http://www.dailymotion.com/video/x20rcp_wendy-tilby-stringscordes_shortfilms

Lineare Approximation

Definition:

Die lineare Näherung einer im Punkt P differenzierbaren Funktion $f\,(x, y)$ ist eine Funktion

$$L\,(x\,,\,y) = f\,(x_0\,,\,y_0) +$$

$$+\; f_x(x_0\,,\;y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0\,,\;y_0)\,(y - y_0)$$

$$P = P\,(x_0\,,\;y_0)$$

Die Approximation

$$L\,(x\,,\;y) \simeq f\,(x\,,\;y)$$

wird als lineare Approximation bezeichnet.

Definition:

Die lineare Näherung einer im Punkt P differenzierbaren Funktion $f\,(x, y, z)$ ist eine Funktion

$$L\,(x\,,\,y\,,\,z) = f\,(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0) + f_x\,(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)\,(x - x_0) +$$

$$+ f_y\,(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)\,(y - y_0) + f_z\,(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)\,(z - z_0)$$

$$P = P\,(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$$

Die Approximation

$$L\,(x\,,\,y\,,\,z) \simeq f\,(x\,,\,y\,,\,z)$$

wird als lineare Approximation bezeichnet.

Diese lineare Approximation entspricht einer linearen Fläche im *4*-dimensionalen Raum, einer Hyperebene.

Lineare Approximation: Aufgaben 16, 17

Eine Linearisierung einer Funktion $z = f(x, y)$ in einem Punkt P ist die Approximierung der Funktionsfläche durch die zugehörige Tangentialebene.

Linearisieren Sie die Funktion $f(x, y)$ im Punkt P:

Aufgabe 16:

$$f(x, y) = x^2 - x\,y + \frac{1}{2}\,y^2 + 3, \qquad P = P(3, 2)$$

Aufgabe 17: $\quad f(x, y) = (x + 3y - 2)^2$

$a)\ P = P(2, -1), \qquad b)\ P = P(1, -2)$

Linearisieren Sie die Funktion $f(x, y, z)$ im Punkt P:

Aufgabe 18:

$$f(x, y, z) = xy + yz + xz$$

$a)\ P = (1, 1, 1), \quad b)\ P = (1, 0, 0), \quad c)\ P = (0, 0, 0)$

Aufgabe 19:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$a)\ P = (1, 1, 1), \quad b)\ P = (0, 1, 0), \quad c)\ P = (1, 0, 0)$

