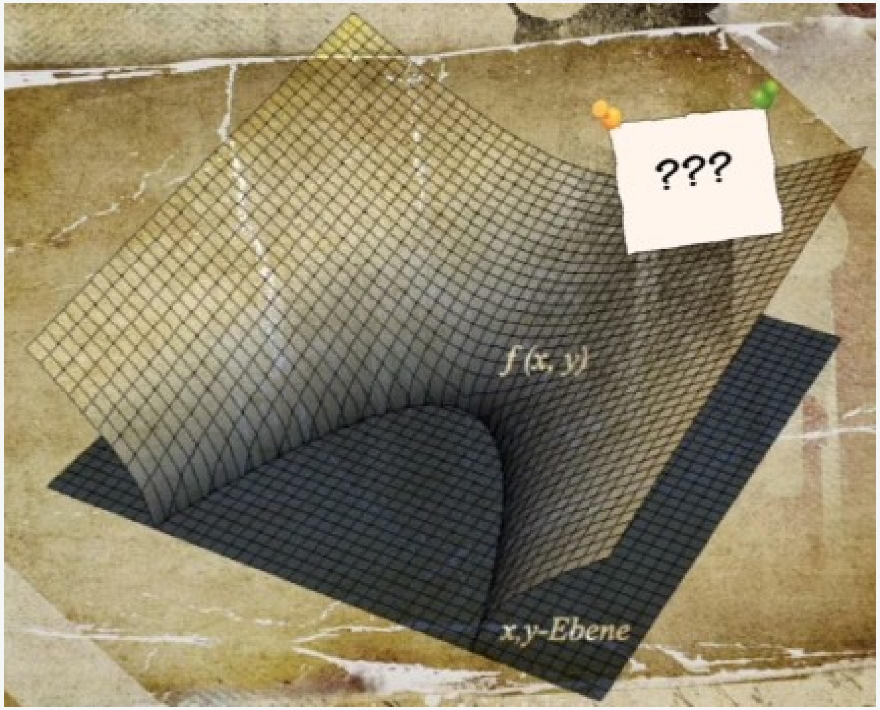


Funktionen mehrerer Variablen

Partielle Ableitungen

Die Grundfragen



Um Differentialrechnung im Mehrdimensionalen zu formulieren, müssen wir folgende Fragen beantworten:

- Wie wird die Konstruktion der Ableitung verallgemeinert?
- Wie sieht im Mehrdimensionalen die Differenzierbarkeit aus?

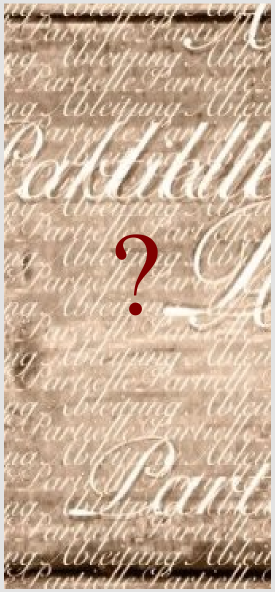
Uhrmacher

http://www.farfo.com/images/watchmaker.jpg

!!!

Wir können im Prinzip auf alle Techniken und Konzepte des Eindimensionalen zurückgreifen.

Der Ableitungsbegriff im Eindimensionalen: Zusammenfassung



Wofür braucht man Ableitungen?

- Um Funktionsverhalten zu untersuchen, um zu wissen, wie sich die Funktionswerte bei Änderungen der Argumente verhalten.

- Die Änderung der Funktion bei Änderung eines Arguments verbinden wir mit der Tangentensteigung im entsprechenden Kurvenpunkt.

Im Folgenden fassen wir das Wichtigste der Differentialrechnung im Eindimensionalen zusammen.

