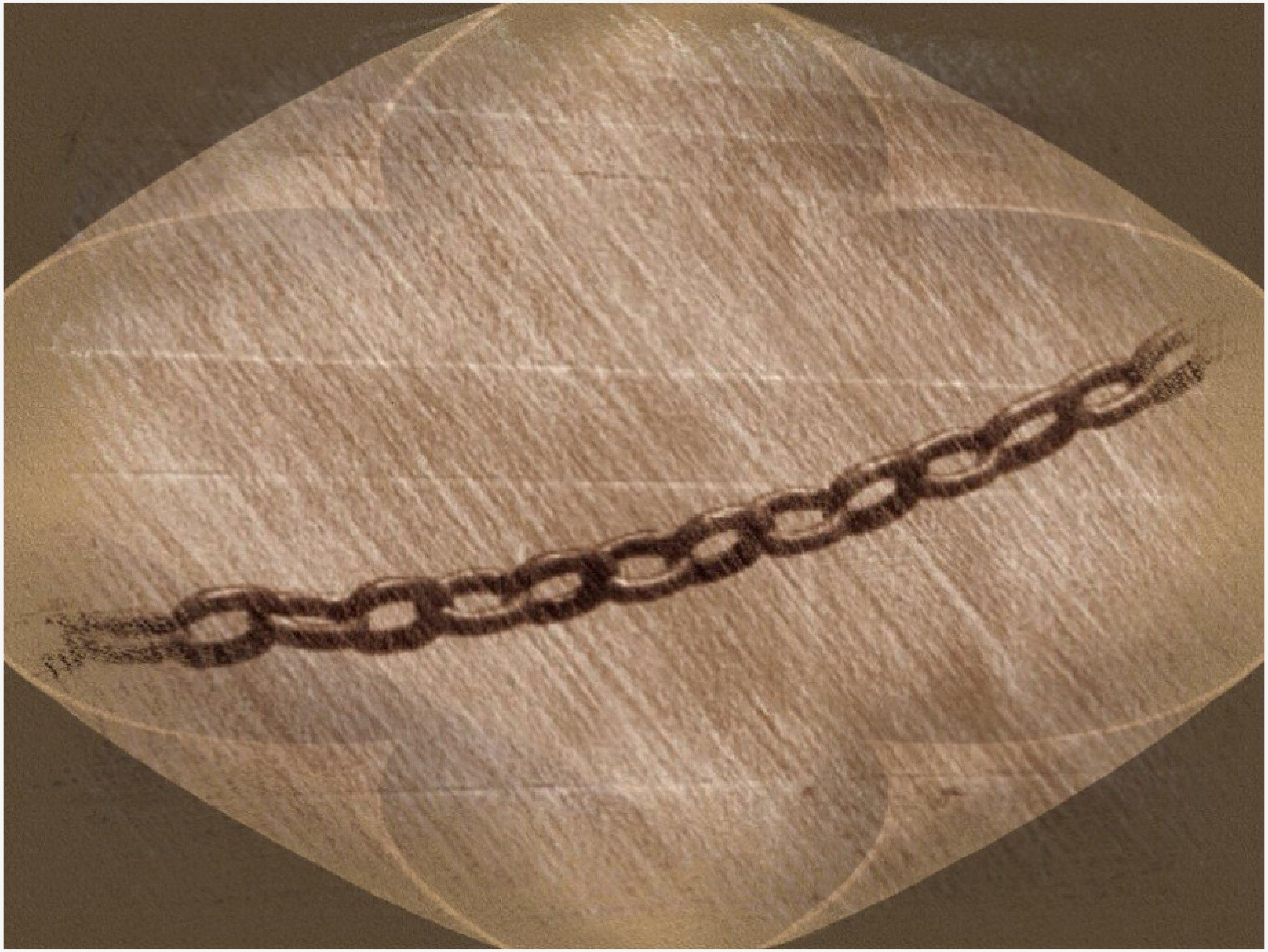


Differentiation nach einem Parameter

Kettenregel

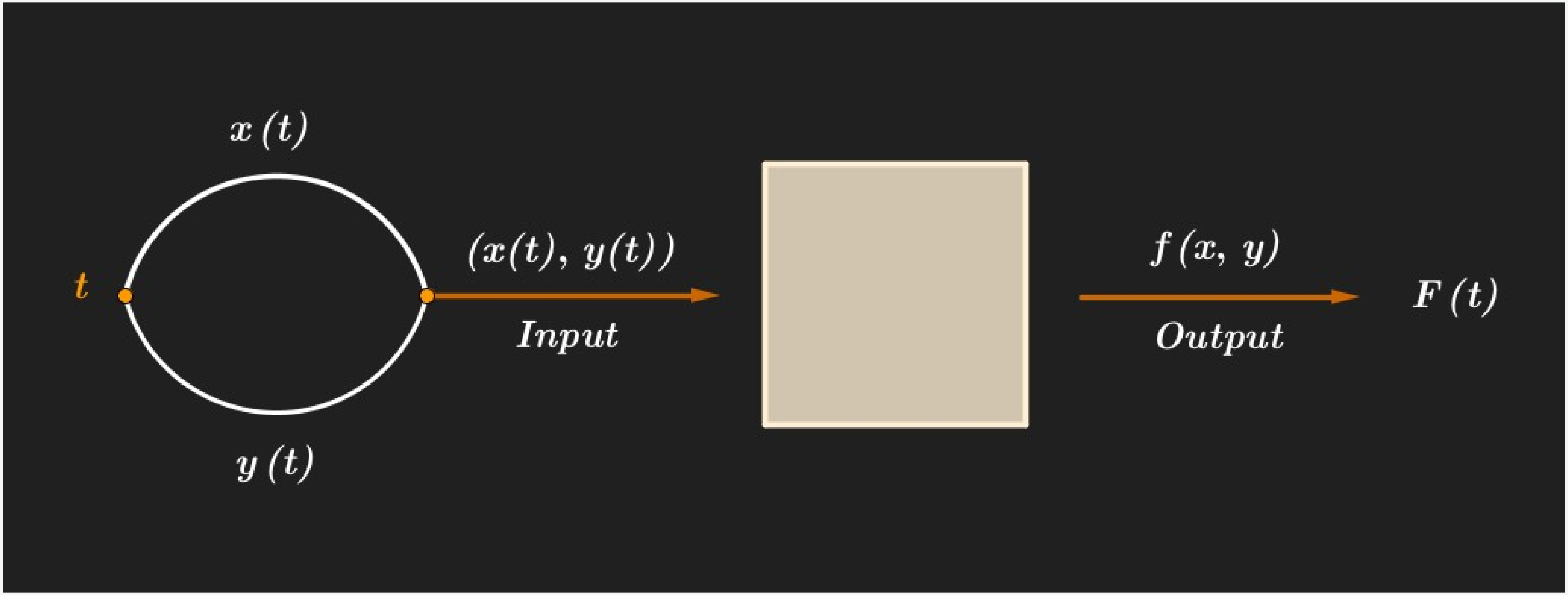


Abb. 1-1: Die Darstellung einer verketteten Funktion $z = f(x, y)$

$$f(x, y) = x^2 + 2y, \qquad x(t) = t + 2, \quad y(t) = t^2 - 2$$

$$f(x, y) = x^2 + 2y = (t + 2)^2 + 2(t^2 - 2) = 3t^2 + 4t = F(t)$$

$$f = f(x, y), \quad x = g(t), \quad y = h(t) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$$

t ist ein Parameter

$$f = f(x, y) = f(g(t), h(t)) = F(t)$$

$f = F(t)$ wird als eine zusammengesetzte, verkettete Funktion bezeichnet.

Wie bestimmt man die Ableitung solcher Funktion nach dem Parameter t?

$$\frac{df}{dt} = ?$$

Die Ableitung einer Funktion $f\,(x\,(t),\, y\,(t)) = F\,(t)$ nach dem Parameter t kann man aus dem totalen Differential df

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

in Form einer Kettenregel darstellen, indem man das totale Differential durch das Differential dt dividiert:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Häufig wird eine Kurzschreibweise verwendet:

$$\dot{f} = \dot{F}\,(t) = f_x\, \dot{x} + f_y\, \dot{y}$$

Bezeichnungen:

$f = f\,(x, y)$ ist eine “äußere” Funktion, $x = g(t),\; y = h\,(t)$ sind “innere” Funktionen.

