http://www.youtube.com/watch?v=f6rn0sgNwks&feature=related

Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

$$f = f(x, y), \qquad x = g(u, v), \qquad y = h(u, v)$$

u, v – zwei Parameter:

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \qquad v_1 \leqslant v \leqslant v_2$$

$$f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v)) = F(u, v)$$

– eine verkettete Funktion

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung werden nach der Kettenregel gebildet:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$f_u = f_x\, x_u + f_y\, y_u, \qquad f_v = f_x\, x_v + f_y\, y_v$$

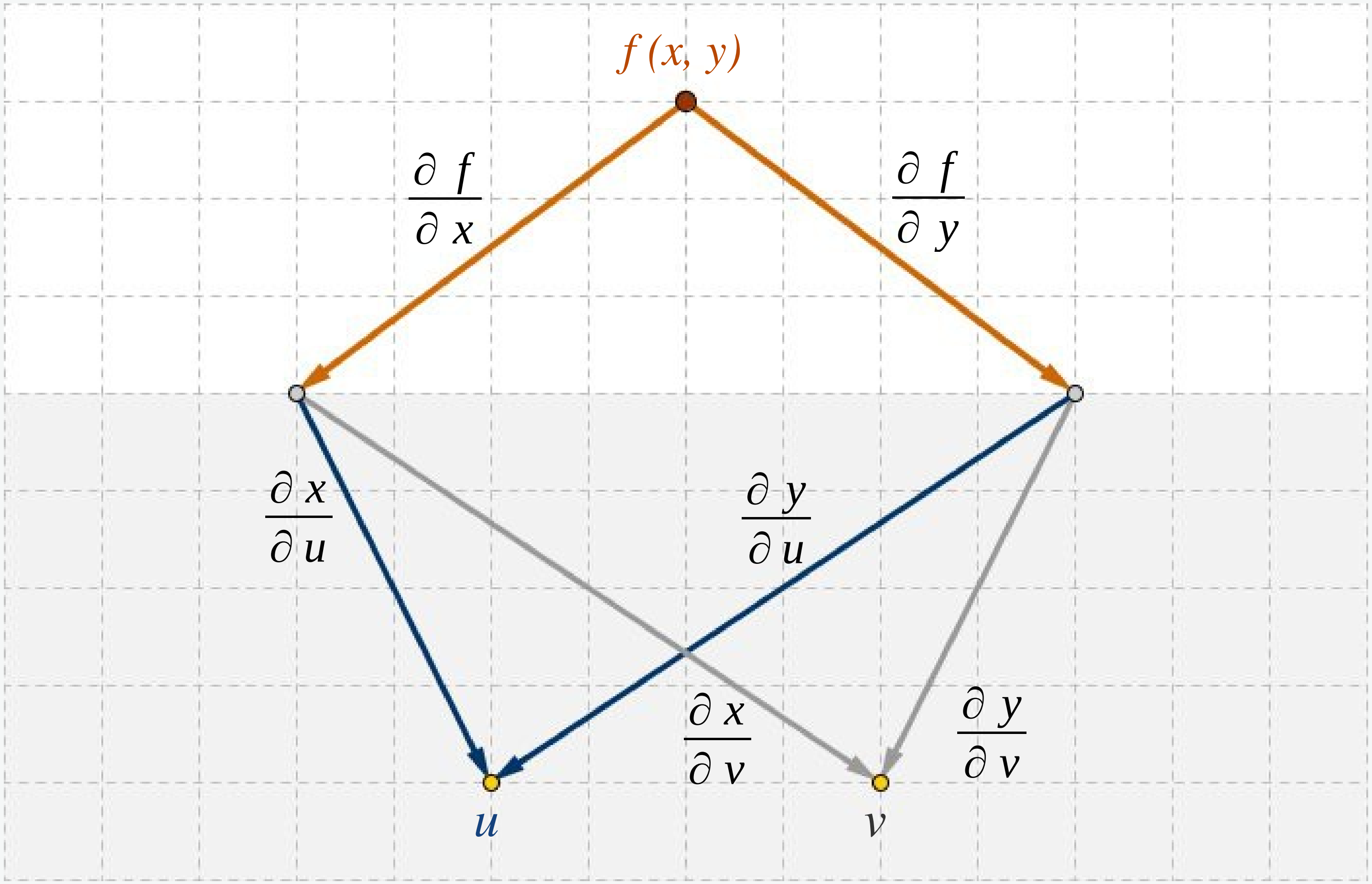

Abb. 1: Die Darstellung der Kettenregel für eine Funktion $f = f(x, y)$ $(x = g(u, v),\ y = h(u, v))$ mit Hilfe eines Diagramms

$f = f(x, y)$ ist eine "äußere" Funktion, $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ sind "innere" Funktionen.

In der Vektoranalysis ist es häufig sinnvoll von den ebenen kartesischen Koordinaten x und y zu den Polarkoordinaten überzugehen:

$$\boxed{x = r \cos \varphi \,, \qquad y = r \sin \varphi}$$

(x, y)-*System* $\longrightarrow$ (r, φ)-*System*

Bestimmen Sie für die Funktion $f\,(x, y)$ folgende partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial r}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$x_r = \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi, \qquad y_r = \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi$$

$$x_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \qquad y_\varphi = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \cos\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= -r\sin\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}}$$

Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der jeweiligen Funktion $f = f(x, y)$ nach den Parametern unter Verwendung der Kettenregel:

Aufgabe 2:

$$f(x, y) = \tan(x + y)$$

$$x(u, v) = u^2 + v, \quad y(u, v) = u^2 - v$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} \quad - ?$$

Aufgabe 3:

$$a)\ f(x, y) = e^x \sin y, \quad x(s, t) = s t^2, \quad y(s, t) = s^2 t$$

$$b)\ f(x, y) = \sin(x^2 y), \quad x(s, t) = s t^2, \quad y(s, t) = s^2 + \frac{1}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} \quad - ?$$

$$f(x, y) = \tan(x + y), \quad x(u, v) = u^2 + v, \quad y(u, v) = u^2 - v$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2(x + y)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2u, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = 2u$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 1, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{4u}{\cos^2(2u^2)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

$a)\quad f(x, y) = e^x \sin y, \quad x(s, t) = s t^2, \quad y(s, t) = s^2 t$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = t \cdot e^{s t^2} \left[t \sin(s^2 t) + 2 s \cos(s^2 t) \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = s \cdot e^{s t^2} \left[2t \sin(s^2 t) + s \cos(s^2 t) \right]$$

$b)\quad f(x, y) = \sin(x^2 y), \quad x(s, t) = s t^2, \quad y(s, t) = s^2 + \dfrac{1}{t}$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (4 s^3 t^4 + 2 s t^3) \cos(s^4 t^4 + s^2 t^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (4 s^4 t^3 + 3 s^2 t^2) \cos(s^4 t^4 + s^2 t^3)$$

Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $f = f\,(x, y, z)$ nach den Parametern r und s unter Verwendung der Kettenregel:

$$f\,(x\,,\; y\,,\; z) = x + 2\,y + z^2$$

$$x = \frac{r}{s}\,, \qquad y = r^2 + \ln s\,, \qquad z = 2\,r$$

$$f(x, y, z) = x + 2y + z^2$$

$$x = \frac{r}{s}, \qquad y = r^2 + \ln s, \qquad z = 2r$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{s} + 12r$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}$$