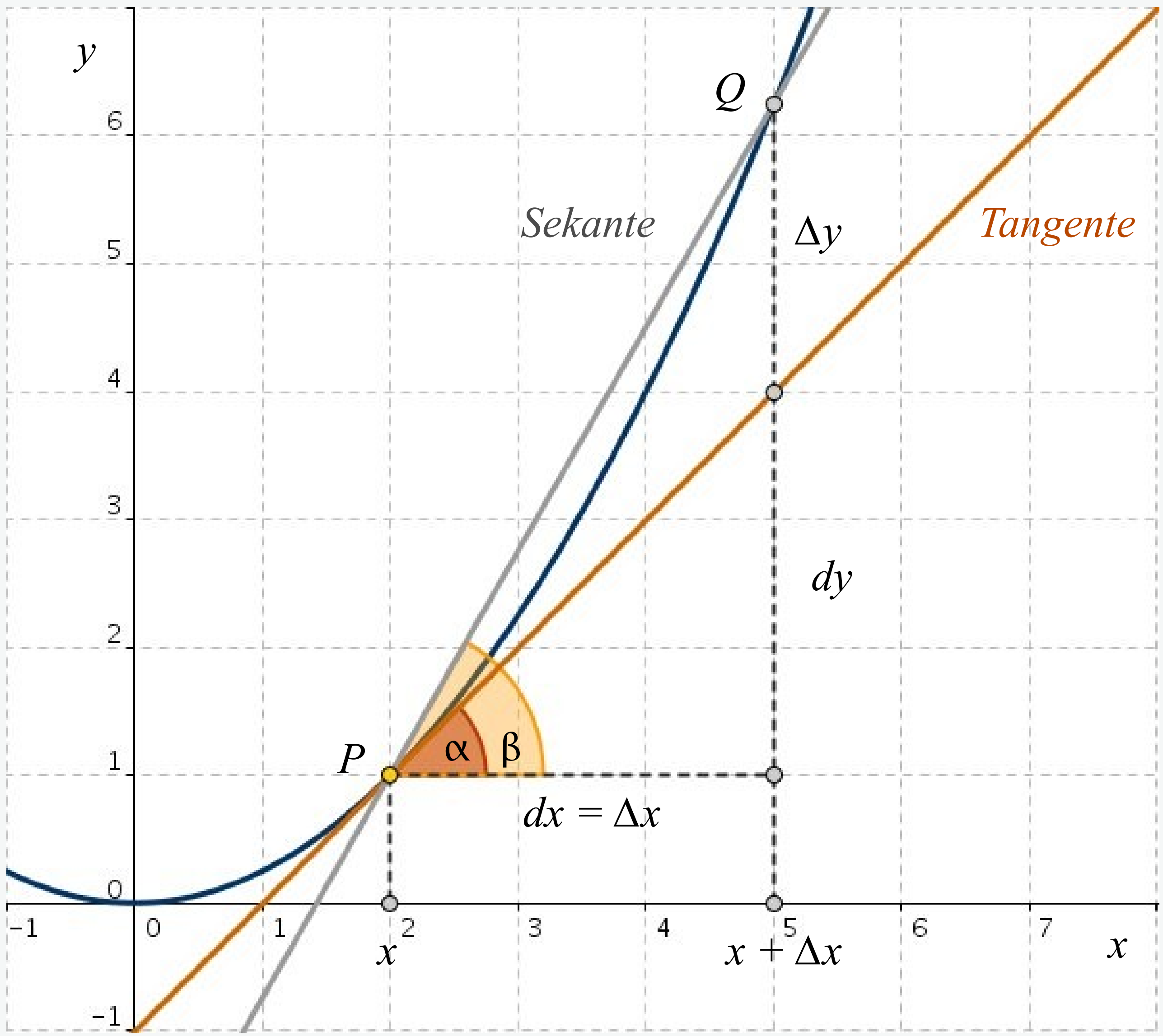


Abb. 1-1: Zum Begriff der Ableitung einer Funktion $f = f(x)$

Die Ableitung der Funktion einer Veränderlichen definiert man als Grenzwert der Sekantensteigung. Beim Grenzübergang geht die Sekante in die Tangente und die Sekantensteigung in die Tangentensteigung über.

- Die Steigung der Sekante:

$$m_s = \tan\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Die Steigung der Tangente:

$$m_t = \tan\alpha = \frac{dy}{dx}$$

- Der Grenzübergang entspricht:

$$Q \to P \quad : \Delta x \to 0\,, \qquad \beta \to \alpha\,, \qquad m_s \to m_t$$

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Differenzierbare Funktion $f = f(x)$: Zusammenfassung

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle x differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

vorhanden ist. Man bezeichnet ihn als die (erste) Ableitung von $y = f(x)$ an der Stelle x.

Die Differenzierbarkeit einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x bedeutet, dass die Funktionskurve an dieser Stelle eine eindeutig bestimmte Tangente mit endlicher Steigung besitzt.

Der Begriffes einer Steigung für $f = f(x,y)$

Wir stellen jetzt Fragen nach der Steigung einer Funktion von zwei Variablen

- Wie kann der Begriff einer Steigung erweitert werden?
- Wie wird die Steigung geometrisch darstellt?