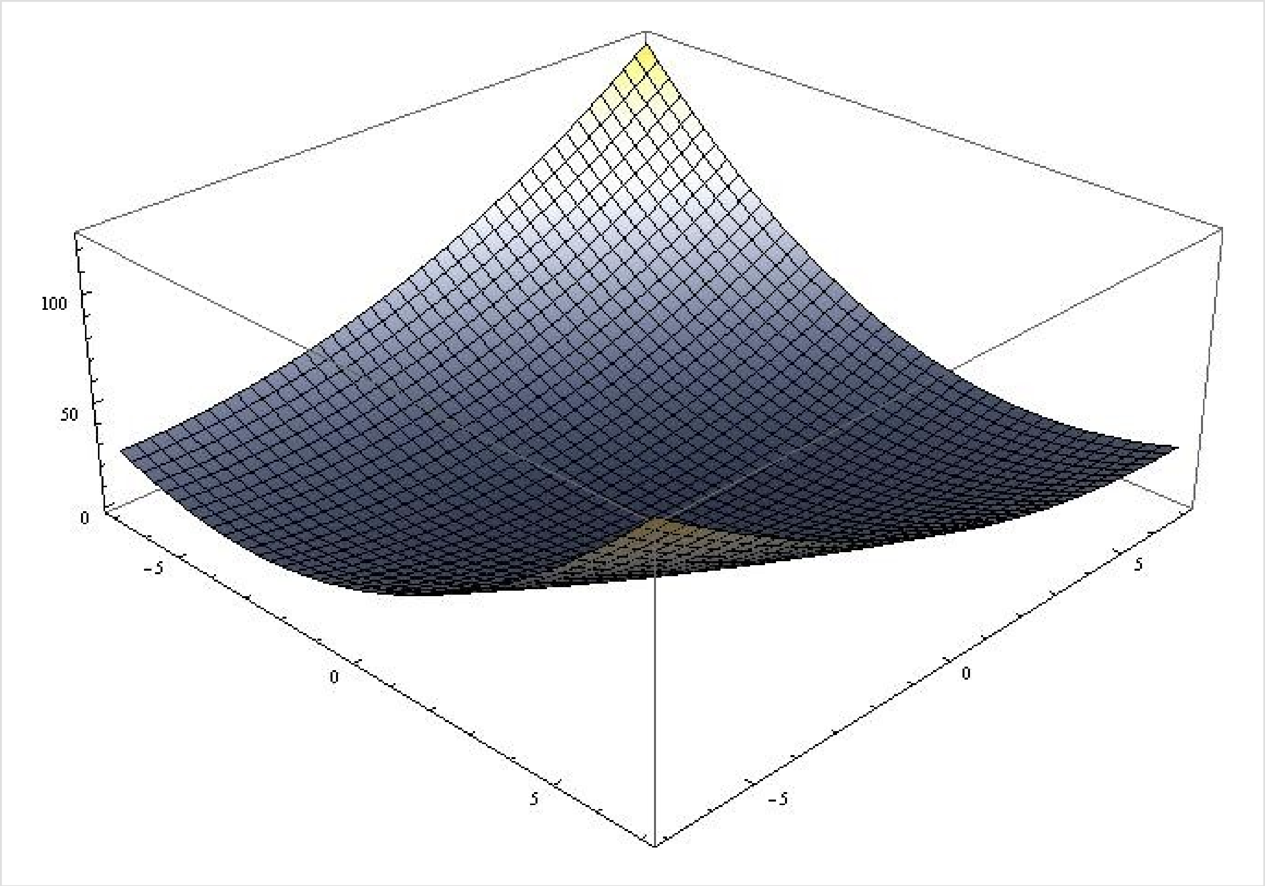

Abb. L16-1: Graphische Darstellung der Funktion z = f (x, y)

$$f(x, y) = x^2 - x\,y + \frac{1}{2}\,y^2 + 3$$

Lineare Approximation: Lösung 16

$$f(x, y) = x^2 - x\,y + \frac{1}{2}\,y^2 + 3, \qquad P = P(3, 2), \quad x_0 = 3, \quad y_0 = 2$$

$$f(x_0, y_0) = x_0^2 - x_0\,y_0 + \frac{1}{2}\,y_0^2 + 3 = 8$$

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - x\,y + \frac{1}{2}\,y^2 + 3\right)_{3,\,2} = \left(2x - y\right)_{3,\,2} = 4$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - x\,y + \frac{1}{2}\,y^2 + 3\right)_{3,\,2} = \left(-x + y\right)_{3,\,2} = -1$$

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0) =$$

$$= 8 + 4(x - 3) + (-1)(y - 2) = 4x - y - 2$$

Die Funktion $f(x, y)$ wird im Punkt $(3, 2)$ durch die Funktion $L(x, y)$ linearisiert :

