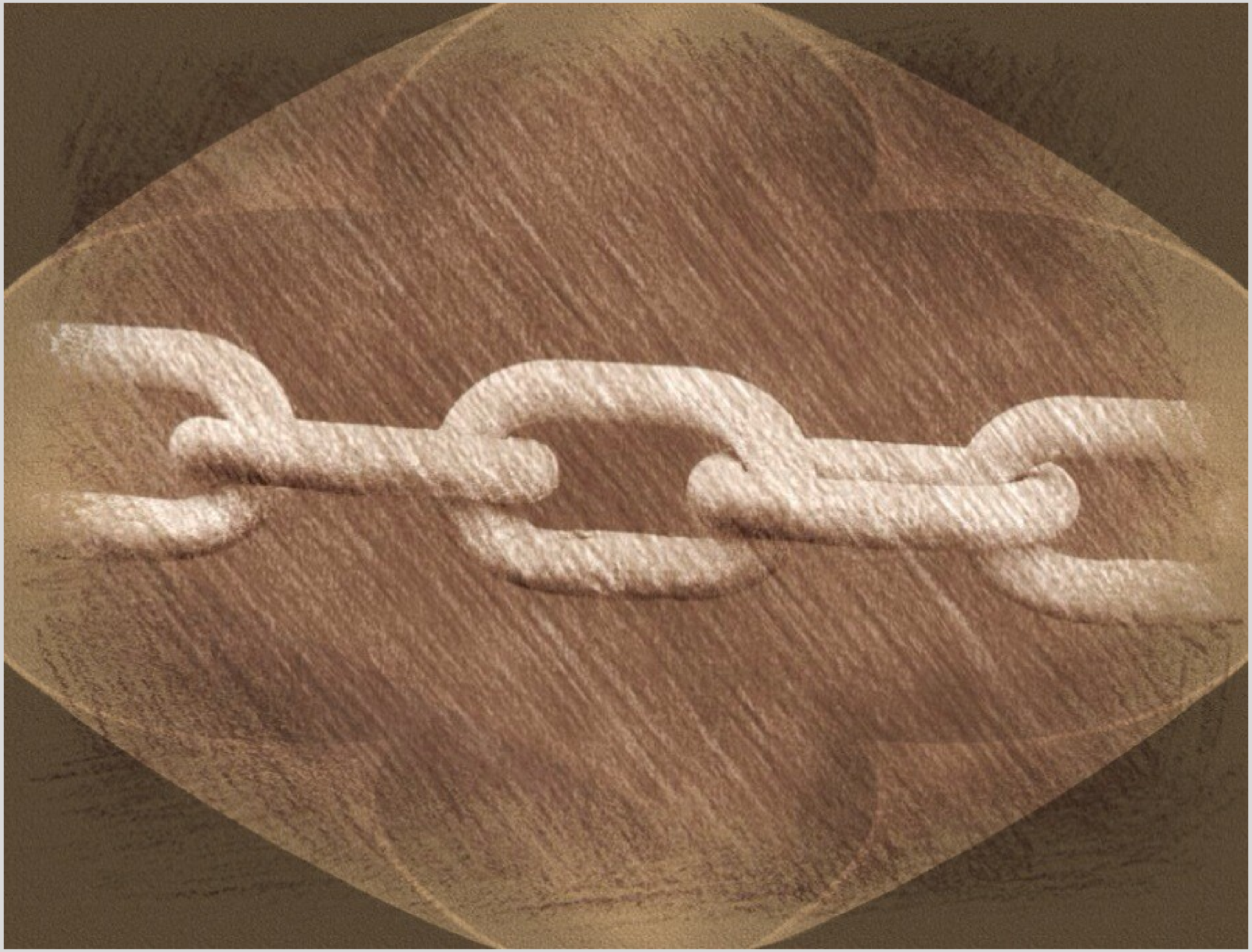
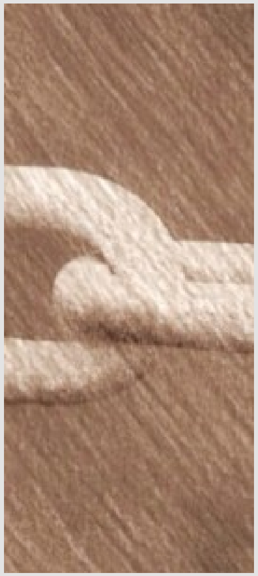


Differentiation nach einem Parameter

Kettenregel: Aufgaben

Kettenregel: Aufgabe 2



Differenzieren Sie die Funktion $f = f(x, y)$ nach dem Parameter t (längst der Kurve C)

- unter Verwendung der Kettenregel,
- nach Einsetzen der beiden Parametergleichungen in die Funktionsgleichung.