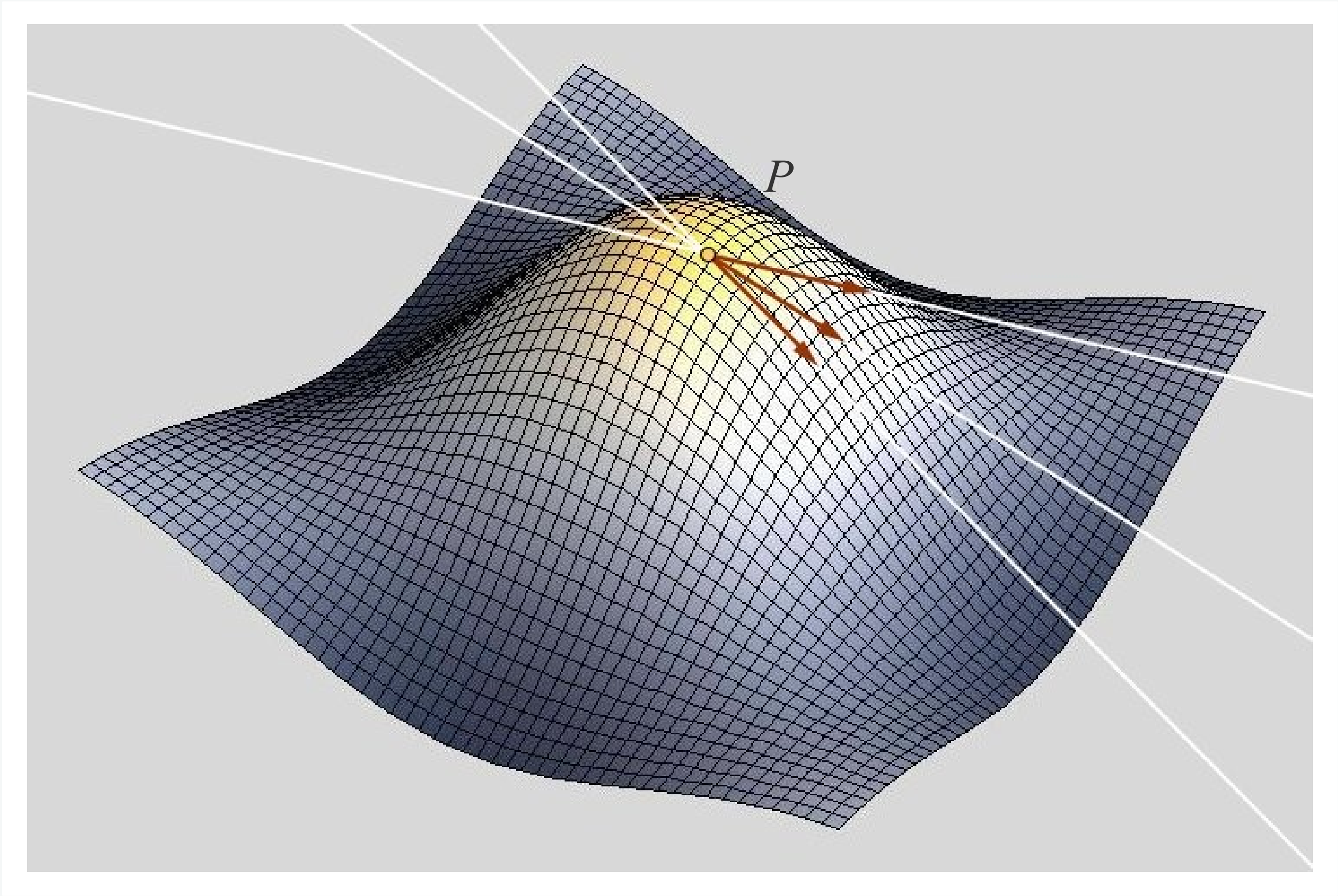


Abb. 2-1: Zum Begriff der Steigung einer Funktion $f = f(x, y)$

Bei Funktionen von zwei Variablen ist es nicht einfach, die Frage nach der Steigung zu beantworten. Man kann sich nicht nur in einer Richtung von einer gewissen Stelle, z.B. Punkt P auf der Funktionsfläche, entfernen, sondern kann in jede Richtung gehen.

