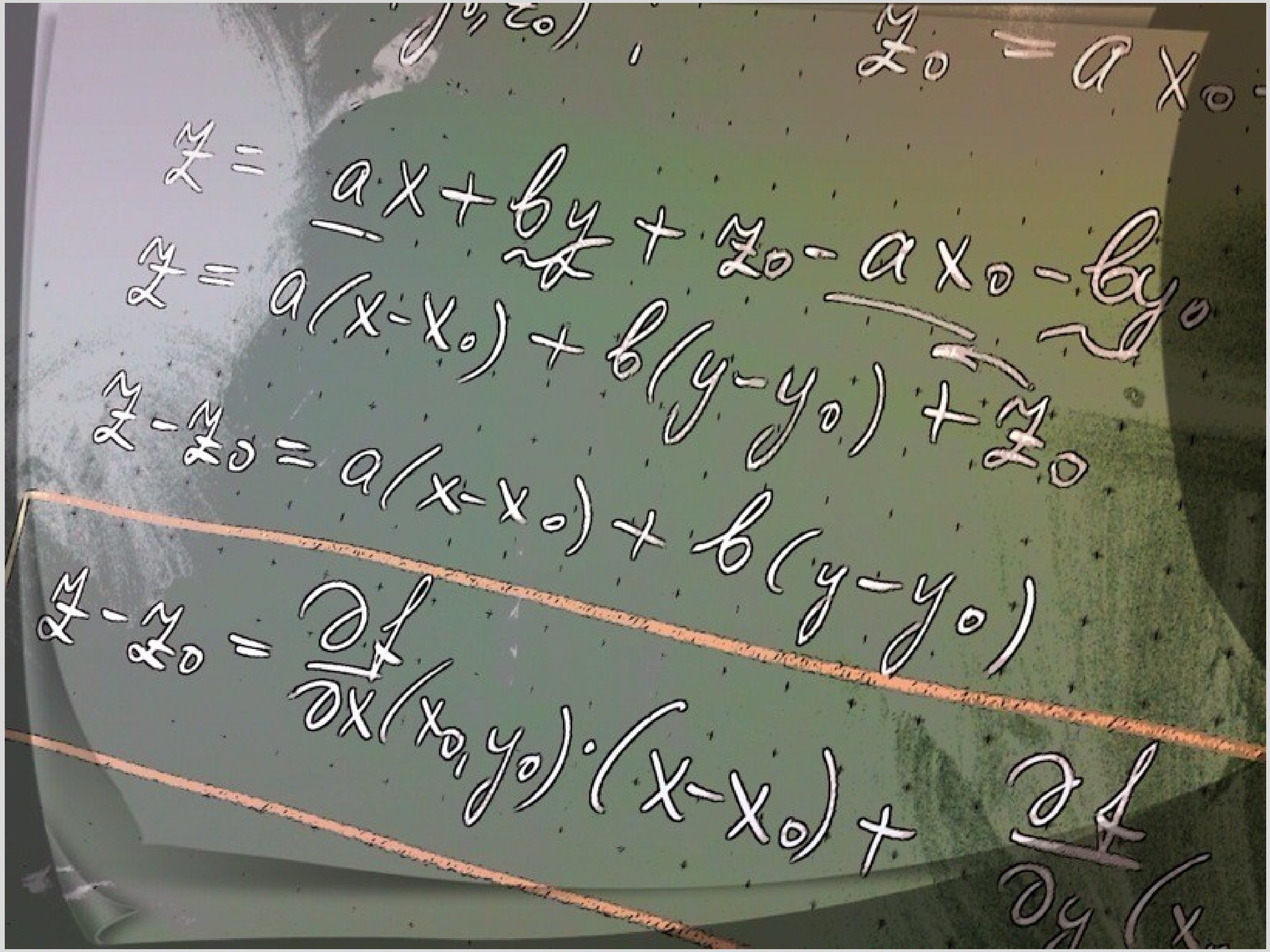
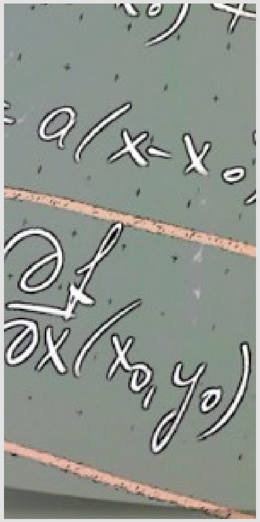