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y$$

$$C: \quad x(t) = t^2, \quad y(t) = -2t$$

$$C: \quad x = t^2, \quad y = -2t$$

$$t_1 = -2, \quad x = 4, \quad y = 4, \quad (4,\ 4)$$

$$t_2 = -1, \quad x = 1, \quad y = 2, \quad (1,\ 2)$$

$$t_3 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad (0,\ 0)$$

$$t_4 = 1, \quad x = 1, \quad y = -2, \quad (1,\ -2)$$

$$t_5 = 2, \quad x = 4, \quad y = -4, \quad (4,\ -4)$$

Kettenregel: *Lösung 2*

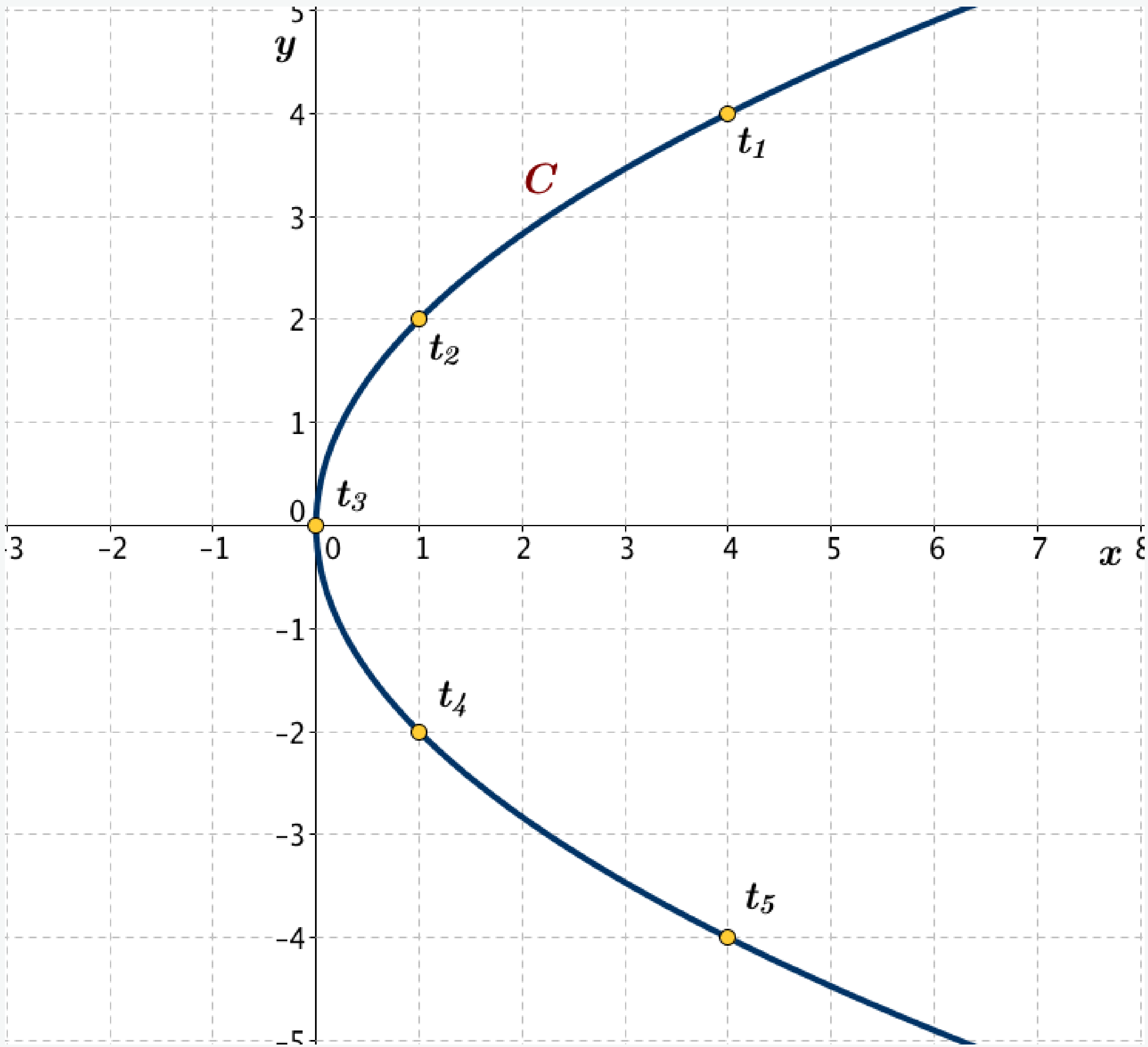


Abb. L2: Ebene Kurve C : x (t) = t^2, y (t) = -2t, t ist ein Parameter

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y, \qquad x = t^2, \qquad y = -2t$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Wir bilden zuerst die benötigten Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x + y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x + 1), \qquad \dot{x} = 2t, \qquad \dot{y} = -2$$