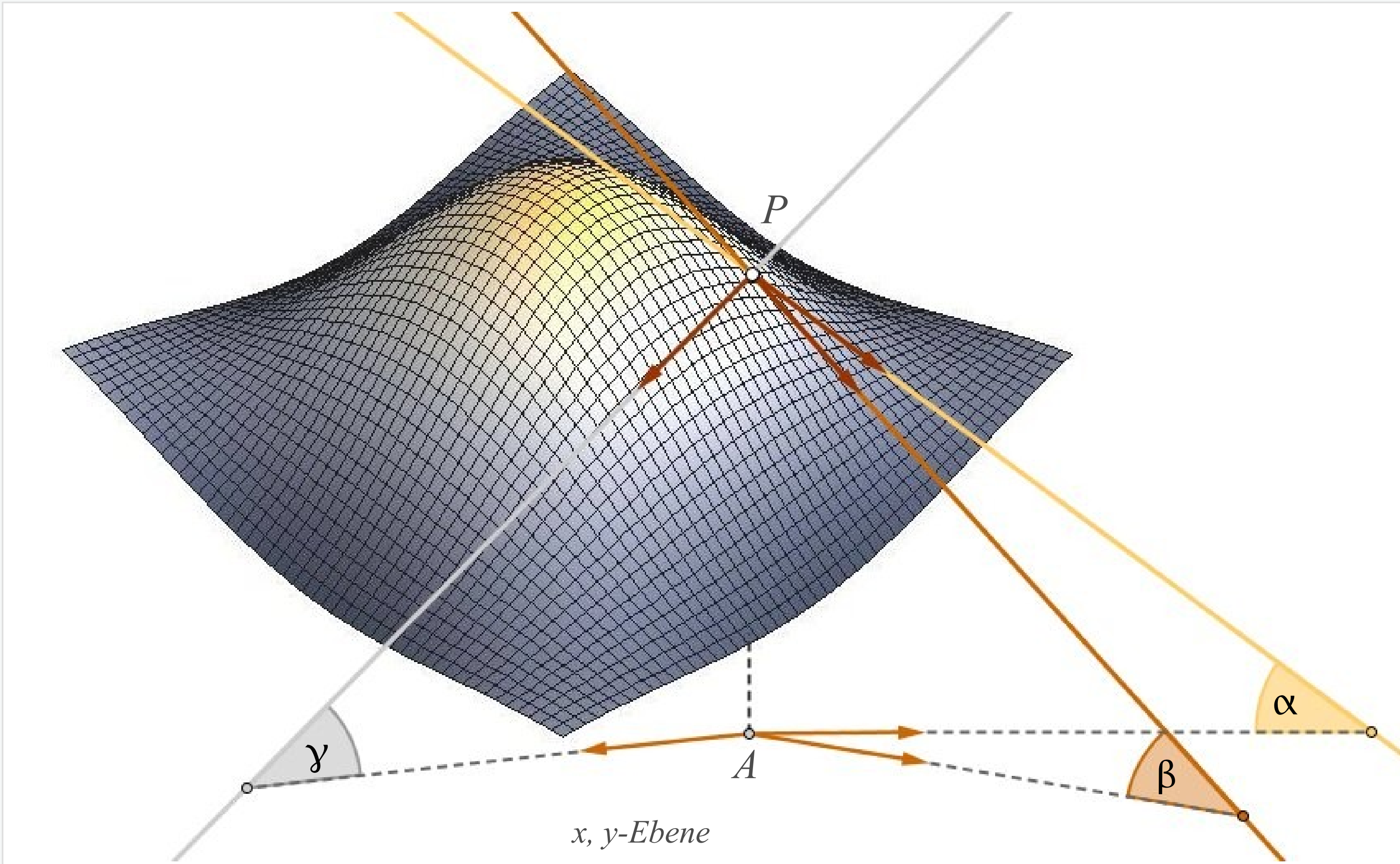


Abb. 2-2: Zum Begriff der Steigung einer Funktion $f = f(x, y)$

Es ergeben sich unterschiedliche Sekanten mit unterschiedlichen Grenzwerten der Steigung. Die Frage nach der Steigung einer Funktion von zwei Variablen ist falsch gestellt. Die korrekte Fragestellung lautet: Wie groß ist die Steigung an einer bestimmten Stelle, wenn man sich in eine bestimmte Richtung in der (x, y)-Ebene bewegt.

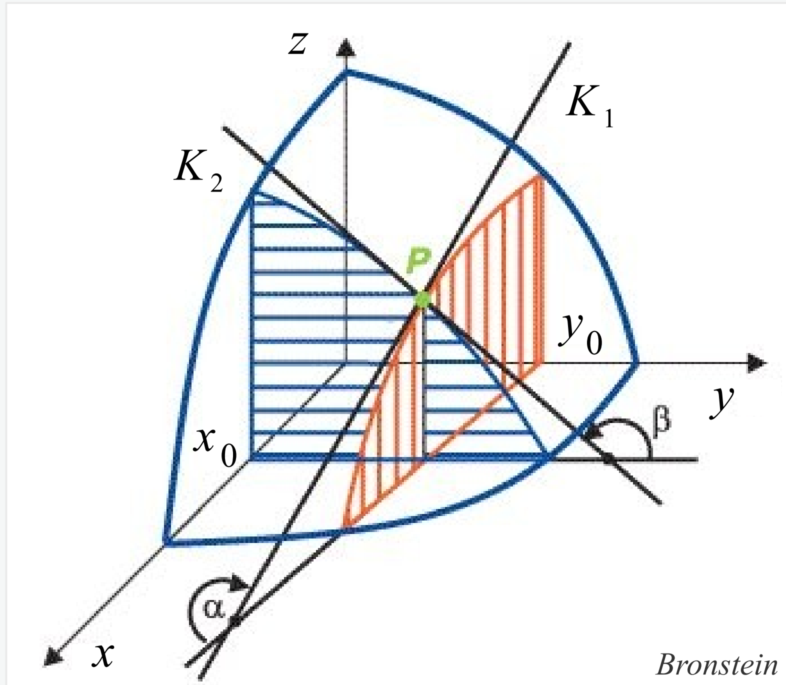


Abb. 2-3: Zum Begriff der Steigung einer Funktion $f = f(x, y)$

Wir stellen die Frage nach der Steigung in Richtungen der Koordinatenachsen.

Durch den Flächenpunkt P werden zwei Schnittebenen gelegt, die parallel zur x, z- bzw. y, z-Koordinatenebene verlaufen. Als Schnittlinien erhalten wir zwei Flächenkurven K_1 und K_2.