Linearisierung einer Funktion $z = f(x, y)$

Die Gleichung der Tangentialebene



Die Tangentialebene einer Funktion $z = f(x, y)$ von zwei Veränderlichen

- spielt die gleiche Rolle wie die Kurventangente;
- enthält sämtliche im Flächenpunkt P angelegten Tangenten (somit umfasst sie die Änderungen in alle Richtungen);
- besitzt in der unmittelbaren Umgebung des Berührungspunktes P mit der Fläche keinen weiteren gemeinsamen Punkt.

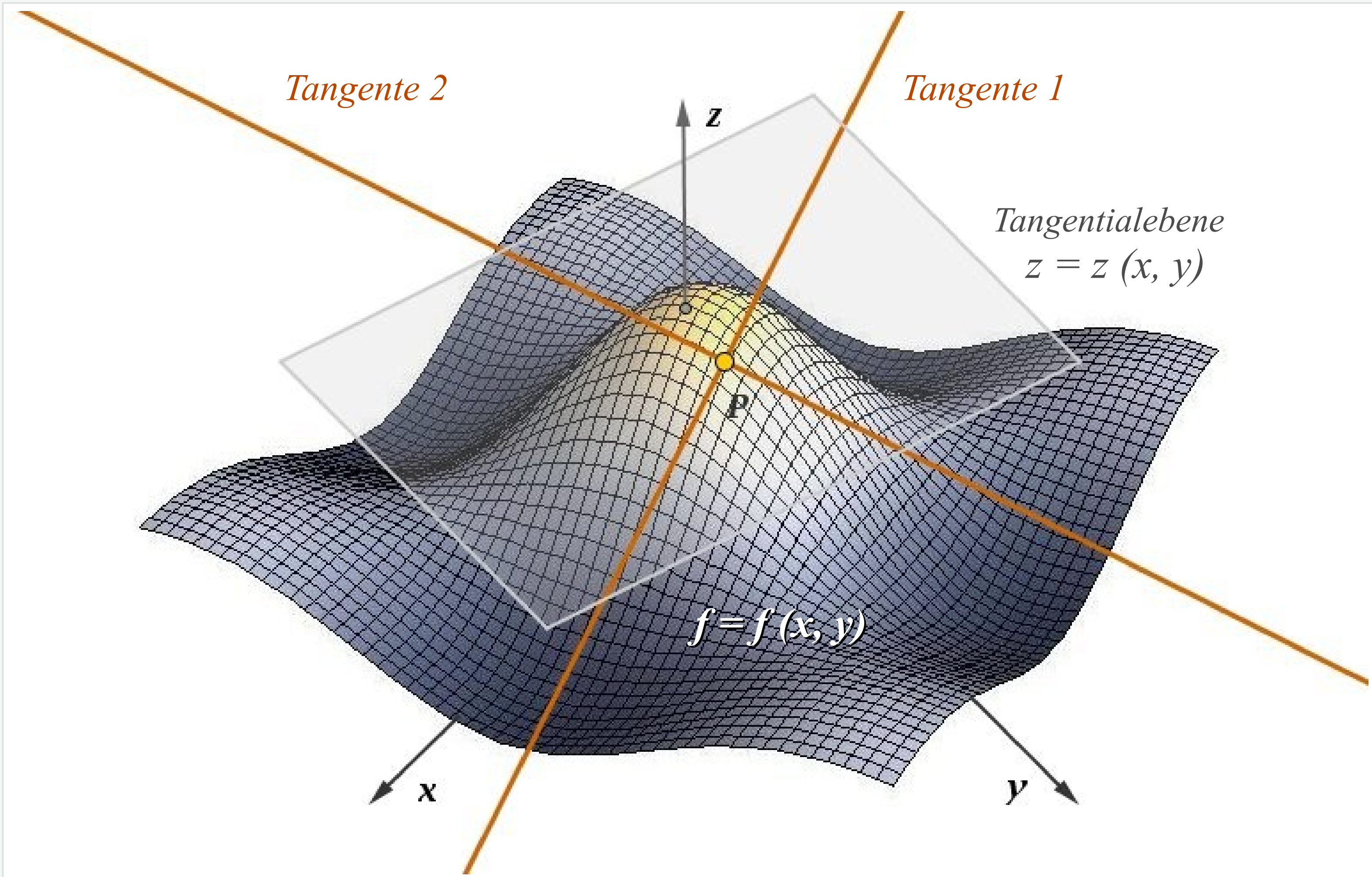


Abb. 1: Graphische Darstellung einer Funktion $f = f(x, y)$ als Fläche im 3D-Raum und der Tangentialebene im Punkt P

$$f = f(x, y), \qquad z = z(x, y) = a\,x + b\,y + c\,, \qquad P = (x_0\,,\ y_0\,,\ z_0)$$

$$f = f(x, y), \qquad z = z(x, y) = a\,x + b\,y + c, \qquad P = (x_0,\; y_0,\; z_0)$$