$$L(x, y) = 4x - y - 2$$

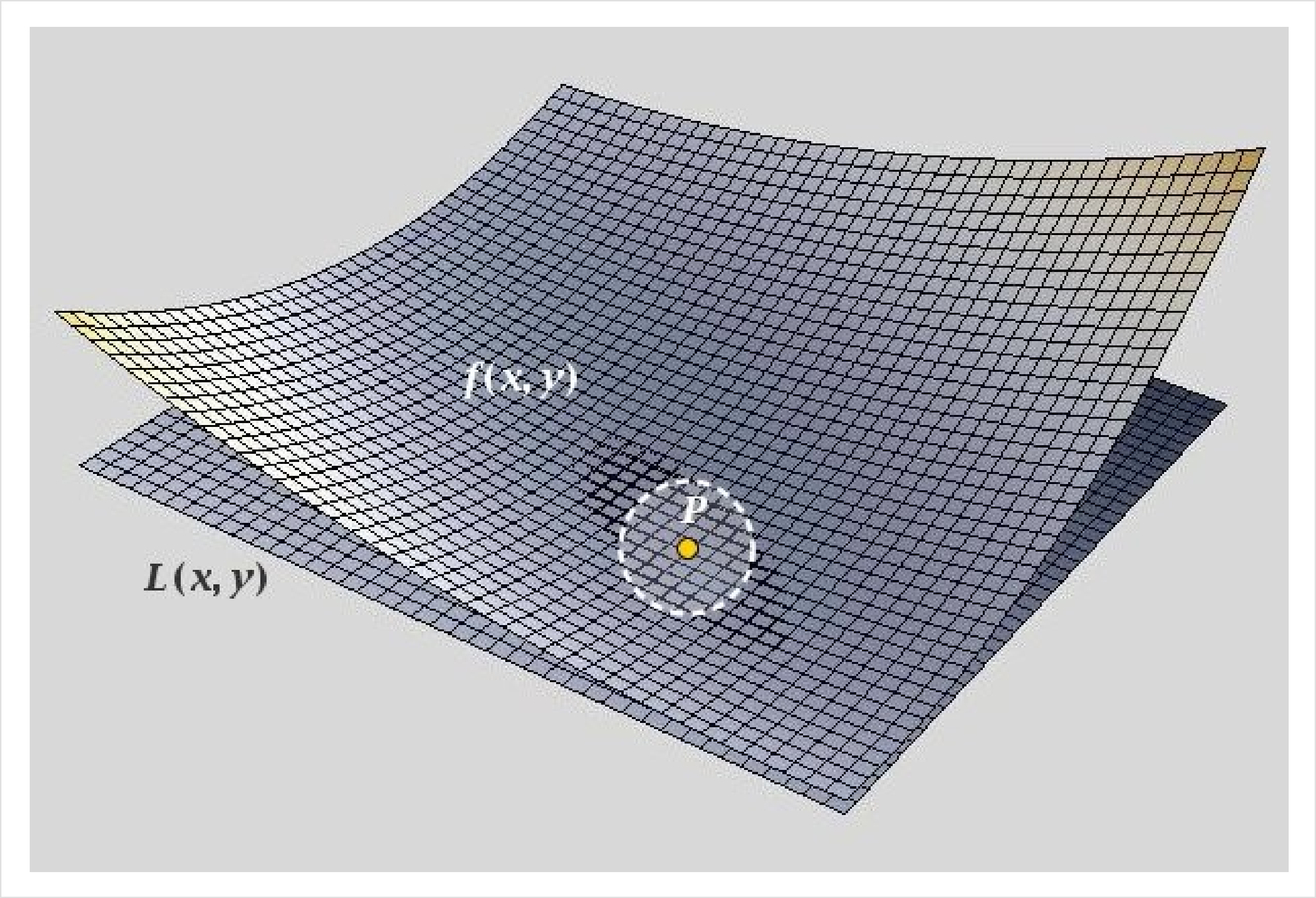

Abb. L16-2: Graphische Darstellung der Funktion z = f (x, y) und ihrer Linearisierung z = L (x, y) im Punkt P (3, 2, 8)