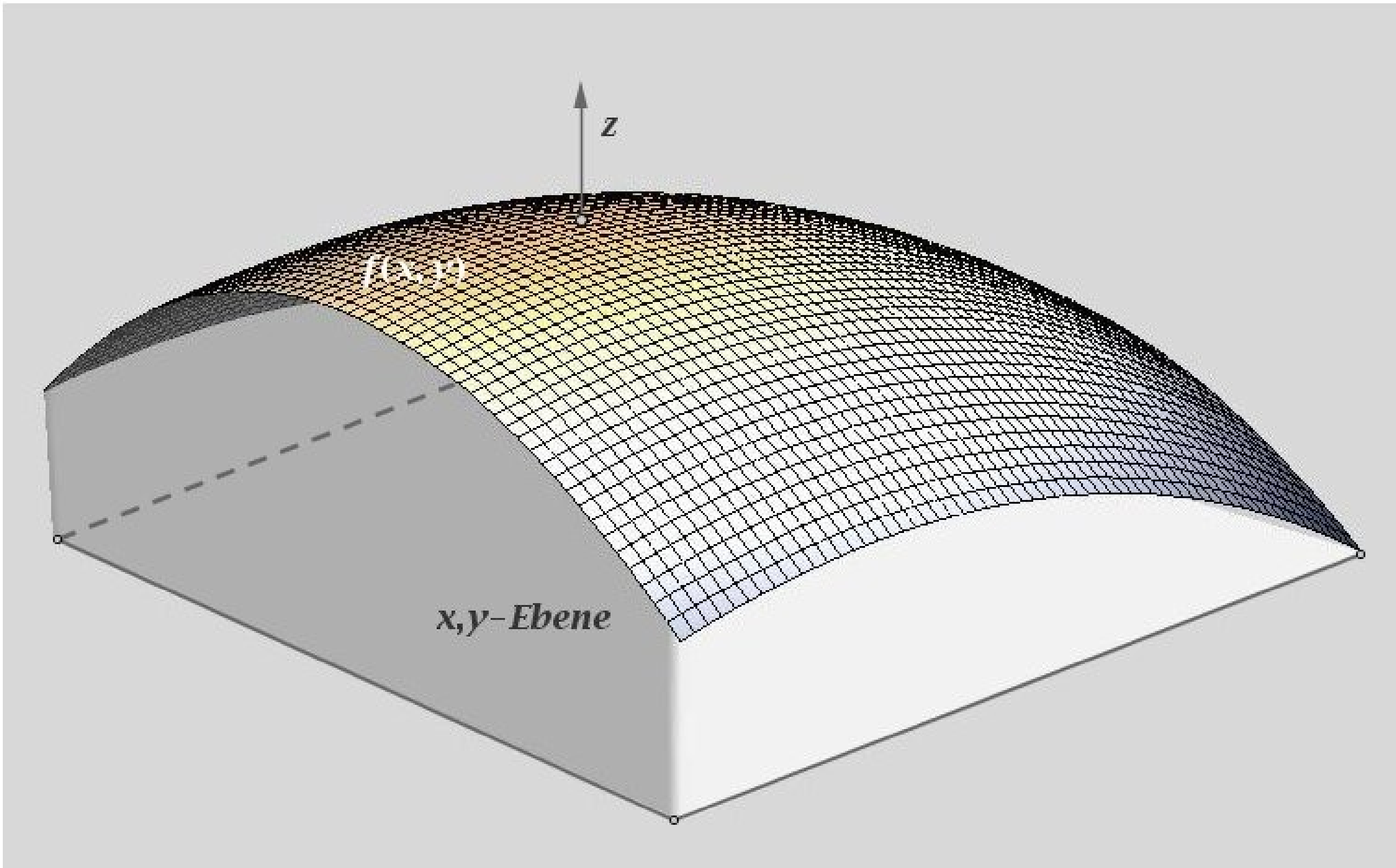


Abb. 3-1: Zum Begriff der Steigung einer Funktion $f = f(x, y)$. In der Abbildung ist eine über dem Definitionsbereich liegende Fläche dargestellt