Die unbekannten Koeffizienten *a, b* und *c* bestimmt man aus den bekannten Eigenschaften der Tangentialebene. Die Funktionsfläche und Tangentialebene besitzen im Berührungspunkt *P* den gleichen Anstieg. Dies bedeutet, dass dort die entsprechenden partiellen Ableitungen übereinstimmen müssen

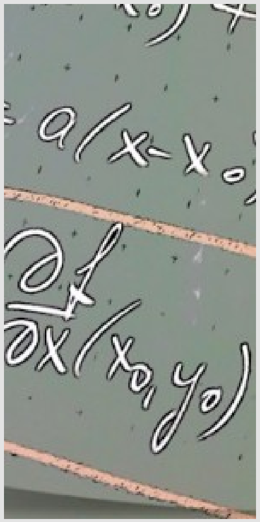
1. $f_x(x, y) = z_x(x, y) = a, \qquad f_y(x, y) = z_y(x, y) = b$

2. $P(x_0,\; y_0,\; z_0) \in z = z(x, y) \quad \Rightarrow$

   $z_0 = a\,x_0 + b\,y_0 + c \quad \Rightarrow \quad c = z_0 - a\,x_0 - b\,y_0$

3. $a, b, c \quad \rightarrow \quad z = z(x, y)$

$$\boxed{z - z_0 = f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)}$$



Gesucht ist die Tangentialebene der Funktion $f = f\,(x, y)$ im Punkt P

Aufgabe 1:

$$f\,(x\,,\,y) = 2\,x^3 - y^2 - 3\,x\,y\,, \qquad P = (1,\ 1,\ z_0)$$

Aufgabe 2: $f\,(x\,,\,y) = x^2 + y^2\,, \qquad P = (1,\ 1,\ 2)$

Die Gleichung der Tangentialebene: Lösung 1

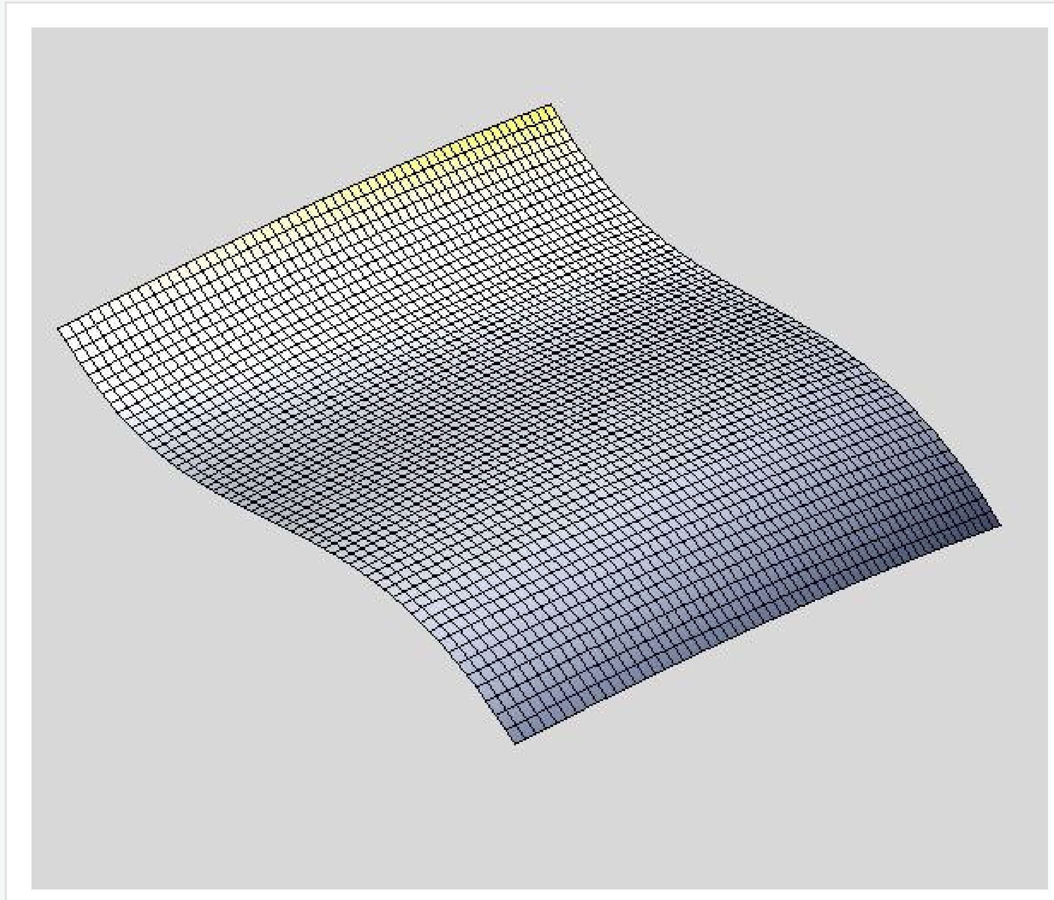


Abb. 2-1: Graphische Darstellung der Funktion $f(x, y) = 2x^3 - y^2 - 3xy$ *als Fläche im 3D-Raum*