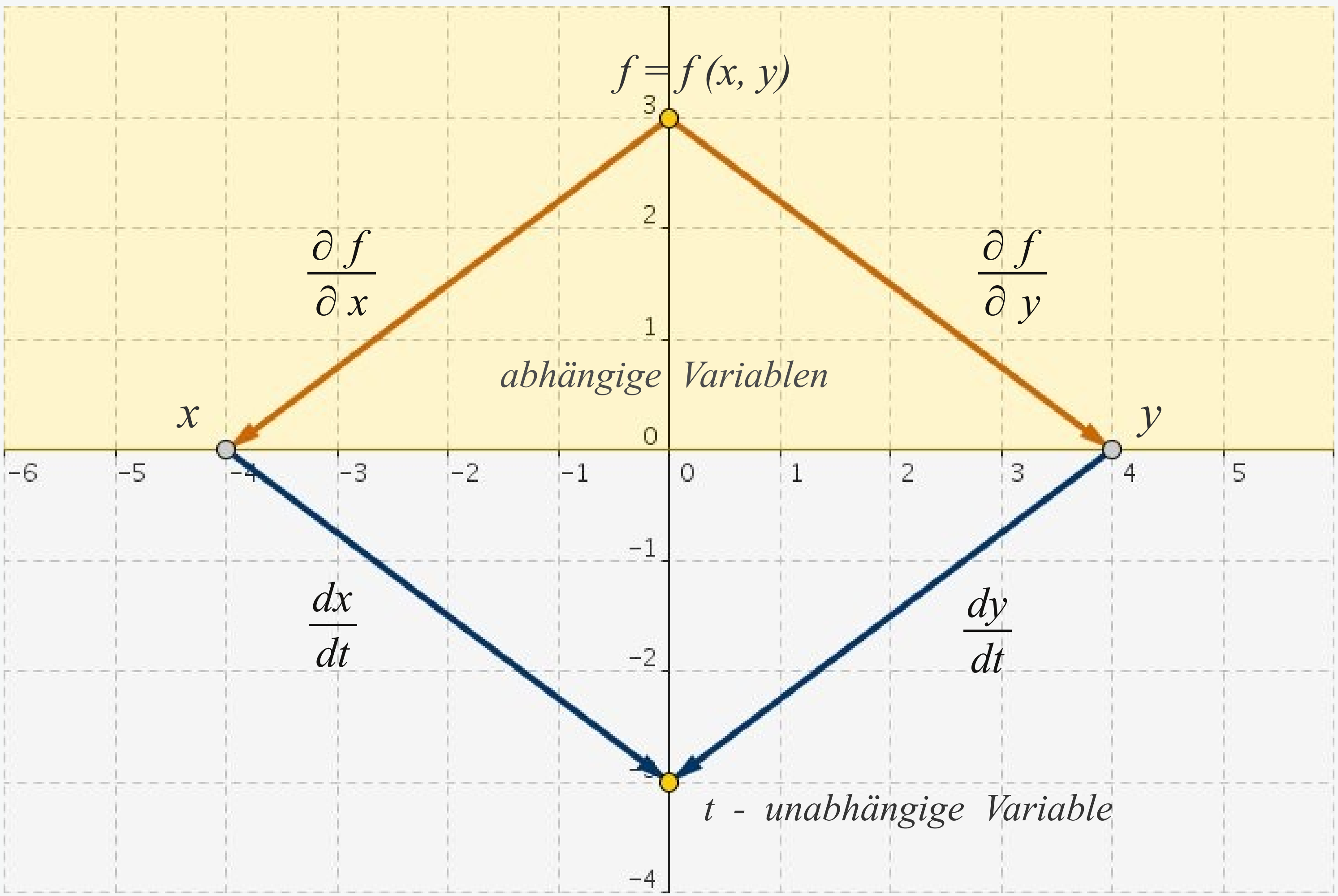


Abb. 1-2: Die Darstellung der Kettenregel für eine Funktion $z = f\,(x, y)$ mit Hilfe eines Diagramms

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Definition: Kettenregel

Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ sind differenzierbare Funktionen einer Variablen und $f(x, y)$ ist eine partiell differenzierbare Funktion, welche $(x(t), y(t))$ in Definitionsbereich enthält. Dann ist die verkettete Funktion

$$\begin{aligned} F \quad &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &t \to F(t) = f(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

differenzierbar und es gilt

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}$$

$$f = f(x, y) = f(g(t), h(t)) = F(t)$$

Die verkettete Funktion $f = F(t)$ beschreibt die Abhängigkeit der Höhenkoordinate z vom Kurvenparameter t, die Ableitung

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\,F(t)}{dt}$$

die Änderungsgeschwindigkeit dieser Höhenkoordinate längs der Kurve (auch in Abhängigkeit von t). Man spricht in diesem Zusammenhang von der Ableitung der Funktion $f = F(t)$ längs der Kurve C .