Für die gesuchte Ableitung von $z = f(x, y)$ nach dem Parameter t folgt dann:

$$\frac{df}{dt} = 4\left[(x + y)t - (x + 1)\right] = 4(t^3 - 3t^2 - 1)$$

Dieses Ergebnis bekommen wir auch, wenn wir zuerst die Parametergleichungen in die gegebene Funktion einsetzen und diese dann nach dem Parameter t differenzieren:

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y = (t^2)^2 + 2t^2(-2t) + 2(-2t) =$$

$$= t^4 - 4t^3 - 4t$$

$$\frac{df}{dt} = 4(t^3 - 3t^2 - 1)$$

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $z = f(x, y)$ längs der Kurve C.

a) $f(x, y) = (x - y)^2$

$C: \quad x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = 2\sin t \quad (0 \leqslant t < 2\pi)$

b) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy$

$C: \quad x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = \sin t \quad (0 \leqslant t < 2\pi)$

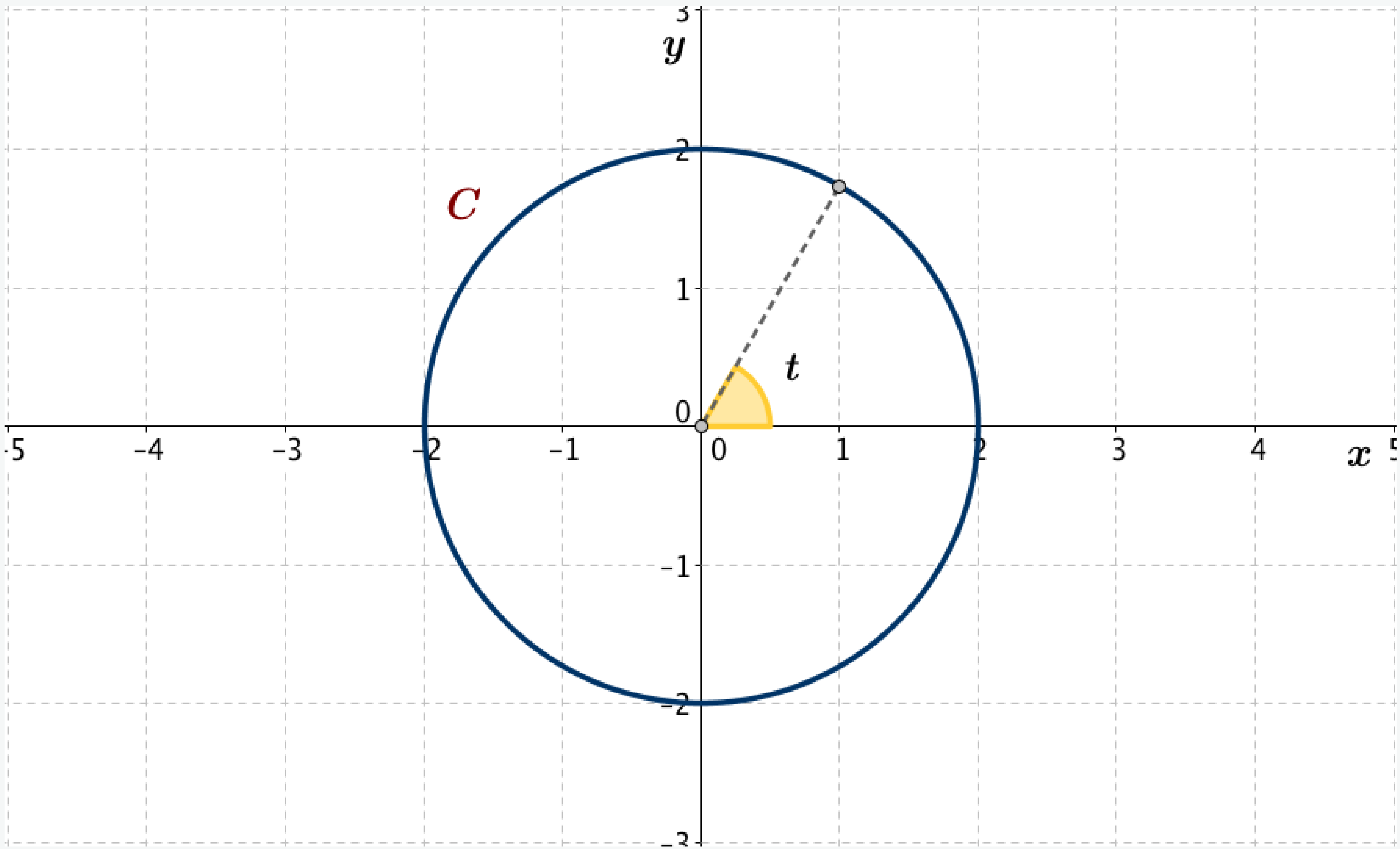


Abb. L-3a: Die ebene Kurve C: ein Kreis in der x,y-Ebene mit dem Radius r = 2

$$C \;: \quad x = 2\cos t\,, \qquad y = 2\sin t \qquad \left(0 \leqslant t < 2\pi\right)$$

$$f(x, y) = (x - y)^2, \qquad C: \quad x(t) = 2\cos t, \qquad y(t) = 2\sin t$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Wir bilden zuerst die benötigten Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(x - y)$$

$$\frac{dx}{dt} = -2\sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = 2\cos t$$