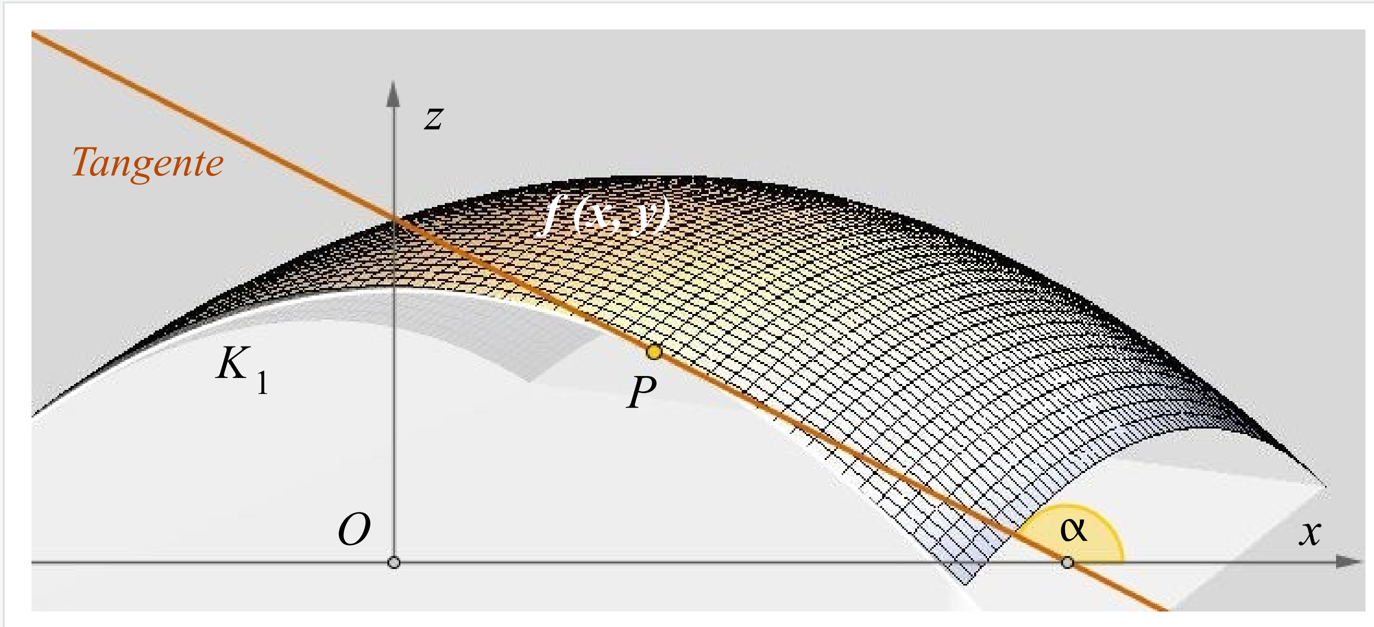


Abb. 3-2: Zum Begriff der Steigung einer Funktion $f = f(x, y)$

In Abbildung 4-2 zeigen wir die Funktion $f(x, y)$, z,x-Ebene, die Schnittkurve der Funktion $f(x, y)$ mit der z,x-Ebene und die Tangente der Schnittkurve im Punkt P.

Im Folgenden beschreiben wir die Steigung der Schnittkurve im Punkt P.

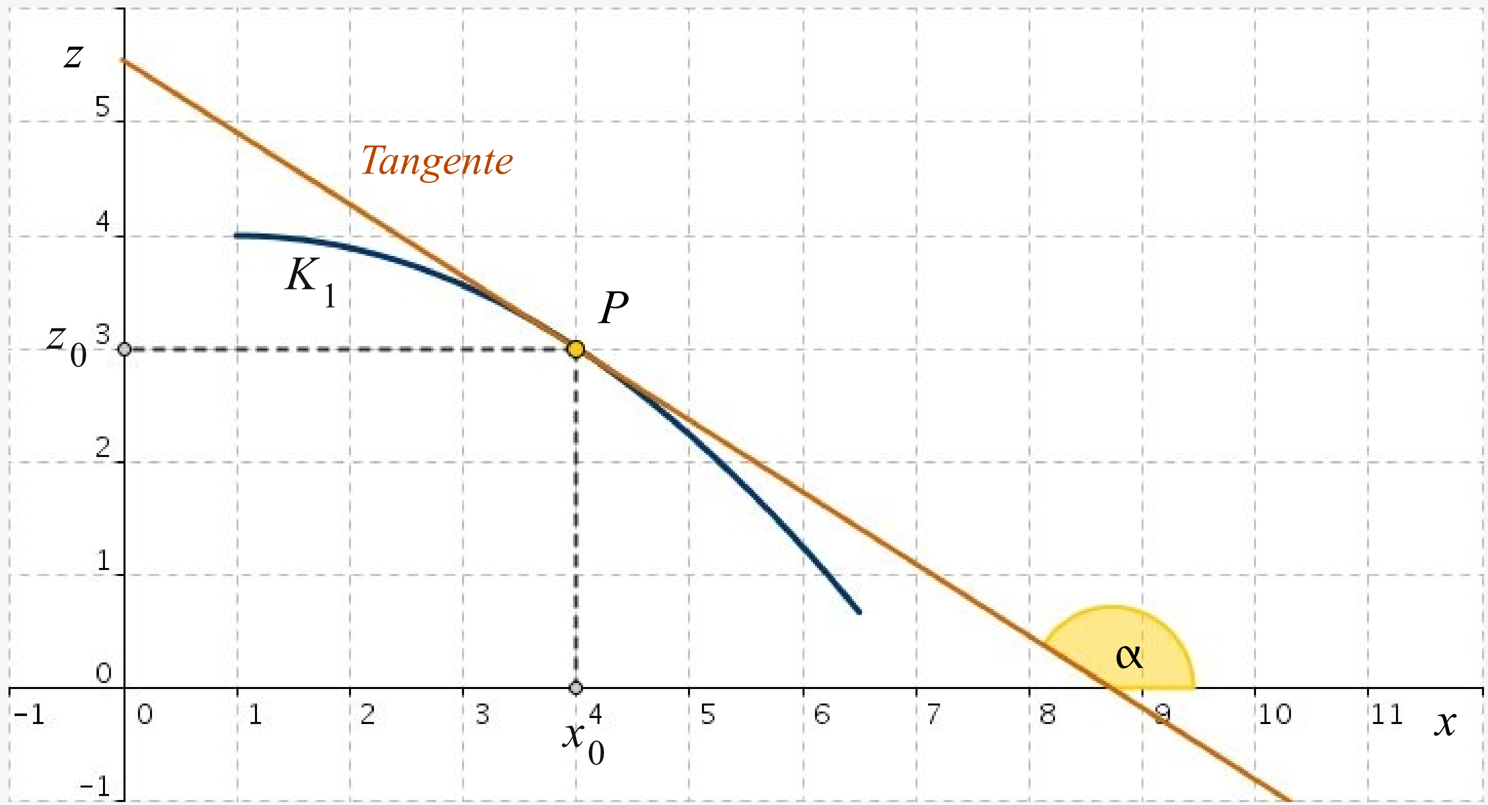


Abb. 3-3: Die Steigung im Punkt P der x,z-Ebene der Funktion f = f (x, y)