$$f(x, y) = x^2 - x\,y + \frac{1}{2}\,y^2 + 3, \qquad P = P(3, 2, 8)$$

$$L(x, y) = 4x - y - 2$$

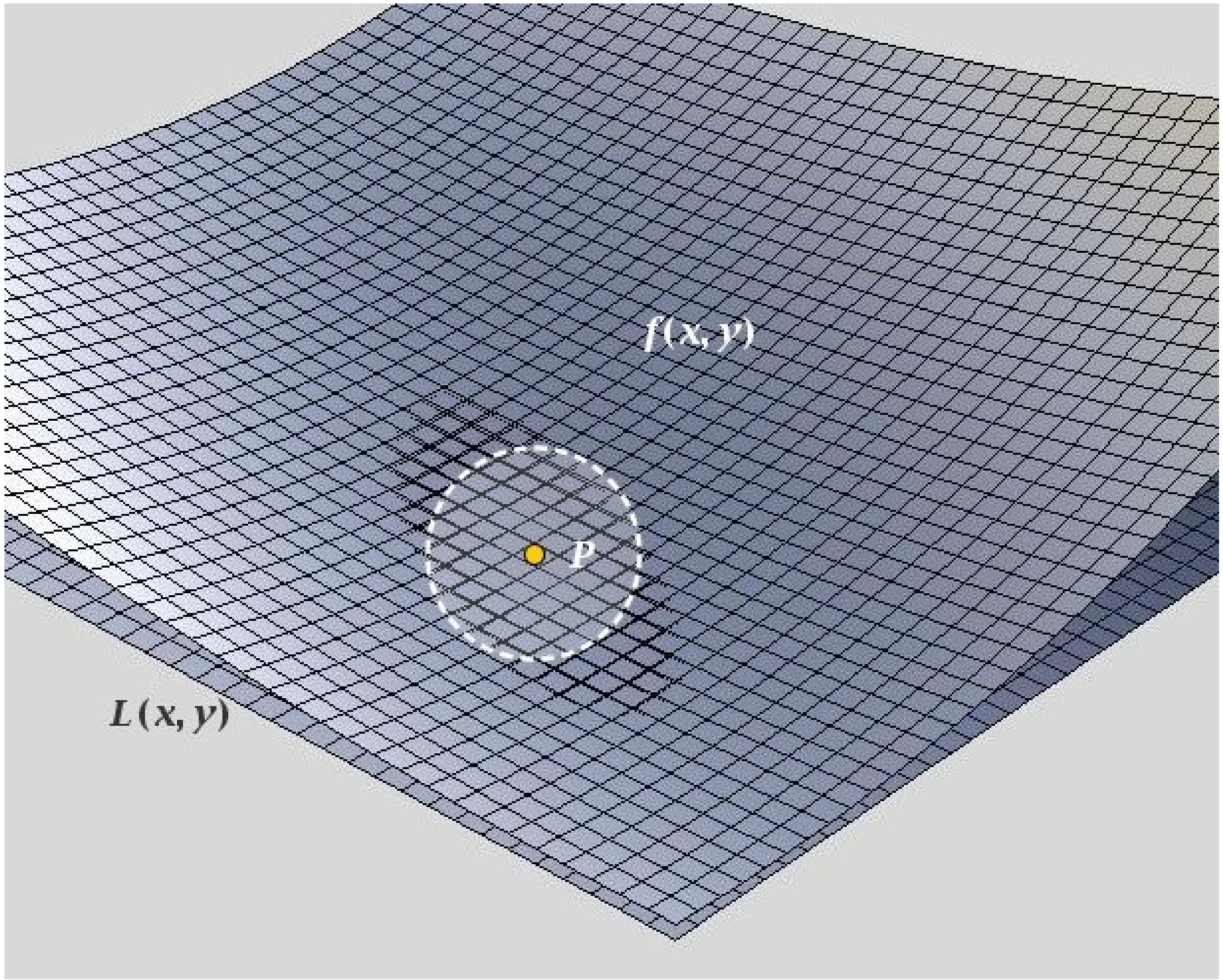

Abb. L16-3: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ und ihrer Linearisierung $z = L(x, y)$ im Punkt $P(3, 2, 8)$

