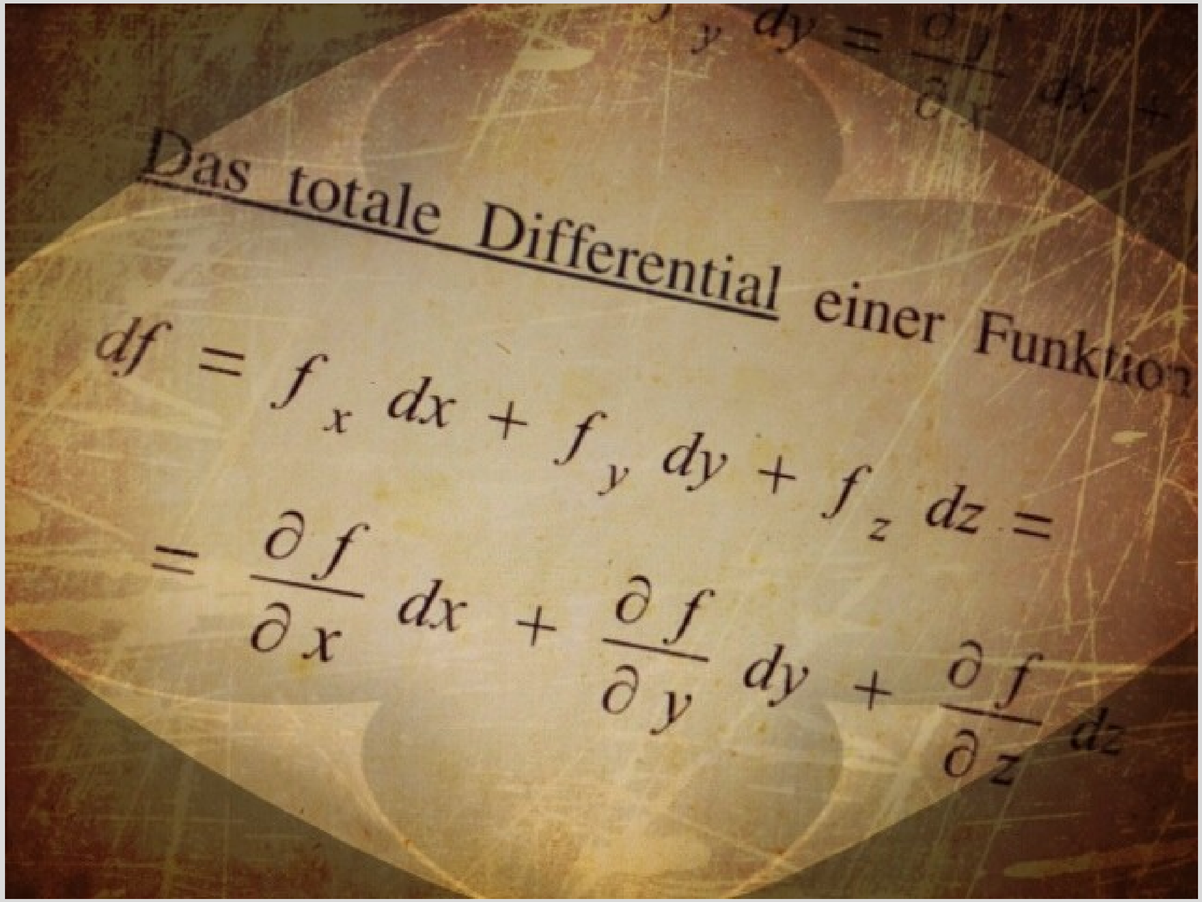
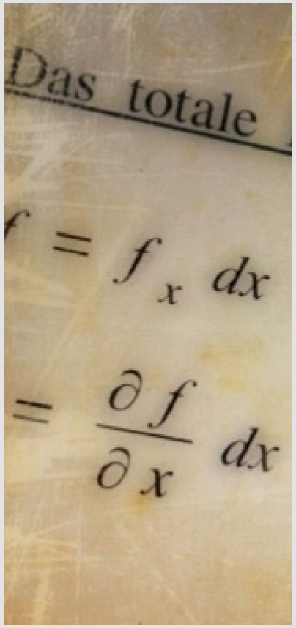


Das totale Differential



Definition 1:

Unter dem totalen oder vollständigen Differential einer differenzierbaren Funktion $f = f\,(x, y)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen versteht man den linearen Differentialausdruck

$$df = f_x\, dx + f_y\, dy = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

Das totale Differential ist ein Maß für die Veränderung der Funktion $z = f\,(x, y)$, wenn man im Punkt $P\ (x, y)$ ein Stück in die Richtung $d\mathbf{r} = (dx, dy)$ geht.

Definition 2:

Die Funktionswerte, die sich bei Verschiebung des Punktes P ergeben,

$$P\,(x_0,\ y_0) \quad\rightarrow\quad P'\,(x_0 + dx\,,\ y_0 + dy)$$

werden durch das folgende Differential näherungsweise als auf der Tangentialebene im Punkt P liegend beschrieben

$$df = f_x(x_0,\ y_0)\,dx + f_y(x_0,\ y_0)\,dy$$

Diese lineare Änderung der Funktion f wird als das totale Differential bezeichnet.