Die Funktionsgleichung der Flächenkurve ist: $z = f(x, y_0)$

Die Steigung der Kurventangente in P ist:

$$m_x = \tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta x}$$

bekommt einen neuen Namen und wird als partielle Ableitung 1. Ordnung von $z = f(x, y)$ nach x an der Stelle $(x_0,\ y_0)$ bezeichnet und durch das Symbol

$$f_x(x_0,\ y_0) \qquad \textit{oder} \qquad z_x(x_0,\ y_0)$$

gekennzeichnet.

Geometrische Deutung:

Anstieg der Flächentangente im Flächenpunkt P in x-Richtung

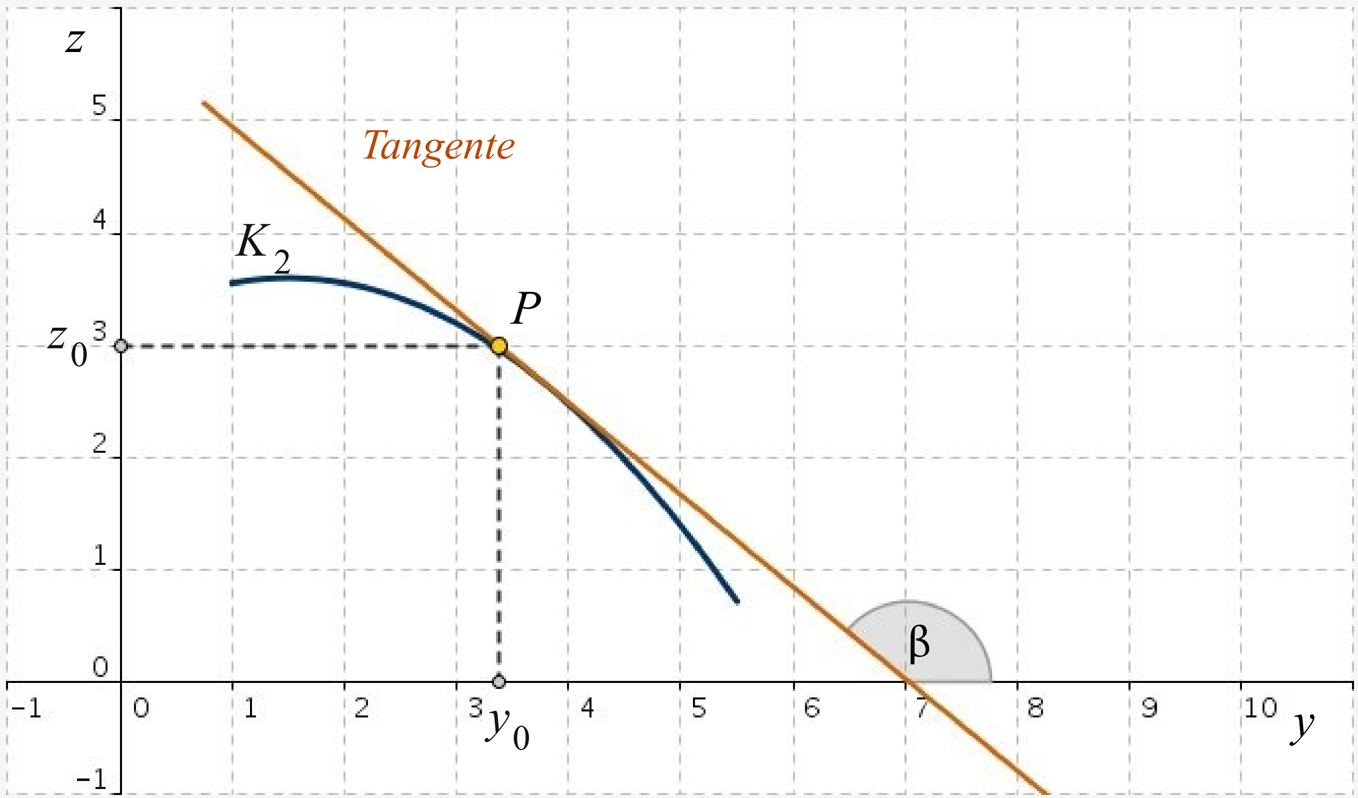


Abb. 3-4: Die Steigung im Punkt P der y,z-Ebene der Funktion f = f (x, y)

Die Funktionsgleichung der Flächenkurve ist: $z = f\left(x_0,\ y\right)$

Die Steigung der Kurventangente in P ist:

$$m_y = \tan\beta = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x_0,\ y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0,\ y_0\right)}{\Delta y}$$

Der Grenzwert

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

wird als partielle Ableitung 1. Ordnung von $z = f(x, y)$ nach y an der Stelle (x_0, y_0) bezeichnet und durch das Symbol

$$f_y(x_0, y_0) \qquad oder \qquad z_y(x_0, y_0)$$

gekennzeichnet.

