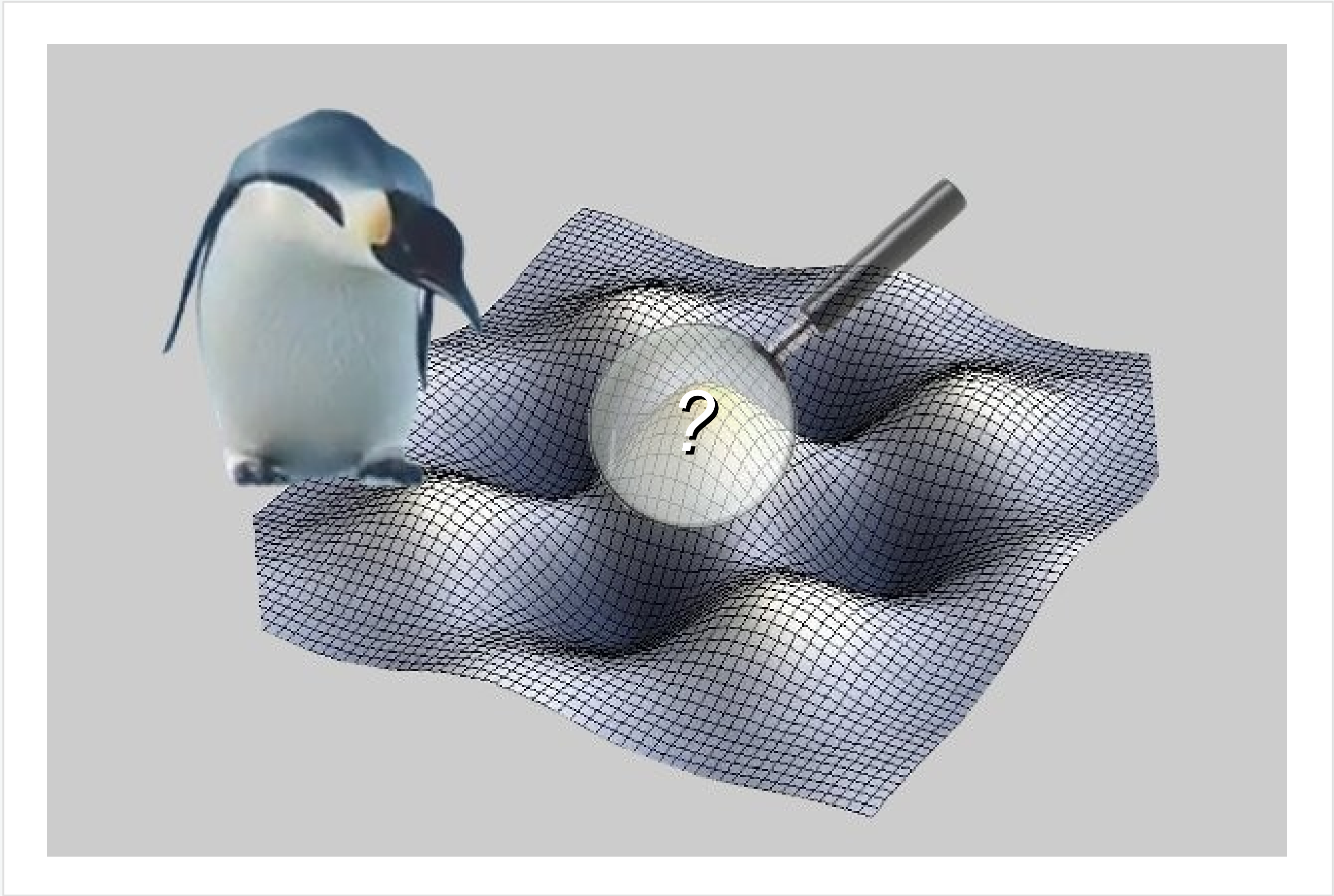
http://www.dailymotion.com/video/x20rcp_wendy-tilby-stringscordes_shortfilms

Fehler der linearen Näherung: Aufgaben



http://www.youtube.com/watch?v=27WvP_0M1oI

Wie genau ist die lineare Approximation?