Die in der Kettenregel auftretenden Ableitungen können zu “Ableitungsvektoren” zusammengefasst werden:

“Äußere Ableitung”: die Komponenten sind die partiellen Ableitungen der “äußeren” Funktion $z = f(x, y)$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

“Innere Ableitung”: die Komponenten sind die Ableitungen der beiden “inneren” Funktionen $x = g(t)$ und $y = h(t)$ nach dem Parameter t.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{f} = (f_x, \; f_y) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}}$$

Die Kettenregel lässt sich auch auf Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variablen übertragen:

$$f = f(x, y, z), \quad x = g(t), \quad y = h(t), \quad z = j(t)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Die Kurzschreibweise:

$$\dot{f} = \dot{F}(t) = f_x \, \dot{x} + f_y \, \dot{y} + f_z \, \dot{z}$$

Bezeichnungen:

$f = f(x, y, z)$ ist eine "äußere" Funktion, $x = g(t)$, $y = h(t)$, $z = j(t)$ sind "innere" Funktionen.

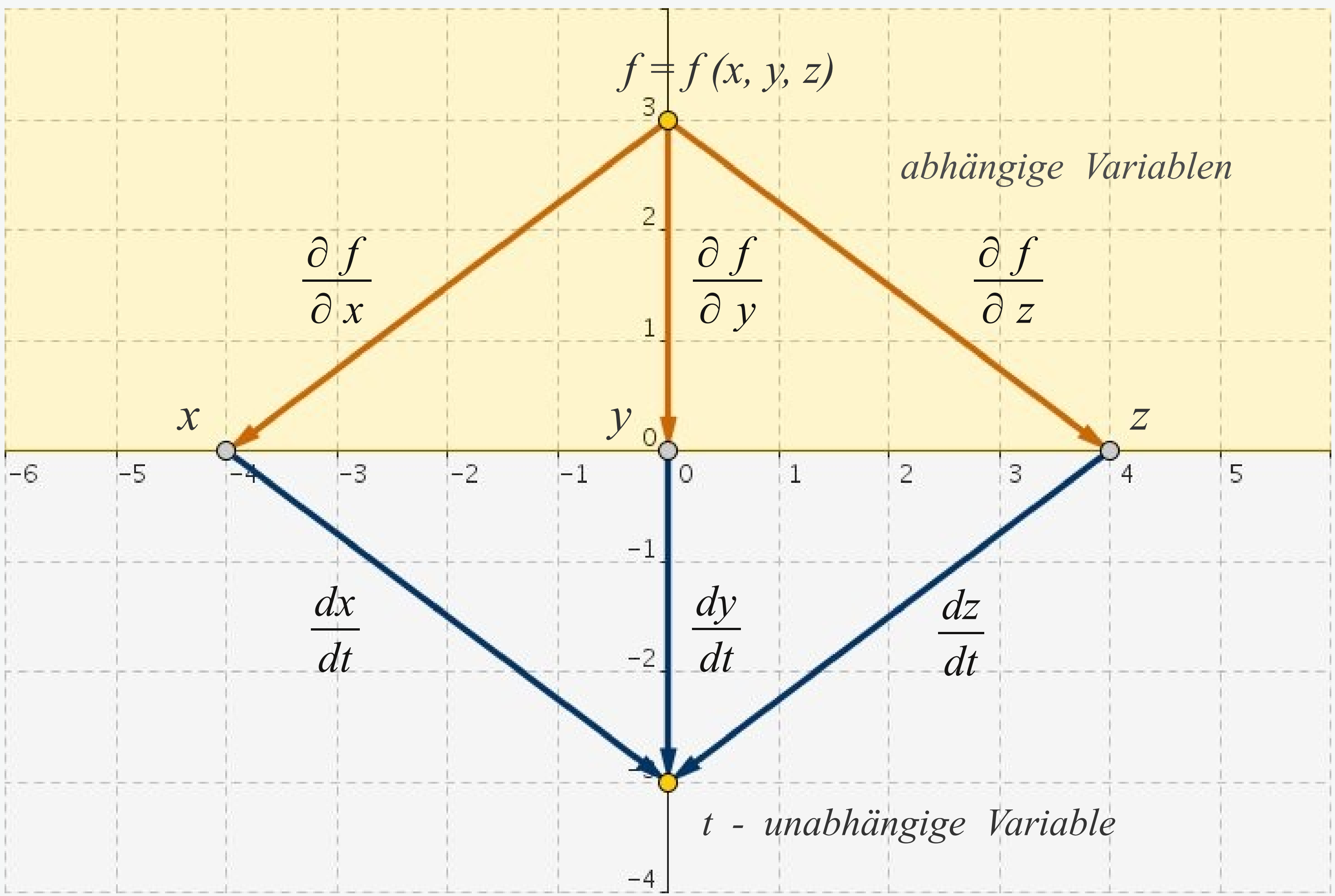
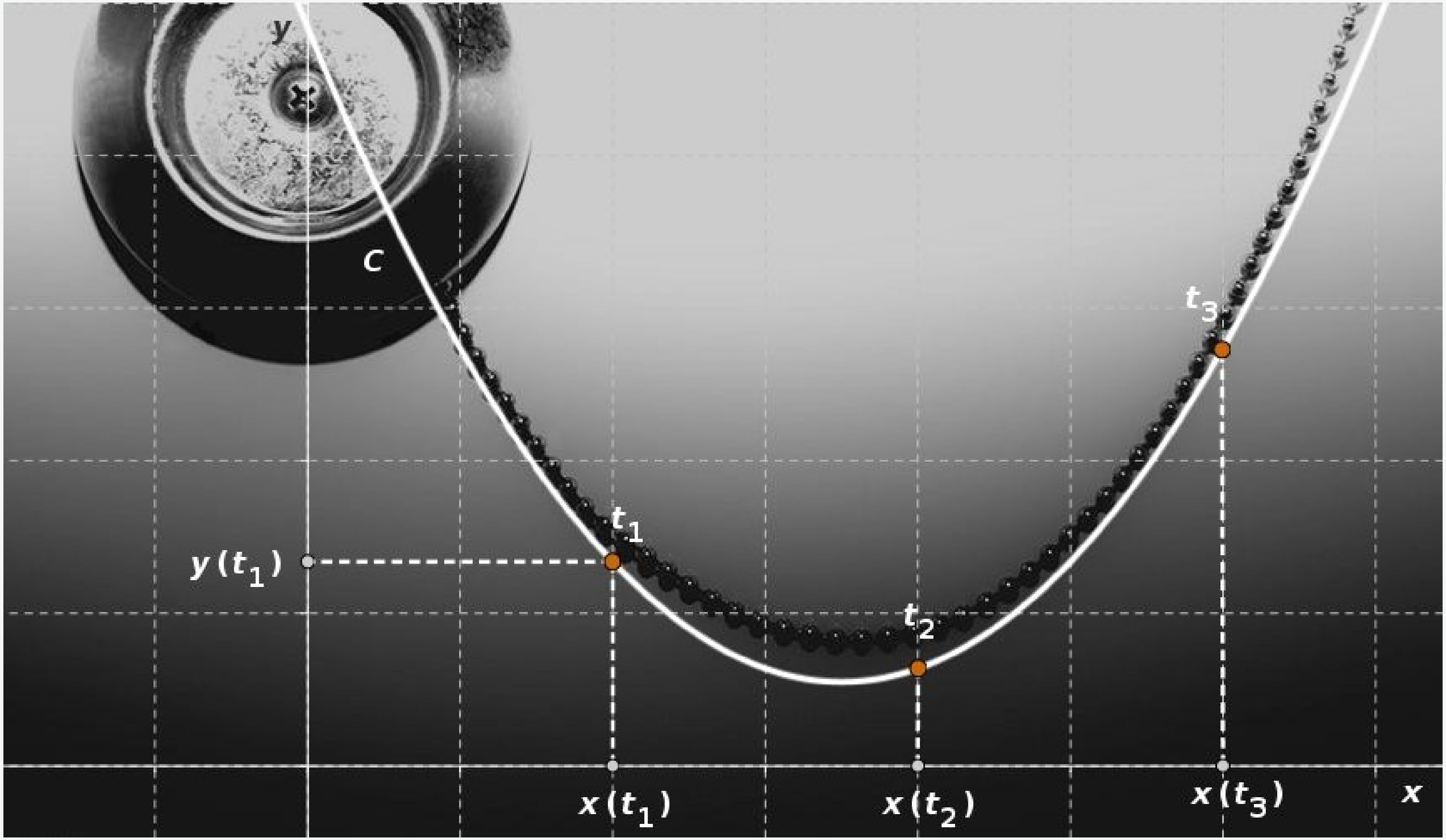