Geometrische Deutung:

Anstieg der Flächentangente im Flächenpunkt P in y-Richtung

Definition:

Unter den partiellen Ableitungen 1. Ordnung einer Funktion $z = f(x, y)$ an der Stelle (x, y) werden die folgenden Grenzwerte verstanden:

Partielle Ableitung 1. Ordnung nach x:

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Partielle Ableitung 1. Ordnung nach y:

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

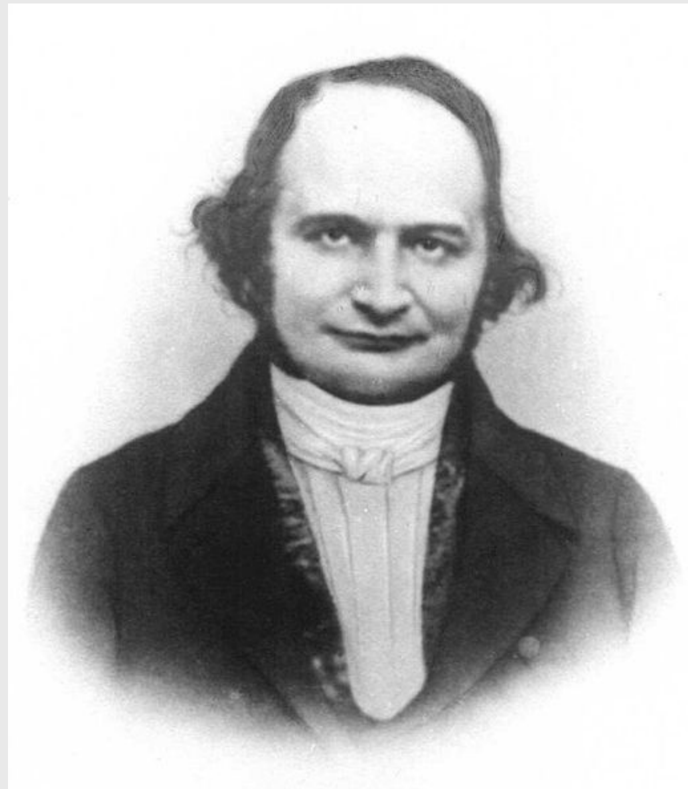
Partielle Ableitungen werden im Gegensatz zu den gewöhnlichen Ableitungen nicht durch Striche (oder Punkte), sondern durch die als Index angehängte Differentiationsvariable gekennzeichnet

$$f_x(x, y), \qquad f_x$$

$$f_y(x, y), \qquad f_y$$

Die Schreibweise durch die "runde" ∂ wurde von Jacobi eingeführt. Die Verwendung der "runden" ∂ kennzeichnet, dass die Funktion von mehr als einer Veränderlichen abhängt.

$$f_x(x, y) \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \qquad f_y(x, y) \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$



Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851)

Carl Gustav Jacob Jacobi war ein deutscher Mathematiker. Man zählt Jacobi zu den produktivsten und vielseitigsten Mathematikern der Geschichte.

Von einer Funktion $y = f\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$ von n unabhängigen Variablen können n partielle Ableitungen 1. Ordnung gebildet werden:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f\,(x_1, x_2, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f\,(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\Delta x_k}$$

Nur eine der n Veränderliche wird variiert, die anderen $n - 1$ werden als Konstante betrachtet.

Die Berechnung der partiellen Ableitungen erfolgt nach den Regeln, die für die Differentiation von Funktionen von einer Veränderlichen bekannt sind.

Wir bestimmen die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion *f (x, y)*

$$f(x, y) = x^2 y^3 + x - \cos y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y^3 + x - \cos y) = 2xy^3 + 1$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y^3 + x - \cos y) = 3x^2 y^2 + \sin y$$

Wir bestimmen die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $f(x, y, z)$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 y}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2 y}{z} = \frac{2 x y}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x^2 y}{z} = \frac{x^2}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{x^2 y}{z} = -\frac{x^2 y}{z^2}$$

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung folgender Funktionen

$a)\quad f(x, y) = x^2 \cdot y^3 + x + y^2$

$b)\quad f(x, y) = x^3 y + y^2 \ln x$

$c)\quad f(x, y) = \sqrt{x}\, y + \ln(x y^2)$

$$a)\quad f(x, y) = x^2 \cdot y^3 + x + y^2$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \cdot y^3 + x + y^2\right) = 2\,x \cdot y^3 + 1$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 \cdot y^3 + x + y^2\right) = 3\,x^2 \cdot y^2 + 2\,y$$

$$b)\quad f(x, y) = x^3\,y + y^2 \ln x$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 \cdot y + y^2 \ln x\right) = 3\,x^2 \cdot y + \frac{y^2}{x}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 \cdot y + y^2 \ln x\right) = x^3 + 2\,y \ln x$$

$$f(x, y) = \sqrt{x}\, y + \ln(x\, y^2) = \sqrt{x}\, y + \ln x + 2 \ln y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{x}\, y + \ln x + 2 \ln y\right] = \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{x}\, y + \ln x + 2 \ln y\right] = \sqrt{x} + \frac{2}{y}$$