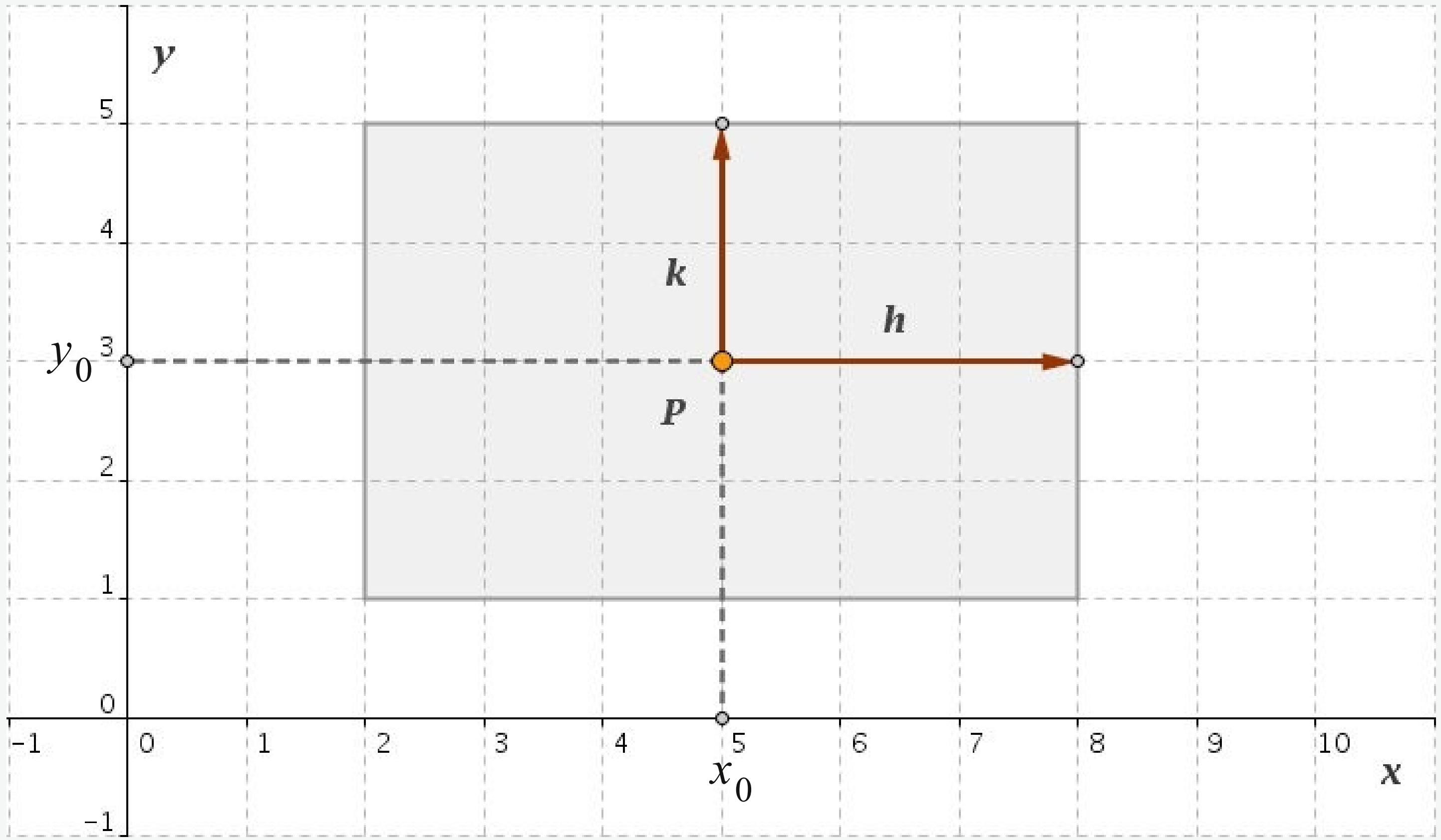


Abb. 1: Graphische Darstellung der Abweichung der Approximation L (x, y) im Punkt P