Die Gleichung der Tangentialebene: Lösung 1

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

$$f(x, y) = 2x^3 - y^2 - 3xy, \qquad P = (1,\ 1,\ z_0)$$

$$f_x(x, y) = 6x^2 - 3y, \qquad f_x(1, 1) = 3$$

$$f_y(x, y) = -2y - 3x, \qquad f_y(1, 1) = -5$$

$$z - z_0 = 3\,(x - x_0) - 5\,(y - y_0)$$

$$z_0 = f(x_0,\ y_0) = 2 - 1 - 3 = -2$$

$$z = z_0 + 3\,(x - x_0) - 5\,(y - y_0) =$$

$$= -2 + 3\,(x - 1) - 5\,(y - 1) = 3x - 5y$$

$$z = 3x - 5y$$

Die Gleichung der Tangentialebene: Lösung 2

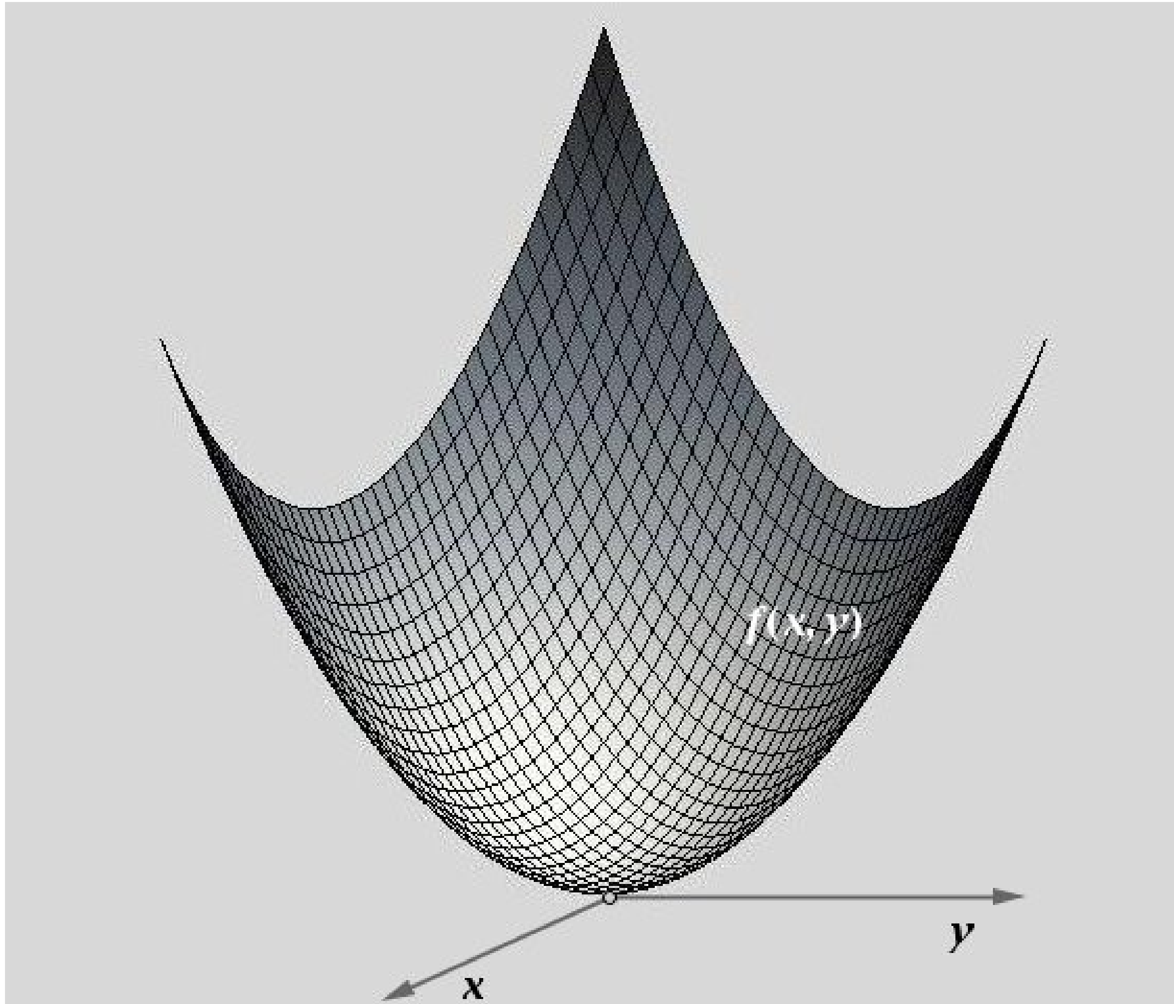


Abb. 2-2: Graphische Darstellung der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ als Fläche im 3D-Raum

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad P = (1, 1, 2)$$

$$f_x(x, y) = 2x, \qquad f_x(1, 1) = 2$$

$$f_y(x, y) = 2y, \qquad f_y(1, 1) = 2$$

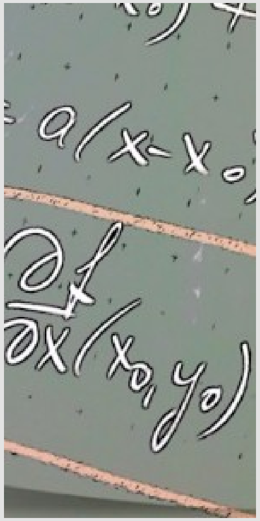
$$z_0 = f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 = 2$$

$$z - z_0 = 2\,(x - x_0) + 2\,(y - y_0)$$

$$z - 2 = 2\,(x - 1) + 2\,(y - 1) \qquad \Rightarrow$$

Die Gleichung der Tangentialebene an die Bildfläche von $f(x, y) = x^2 + y^2$ im Flächenpunkt $P(1, 1, 2)$:

$$z = 2x + 2y - 2$$



Gesucht ist die Tangentialebene der Funktion $f = f(x, y)$ im Punkt P

Aufgabe 3: $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-x}, \quad P(0,\ 1,\ 1)$