Abb. 1-3: Die Darstellung der Kettenregel für eine Funktion $f = f\,(x, y, z)$ mit Hilfe eines Diagramms

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Auch in diesem Fall können die in der Kettenregel auftretenden Ableitungen zu “Ableitungsvektoren” zusammengefasst werden:

$$\dot{f} = \left(f_x, \; f_y, \; f_z \right) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \; \frac{\partial f}{\partial y}, \; \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$



http://www.fotocommunity.de/search?q=kette&index=fotos&options=YToyOntzOjU6InN0YXJ0IjtpOjA7czo3OiJkaXNwbGF5IjtzOjU6IjE1MzQ0Ijt9/pos/52

Abb. 2: Parameterdarstellung einer ebenen Kurve C: $x = g(t)$, $y = h(t)$. Die Funktion $F(t)$ wird längst dieser Kurve abgeleitet

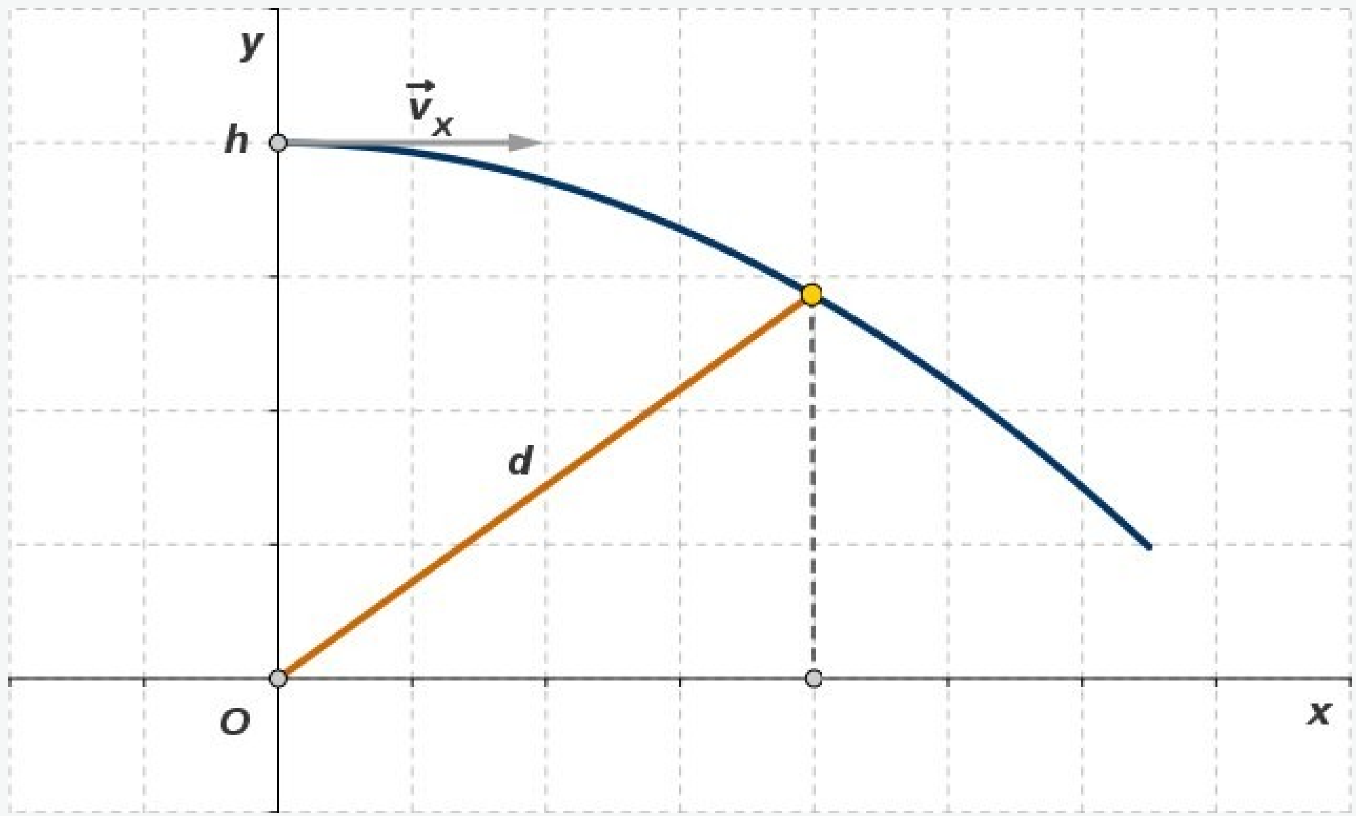


Abb. 3: Waagrechter Wurf, die Darstellung der Aufgabe

Beim waagrechten Wurf aus der Höhe h sind die Koordinaten des Massen-Punktes durch folgende Gleichungen gegeben:

$$x(t) = v_x \, t\,, \qquad y(t) = h - \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

Bestimmen Sie den Zeitpunkt t, bei dem der Abstand d zum Ursprung minimal wird

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x(t) = v_x\, t\,, \qquad y(t) = h - \frac{1}{2}\, g\, t^2\,, \qquad d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{d}{dt}\, d(x, y) = \frac{\partial\, d(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\, d(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial\, d(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\, \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{d(x, y)}$$