Wir bestimmen die Abweichungen der Approximation $L(x, y)$ von der Funktion $f(x, y)$ in einem viereckigen Bereich R mit dem Zentrum im Punkt P

$$|x - x_0| \leqslant h, \qquad |y - y_0| \leqslant k, \qquad P = (x_0, y_0)$$

Der Fehler der linearen Näherung von $f(x, y)$ in der Umgebung des Punktes P

1. $f(x, y)$ hat stetige partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung in einem viereckigen Bereich R mit dem Zentrum im Punkt P

2. M ist eine obere Grenze der Absolutwerten der partiellen Ableitungen 2. Ordnung

   $$M \geqslant |f_{xx}|, \quad |f_{yy}|, \quad |f_{xy}|$$

3. $E(x, y)$ ist der Fehler, der entsteht, wenn wir $f(x, y)$ durch ihre lineare Approximation in R ersetzen. $E(x, y)$ wird durch die folgende Ungleichung bestimmt

$$\boxed{|E(x, y)| \leqslant \frac{1}{2} M \left(|x - x_0| + |y - y_0|\right)^2}$$

Der Fehler der linearen Näherung: Beispiel

Für die Funktion $f(x, y)$

$$f(x, y) = x^2 - x\,y + \frac{1}{2}\,y^2 + 3$$

haben wir die Linearisierung im Punkt $P = (3, 2)$ bestimmt:

$$L(x, y) = 4x - y - 2$$

Jetzt bestimmen wir die obere Grenze des Approximationsfehlers $f(x, y) \approx L(x, y)$ im Bereich R