$$\frac{df}{dt} = -4(x - y)(\sin t + \cos t) =$$

$$= -8(\cos t - \sin t)(\sin t + \cos t) =$$

$$= -8(\cos^2 t - \sin^2 t) = -8\cos(2t)$$

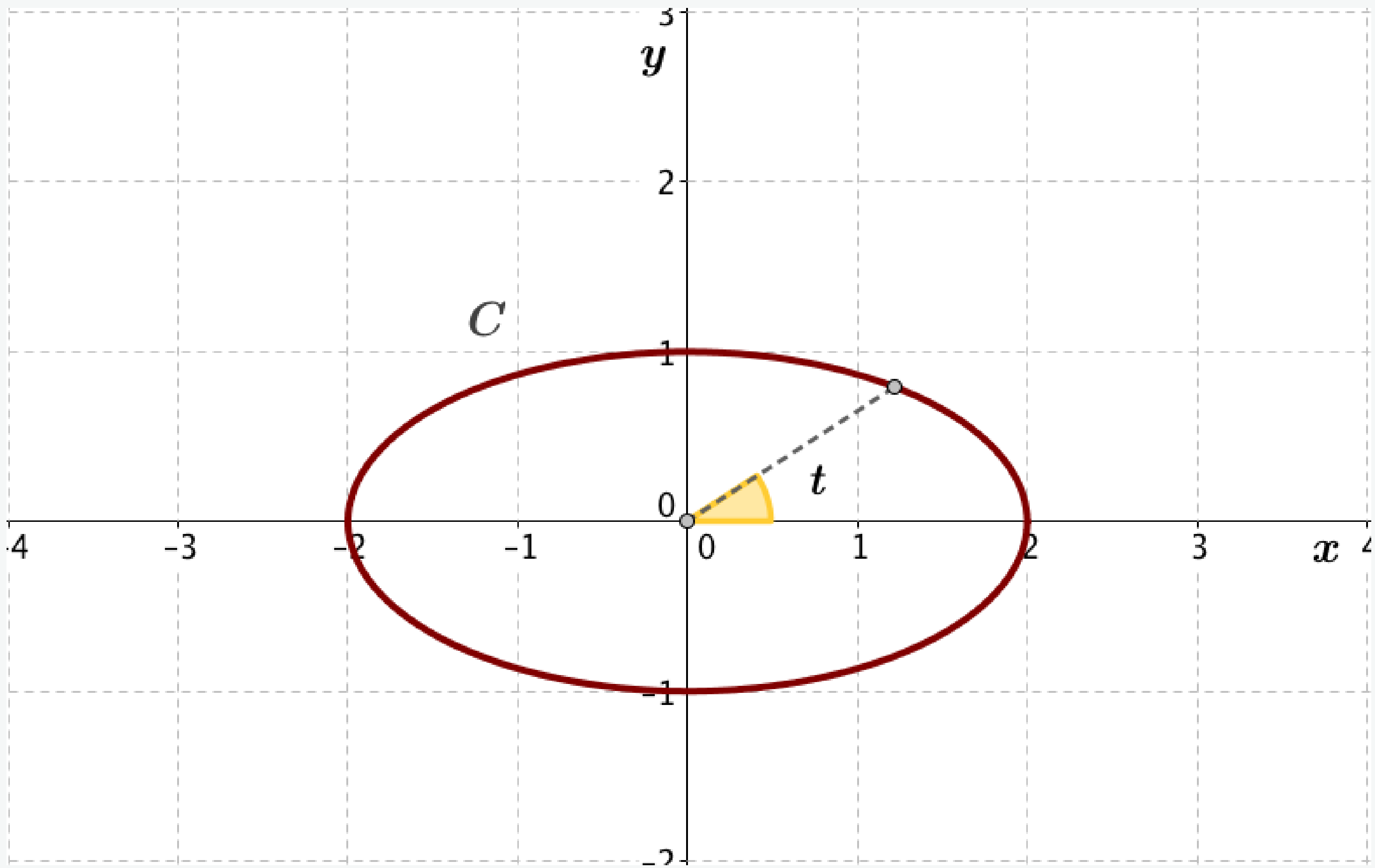


Abb. L-3b: Die ebene Kurve C

$$C: \quad x = 2\cos t\,, \qquad y = \sin t \qquad (0 \leqslant t < 2\pi)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy$$

$$C: \quad x(t) = 2\cos t, \qquad y(t) = \sin t \qquad (0 \leqslant t < 2\pi)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} =$$

$$= (2x + 4y)(-2\sin t) + (-2y + 4x)\cos t =$$

$$= 2\big(-2(x + 2y)\sin t + (-y + 2x)\cos t\big) =$$

$$= 2\big(-2(2\cos t + 2\sin t)\sin t + (-\sin t + 4\cos t)\cos t\big) =$$

$$= 8\cos(2t) - 5\sin(2t)$$

$$F(t) = f(x(t), y(t)) = 4\cos^2(t) - \sin^2(t) + 8\cos(t)\sin(t) =$$

$$= 4\sin(2t) + 5\cos^2(t) - 1$$

$$\frac{dF}{dt} = 8\cos(2t) - 5\sin(2t)$$

Ein Sonderfall tritt ein, wenn eine der beiden unabhängigen Variablen selbst als Kurvenparameter auftritt. Ist z.B. x der Kurvenparameter, so lautet die Parameterdarstellung $x = x$, $y = h(x)$, und die Funktion $z = f(x, h(x)) = F(x)$. Die Ableitung dieser Funktion nach dem Parameter x lautet dann nach der Kettenregel wie folgt:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{\dot{f} = f_x\,\dot{x} + f_y\,\dot{y} = f_x + f_y\,\dot{y}}$$

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x, y) = \sin(x + y)$ längs der Normalparabel $y = x^2$ an der Stelle $x = 1$.

$$f(x, y) = \sin(x + y), \qquad y = x^2, \quad x = 1$$

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x + y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x + y), \qquad \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = (1 + 2x)\cos(x + y) =$$

$$= (1 + 2x)\cos(x + x^2)$$

$$\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=1} = \left[(1 + 2x)\cos(x + x^2)\right]_{x=1} = 3\cos(2) = -1.248$$