$$\frac{\partial\, d(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\, \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{d(x, y)}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x\,, \qquad \frac{dy}{dt} = -g\, t$$

$$\frac{d}{dt}\, d(x, y) = \frac{x}{d(x, y)}\, v_x - \frac{y}{d(x, y)}\, g\, t = \frac{1}{d(x, y)} \left(x\, v_x - y\, g\, t \right)$$

Der Abstand d zum Ursprung ist minimal, wenn:

$$\frac{d}{dt}\, d\,(x\,,\, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{d\,(x\,,\,y)} \left(x\, v_x - y\, g\, t \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x\, v_x - y\, g\, t = 0, \qquad x = x\,(t)\,, \qquad y = y\,(t)$$

$$v_x^2\, t - g\, t \left(h - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad t \left(v_x^2 - g\, h + \frac{1}{2}\, g^2\, t^2 \right) = 0$$

1. $t = 0,$ 2. $v_x^2 - g\, h + \frac{1}{2}\, g^2\, t^2 = 0$

$$t^2 = \frac{2}{g^2}\, (g\, h - v_x^2)$$

$$t = \frac{\sqrt{2}}{g}\, \sqrt{|\, g\, h - v_x^2|}$$

$$x(t) = v_x\, t\,, \qquad y(t) = h - \frac{1}{2}\, g\, t^2, \qquad d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d(x, y) = d(t) = \sqrt{(v_x\, t)^2 + \left(h - \frac{1}{2}\, g\, t^2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{g^2}{4}\, t^4 + (v_x^2 - g\, h)\, t^2 + h^2}$$

$$\frac{d}{dt}\, d(t) = \frac{g^2 t^3 + 2\,(v_x^2 - g\, h)\, t}{\sqrt{\frac{g^2}{4}\, t^4 + (v_x^2 - g\, h)\, t^2 + h^2}} =$$

$$= \frac{1}{d(t)}\, (g^2 t^3 + 2\,(v_x^2 - g\, h)\, t) = \frac{t}{d(t)}\, (g^2 t^2 + 2\,(v_x^2 - g\, h))$$

$$\frac{d}{dt}\, d(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t\, (g^2 t^2 + 2\,(v_x^2 - g\, h)) = 0$$

1. $t = 0,$ 2. $t = \dfrac{\sqrt{2}}{g} \sqrt{|\, g\, h - v_x^2|}$