Aufgabe 4: $f(x, y) = x^3 \cdot y^4, \quad P(1,\ 1,\ z_0)$

Aufgabe 5:

$$f(x, y) = e^x \cdot \cos y, \quad a)\ P(0,\ 0,\ z_0), \quad b)\ P\left(0,\ \frac{\pi}{2},\ z_0\right)$$

Aufgabe 6:

$$f(x, y) = 3\sqrt{\frac{x^2}{y}} + 2 \cdot \cos(\pi(x + 2y)), \quad P(2,\ 1,\ z_0)$$

Aufgabe 7: $f(x, y) = (x^2 - y^2) \cdot \sin y, \quad P\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$

Aufgabe 8: $f(x, y) = x^3 + 2\cos y, \quad P\left(-2,\ \frac{3\pi}{2}\right)$

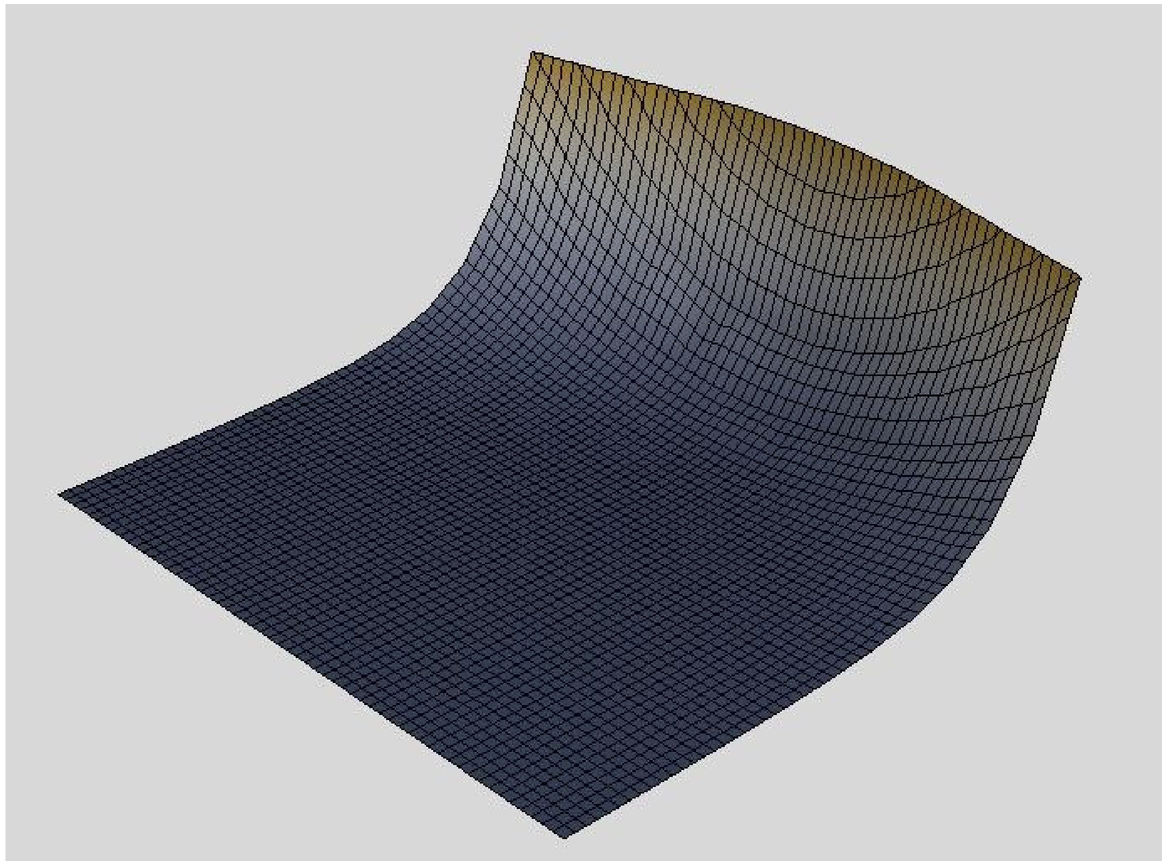


Abb. 3-1: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ als Fläche im 3D-Raum