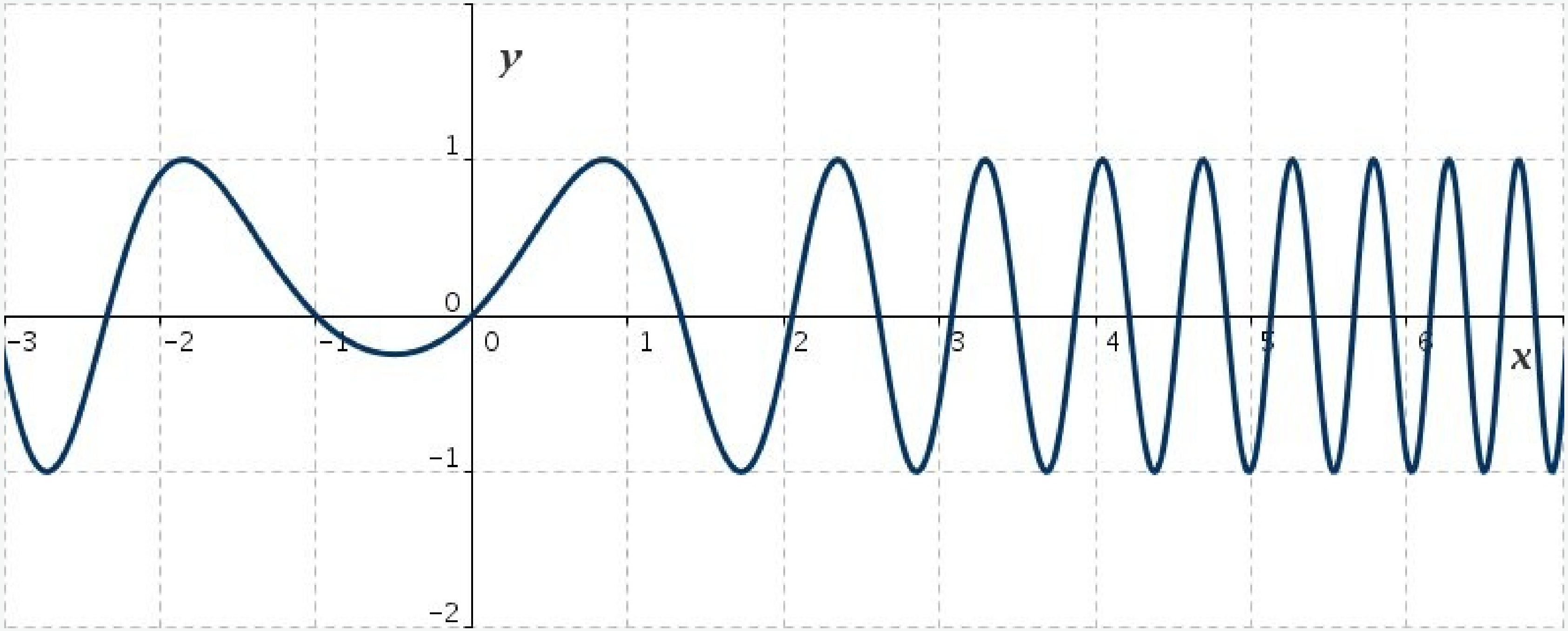


Abb. L4: Graphische Darstellung der Funktion f (x) = sin (x + x²)

$$f\,(x\,,\,y) = \sin\,(x + y)\,, \qquad y = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad f\,(x) = \sin\,(x + x^2)$$

$$\frac{df}{dx} = (1 + 2\,x)\,\cos\,(x + x^2)$$

$$\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=1} = 3\cos\,(2) = -1.248$$

Kettenregel: Aufgabe 5

Differenzieren Sie die Funktion f nach dem Parameter t

- unter Verwendung der Kettenregel,
- nach Einsetzen der beiden Parametergleichungen in die Funktionsgleichung.

$$a)\quad f(x, y) = x\,y, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad \frac{df}{dt}\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$$

$$b)\quad f(x, y) = x^2 y + y^3, \quad x = t^2, \quad y = e^t$$

$$c)\quad f(x, y) = x\, e^{x\,y}, \quad x = t^2, \quad y = t^{-1}$$

$$d)\quad f(x, y, z) = 2\,x\,y - y\,z - 4\,x\,z^2$$

$$x = 2\,t, \quad y = 8\,t, \quad z = t^2$$

a) $f(x, y) = x\,y, \qquad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad \dfrac{df}{dt}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = ?$

$$\frac{df}{dt} = \cos(2\,t), \qquad \frac{df}{dt}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi = -1$$

b) $f(x, y) = x^2\,y + y^3, \qquad x(t) = t^2, \quad y(t) = e^t$

$$\frac{df}{dt} = \left(4\,t^3 + t^4 + 3\cdot e^{2\,t}\right)\,e^t$$

c) $f(x, y) = x\ e^{x\,y}, \qquad x(t) = t^2, \quad y(t) = t^{-1}$

$$\frac{df}{dt} = \left(2\,t + t^2\right)\,e^t$$

$$f(x, y, z) = 2xy - yz - 4xz^2$$

$$x(t) = 2t, \quad y(t) = 8t, \quad z(t) = t^2$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 4z^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - z, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -y - 8xz$$

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{dy}{dt} = 8, \quad \frac{dz}{dt} = 2t$$

$$\frac{df}{dt} = 8t\left(8 - 3t - 5t^3\right)$$

$$f(x(t), y(t), z(t)) = F(t) = 8(4t^2 - t^3 - t^5)$$

$$\frac{dF(t)}{dt} = 8t\left(8 - 3t - 5t^3\right)$$