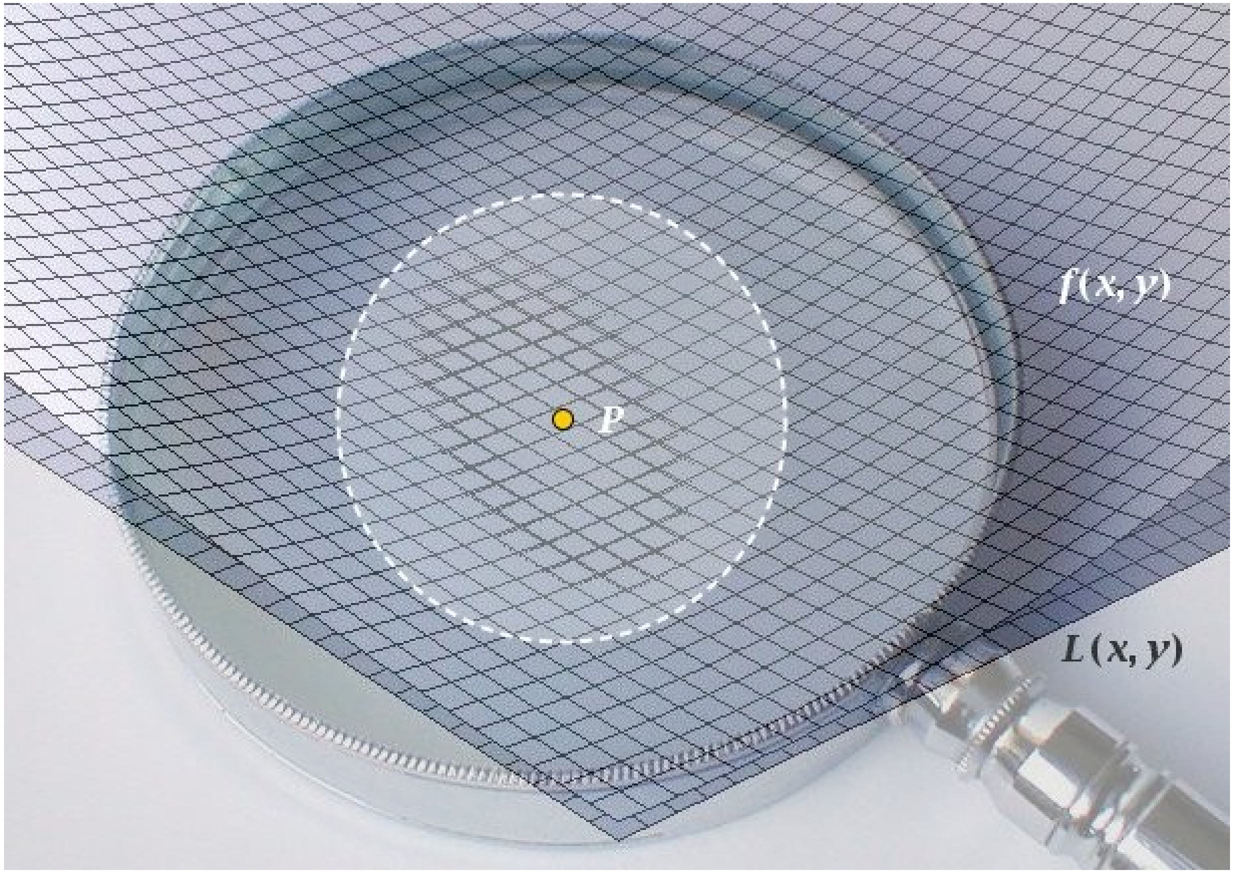

Abb. L16-4: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ und ihrer Linearisierung $z = L(x, y)$ im Punkt $P(3, 2, 8)$

$$f(x, y) = (x + 3y - 2)^2$$

$a)\ P = (2, -1) \quad : L(x, y) = -6x - 18y + 3$

$b)\ P = (1, -2) \quad : L(x, y) = -14x - 42y - 21$

$$f(x, y, z) = xy + yz + xz$$

$$a)\ P = (1, 1, 1), \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1$$

$$L(x, y, z) = f(P) + f_x(P)(x - x_0) +$$
$$+ f_y(P)(y - y_0) + f_z(P)(z - z_0)$$

$$f(P) = x_0 y_0 + y_0 z_0 + x_0 z_0 = 3$$

$$f_x = y + z, \quad f_y = x + z, \quad f_z = y + x$$

$$f_x(P) = 2, \quad f_y(P) = 2, \quad f_z(P) = 2$$

$$L(x, y, z) = 3 + 2(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 1) =$$
$$= 2x + 2y + 2z - 3$$

$$a)\ P = (1, 1, 1) \quad : L(x, y, z) = 2x + 2y + 2z - 3$$

$$b)\ P = (1, 0, 0) \quad : L(x, y, z) = y + z$$

$$c)\ P = (0, 0, 0) \quad : L(x, y, z) = 0$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$a)\ P = (1, 1, 1), \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1$

$$f(P) = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$$

$$f_x = 2x, \quad f_y = 2y, \quad f_z = 2z$$

$$f_x(P) = 2, \quad f_y(P) = 2, \quad f_z(P) = 2$$

$$L(x, y, z) = 3 + 2(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) =$$

$$= 2x + 2y + 2z - 3$$

$a)\ P = (1, 1, 1) \quad : L(x, y, z) = 2x + 2y + 2z - 3$

$b)\ P = (0, 1, 0) \quad : L(x, y, z) = 2y - 1$

$c)\ P = (1, 0, 0) \quad : L(x, y, z) = 2x - 1$