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-x}$$

Tangentialebene im Punkt $P(0, 1, 1)$: $\quad z = -x + 2y - 1$

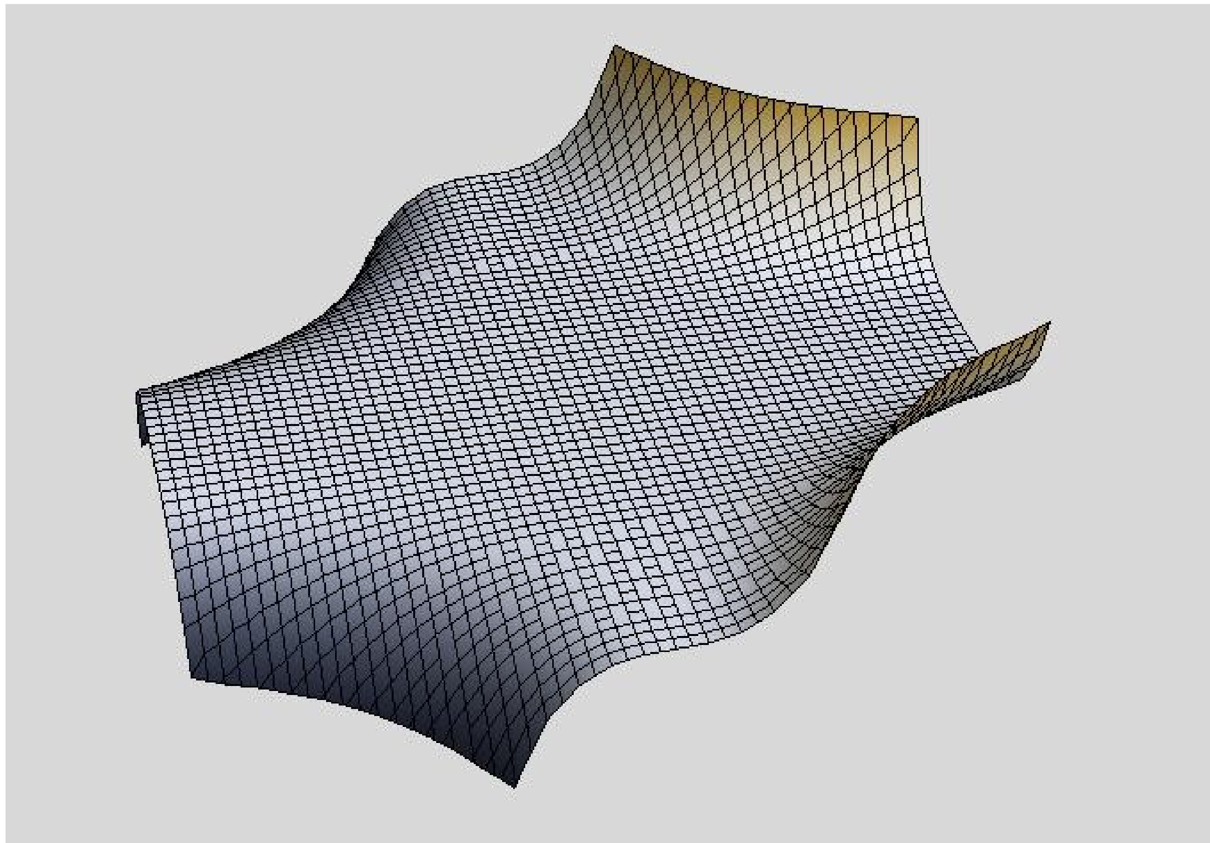


Abb. 3-2: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ als Fläche im 3D-Raum