$$R: \quad |x - 3| \leqslant 0.1, \qquad |y - 2| \leqslant 0.1$$

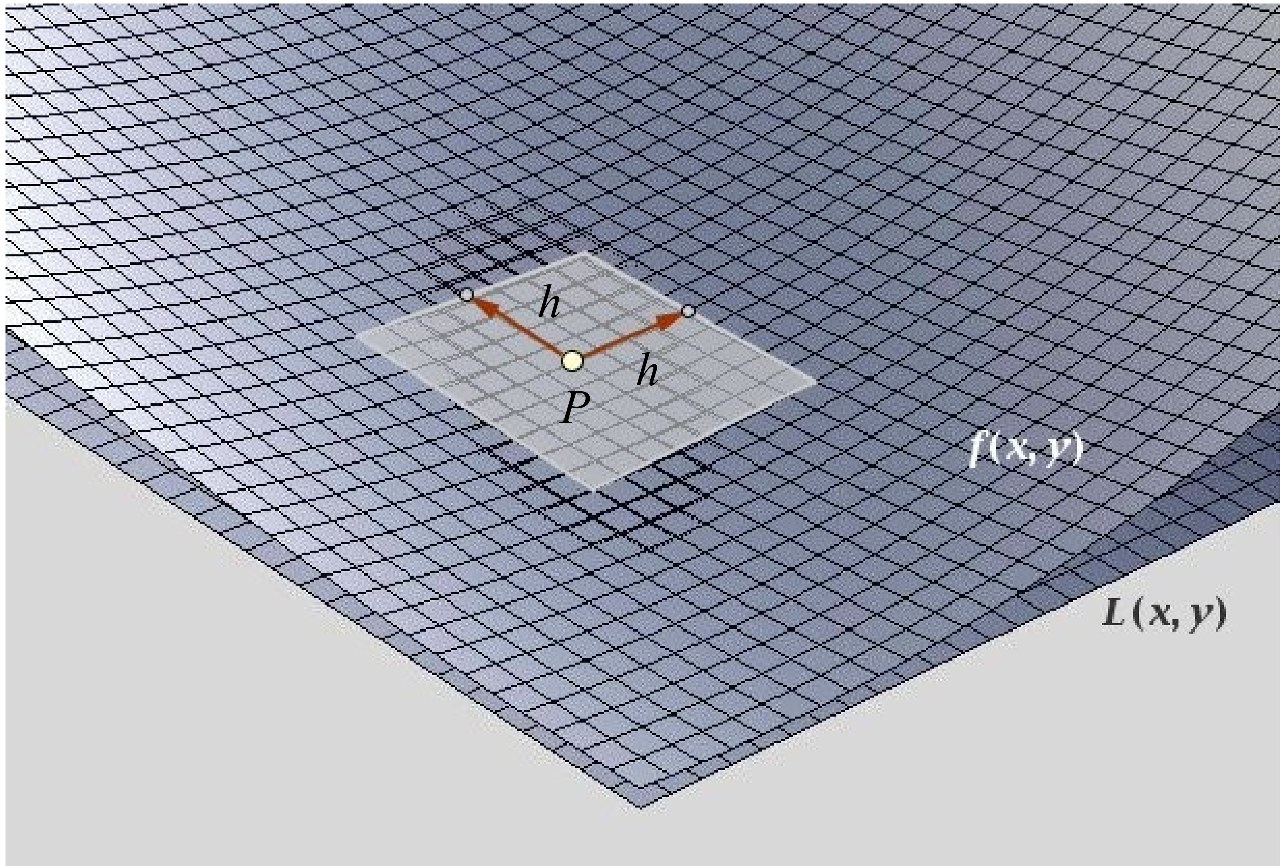


Abb. 2: Graphische Darstellung des Abweichungsbereiches auf der Fläche der Funktion $z = f(x, y)$ im Punkt P

Der Fehler der linearen Approximation wird durch die folgende Ungleichung bestimmt:

$$|E(x, y)| \leqslant \frac{1}{2} M \left(|x - x_0| + |y - y_0| \right)^2, \quad x_0 = 3, \quad y_0 = 2$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} (2x - y)_{3,\,2} = 2$$

$$f_{yy}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} (-x + y)_{3,\,2} = 1$$

$$f_{xy}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} (2x - y)_{3,\,2} = -1$$

$$|f_{xx}| = 2, \quad |f_{yy}| = 1, \quad |f_{xy}| = 1$$

$$|f_{xx}| \geqslant |f_{yy}| = |f_{xy}| \quad \Rightarrow \quad M = 2$$

$$|E(x, y)| \leqslant \frac{1}{2} (2) (0.1 + 0.1)^2 = 0.04$$

$$\frac{|E(x, y)|}{f(3, 2)} = \frac{0.04}{8} = 0.005$$

Für eine Funktion von drei Variablen $f = f(x, y, z)$ bestimmt man die

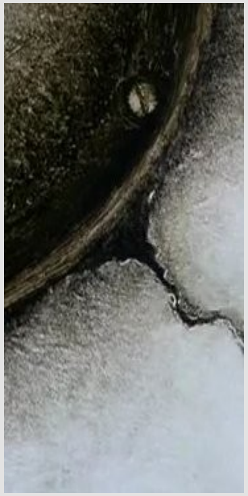
Lineare Näherung:

$$L(x, y, z) = f(P) + f_x(P)(x - x_0) + \\ + f_y(P)(y - y_0) + f_z(P)(z - z_0)$$

Fehler der linearen Näherung:

$$|E(x, y, z)| \leqslant \frac{1}{2} M \left(|x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0|\right)^2$$

im Punkt P: $\quad P = (x_0, y_0, z_0)$



Linearisieren Sie die Funktion $f(x, y, z)$ im Punkt P und bestimmen Sie die obere Grenze des Approximationsfehlers $|E(x, y, z)|$ der Linearisierung $f(x, y, z) \approx L(x, y, z)$ im Bereich R

$$|E(x, y, z)| = ?$$

Aufgabe 1:

$$f(x, y, z) = xz - 3yz + 2, \qquad P = P(1, 1, 2)$$

$$R: \quad |x - 1| \leqslant 0.01, \quad |y - 1| \leqslant 0.01, \quad |z - 2| \leqslant 0.02$$