Geometrische Deutung: Bei einer Funktion $z = f\,(x, y)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen beschreibt das totale oder vollständige Differential die Änderung des Funktionswertes entsprechend der im Berührungspunkt P errichteten Tangentialebene.

Das totale Differential einer Funktion $f = f\,(x, y, z)$

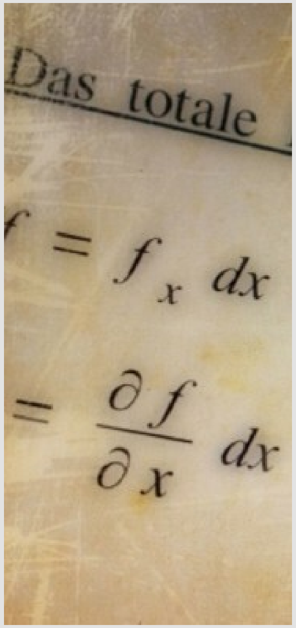
$$df = f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz$$

Das totale Differential der Funktion $y = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$dy = f_{x_1}\, dx_1 + f_{x_2}\, dx_2 + \ldots + f_{x_n}\, dx_n =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n$$

Das totale Differential: Aufgabe 1



Berechnen Sie das totale Differential der folgenden Funktionen $f = f\,(x, y)$:

$a)\quad f\,(x\,,\,y) = x^2 + y^2$

$b)\quad f\,(x\,,\,y) = 3\,x^4 - 7\,xy + x$

$c)\quad f\,(x\,,\,y) = 2\,x \sin y + 3\,x\,y$

$d)\quad f\,(x\,,\,y) = e^{x\,y^2}$

$e)\quad f\,(x\,,\,y) = x^3 \sin y + y^2$

$f)\quad f\,(x\,,\,y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$

$h)\quad f\,(x\,,\,y) = \dfrac{y}{x^2 + 1}$

$$a)\quad f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad df = 2x\,dx + 2y\,dy$$

$$b)\quad f(x,y) = 3x^4 - 7xy + x, \qquad df = \left(12x^3 - 7y + 1\right)dx - 7x\,dy$$

$$c)\quad f(x,y) = 2x\sin y + 3xy$$

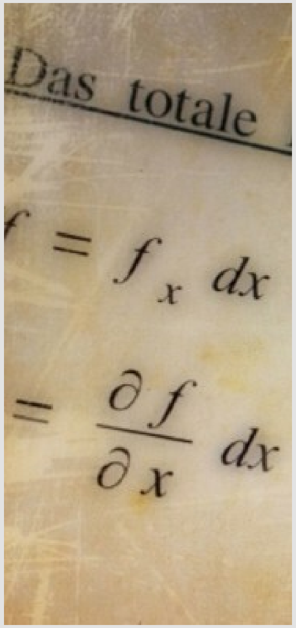
$$df = (2\sin y + 3y)\,dx + (2x\cos y + 3x)\,dy$$

$$d)\quad f(x,y) = e^{xy^2}, \qquad df = e^{xy^2}\left(y^2\,dx + 2xy\,dy\right)$$

$$e)\quad f(x,y) = x^3\sin y + y^2, \qquad df = 3x^2\sin y\,dx + (x^3\cos y + 2y)\,dy$$

$$f)\quad f(x,y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}, \qquad df = -2\,\frac{x\,dx + y\,dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$h)\quad f(x,y) = \frac{y}{x^2 + 1}, \qquad df = -\frac{2xy\,dx}{(x^2+1)^2} + \frac{dy}{x^2 + 1}$$



Aufgabe 2:

Berechnen Sie das totale Differential der folgenden Funktionen $f = f\,(x, y, z)$:

$a)\quad f\,(x\,, y\,, z) = x\;y\;z$

$b)\quad f\,(x\,, y\,, z) = \ln\,(x\;y\;z)$

$c)\quad f\,(x\,, y\,, z) = e^{x^2 + y^2 + z^2}$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie das totale Differential der folgenden Funktionen im Punkt P :

$a)\quad f\,(x\,, y) = x^2 + 3\,x\,y\,, \qquad P\,(x\,, y) = (3,\; 2)$

$b)\quad f\,(x\,, y) = x^2 - 3\cos y \cdot e^x + y\,, \qquad P\,(x\,, y) = (0,\; \pi)$

Lösung 2:

a) $f(x, y, z) = x\,y\,z, \qquad df = y\,z\,dx + x\,z\,dy + x\,y\,dz$

b) $f(x, y, z) = \ln(x\,y\,z), \qquad df = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$

c) $f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad df = 2\,e^{x^2 + y^2 + z^2}\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$

Lösung 3:

a) $df = f_x(3, 2)\,dx + f_y(3, 2)\,dy = 12\,dx + 9\,dy$

b) $f_x(x, y) = 2x - 3\cos y \cdot e^x, \qquad f_y(x, y) = 3\sin y \cdot e^x + 1$

$df(0, \pi) = f_x(0, \pi)\,dx + f_y(0, \pi)\,dy = 3 \cdot dx + dy$