$$f(x, y) = x^3 \cdot y^4$$

Tangentialebene im Punkt $P(1, 1, 1)$: $\quad z = 3x + 4y - 6$

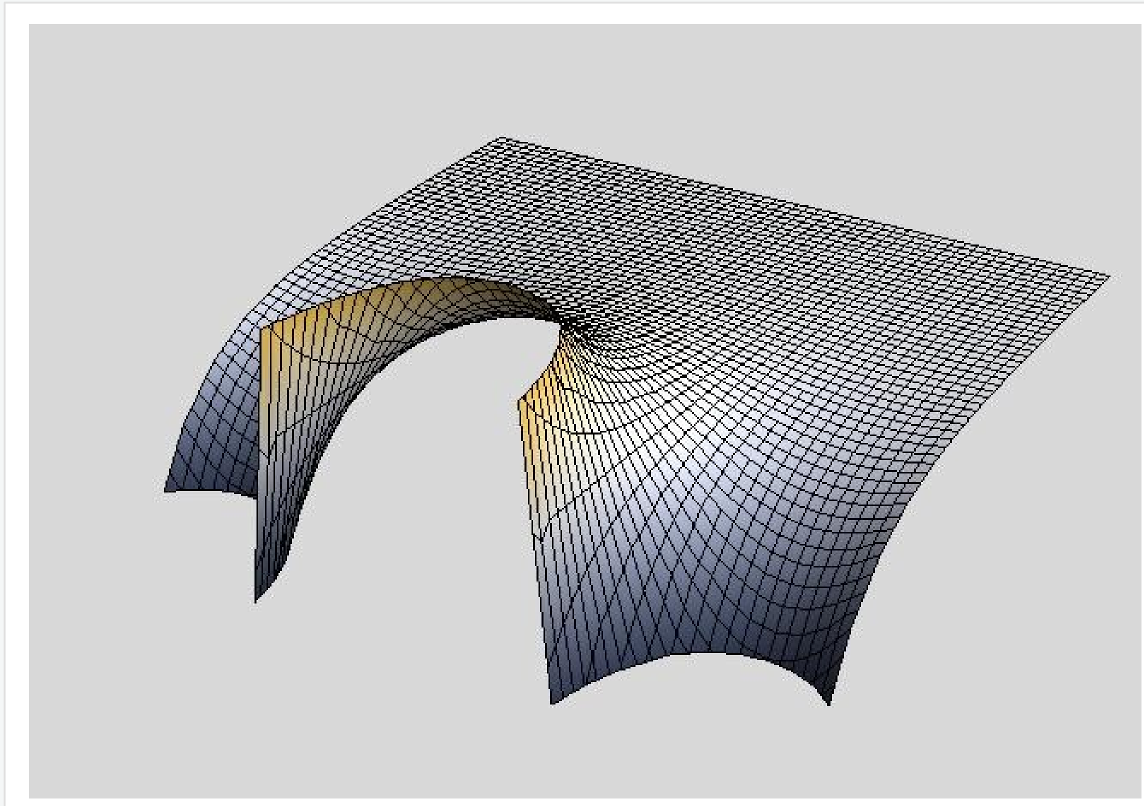


Abb. 3-3: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ als Fläche im 3D-Raum

$$f(x, y) = e^x \cdot \cos y$$

$$a)\quad P(0,\ 0):\quad z = x + 1, \qquad b)\quad P\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right):\quad z = \frac{\pi}{2} - y$$

Lösung 6:

$$f(x, y) = 3\sqrt{\frac{x^2}{y}} + 2\cos(\pi(x + 2y)), \qquad P(2, 1, 8)$$

$$z = 3x - 3y + 5$$

Lösung 7:

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) \cdot \sin y, \qquad P\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$z = 2x - \pi y - 1 + \frac{\pi^2}{4} \simeq 2x - 3.14y + 1.47$$

Lösung 8:

$$f(x, y) = x^3 + 2\cos y, \qquad P\left(-2, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$z = 12x + 2y + 16 - 3\pi \simeq 12x + 2y + 6.58$$