Aufgabe 2:

$$f(x, y, z) = xy + 2yz - 3xz, \qquad P = P(1, 1, 0)$$

$$R: \quad |x - 1| \leqslant 0.01, \quad |y - 1| \leqslant 0.01, \quad |z| \leqslant 0.01$$

Wir bestimmen zuerst die lineare Näherung der Funktion $f = f(x, y, z)$:

$$f(x, y, z) = xz - 3yz + 2, \qquad P = P(1, 1, 2)$$

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 2$$

$$f(P) = x_0 z_0 - 3 y_0 z_0 + 2 = -2$$

$$f_x = z, \qquad f_y = -3z, \qquad f_z = x - 3y$$

$$f_x(P) = 2, \qquad f_y(P) = -6, \qquad f_z(P) = -2$$

$$L(x, y, z) = -2 + 2(x - 1) - 6(y - 1) - 2(z - 2) =$$

$$= 2x - 6y - 2z + 6$$

Jetzt bestimmen wir den Fehler der lineare Näherung der Funktion $f = f(x, y, z)$:

$$f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = f_{xy} = 0, \qquad f_{xz} = 1, \qquad f_{yz} = -3$$

$$|f_{xz}| = 1, \qquad |f_{yz}| = 3 \qquad \Rightarrow \qquad M = 3$$

$$R: \quad |x - 1| \leqslant 0.01, \quad |y - 1| \leqslant 0.01, \quad |z - 2| \leqslant 0.02$$

$$|E(x, y, z)| \leqslant \frac{1}{2} M \left(|x - 1| + |y - 1| + |z - 2| \right)^2 =$$

$$= \frac{3}{2} \left(0.01 + 0.01 + 0.02 \right)^2 = 24 \cdot 10^{-4}$$

$$|E| \leqslant 24 \cdot 10^{-4} = 0.0024$$

$$\left| \frac{E(x, y, z)}{f(1, 1, 2)} \right| = \frac{24}{2} \times 10^{-4} = 12 \cdot 10^{-4} = 0.0012$$

Der Fehler der linearen Näherung: Lösung 2

$$f(x, y, z) = x y + 2 y z - 3 x z, \qquad P = P(1, 1, 0)$$

$$x_0 = 1, \qquad y_0 = 1, \qquad z_0 = 0$$

$$f(P) = x_0 y_0 + 2 y_0 z_0 - 3 x_0 z_0 = 1$$

$$f_x = y - 3z, \qquad f_y = x + 2z, \qquad f_z = 2y - 3x$$

$$f_x(P) = 1, \qquad f_y(P) = 1, \qquad f_z(P) = -1$$

$$L(x, y, z) = 1 + (x - 1) + (y - 1) - (z - 0) =$$

$$= x + y - z - 1$$

Der Fehler der linearen Näherung: Lösung 2

$$f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 0\,, \qquad f_{xy} = 1\,, \quad f_{xz} = -3, \quad f_{yz} = 2$$

$$|f_{xy}| = 1, \quad |f_{xz}| = 3, \quad |f_{xz}| = 2 \qquad \Rightarrow \qquad M = 3$$

$$R: \quad |x - 1| \leqslant 0.01\,, \quad |y - 1| \leqslant 0.01\,, \quad |z| \leqslant 0.01$$

$$|E(x, y, z)| \leqslant \frac{1}{2} M \left(|x - 1| + |y - 1| + |z - 0|\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{2}\left(0.01 + 0.01 + 0.01\right)^2 = \frac{27}{2} \cdot 10^{-4} = 13.5 \cdot 10^{-4}$$

$$|E| \leqslant 13.5 \cdot 10^{-4} = 0.00135$$

$$\left|\frac{E(x, y, z)}{f(1, 1, 0)}\right| = \frac{27}{2} \times 10^{-4} = 13.5 \cdot 10^{-4} = 0.00135$$