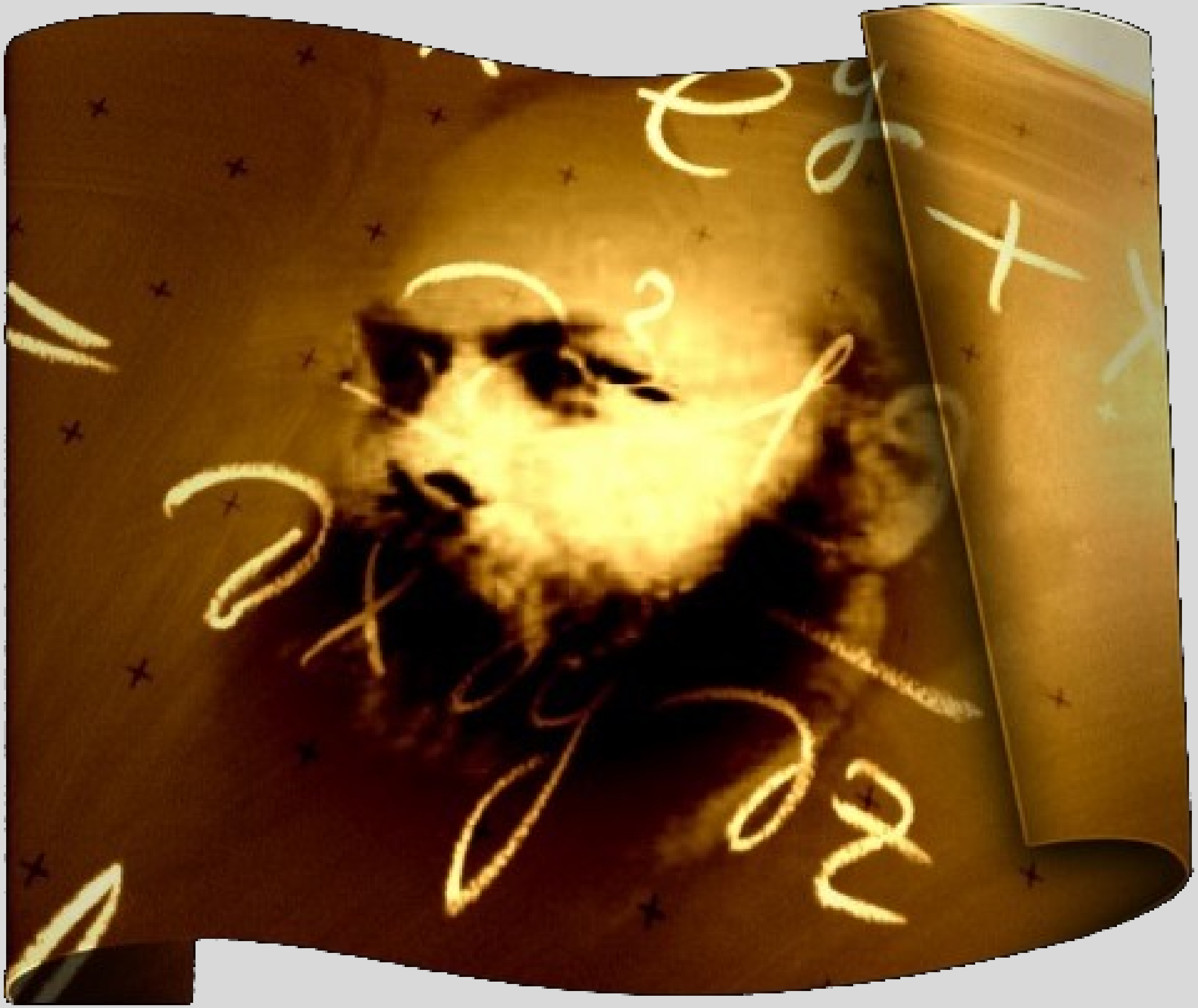

Satz von Schwarz

1-E

Prüfen Sie am Beispiel einer der folgenden Funktionen, dass die gemischten partiellen Ableitungen *2*. Ordnung gleich sind

$a)\quad f(x, y) = \cos(x + 2y)$

$b)\quad f(x, y) = \sin(x^2 + y^3)$

$c)\quad f(x, y) = x\, y^2$

$d)\quad f(x, y) = \ln(3x - 2y)$

$e)\quad f(x, y) = e^x\, y^2$

$f)\quad f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$

Partielle Ableitungen höherer Ordnung: Lösung 1

a) $f(x, y) = \cos(x + 2y), \qquad f_{xy} = f_{yx} = -2\cos(x + 2y)$

b) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^3), \qquad f_{xy} = f_{yx} = -6xy^2 \sin(x^2 + y^3)$

c) $f(x, y) = x y^2, \qquad f_{xy} = f_{yx} = 2y$

d) $f(x, y) = \ln(3x - 2y), \qquad f_{xy} = f_{yx} = \dfrac{6}{(3x - 2y)^2}$

e) $f(x, y) = e^x y^2, \qquad f_{xy} = f_{yx} = 2y\, e^x$

f) $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$

$$f_{xy} = f_{yx} = -\sin(x + y) + \cos(x - y)$$

Satz von Schwarz:

Ist eine Funktion f in einer Umgebung U des Punktes P k-mal partiell differenzierbar und sind alle k-ten Ableitungen in U stetig, so ist die Differentiationsreihenfolge in allen q-ten partiellen Ableitungen mit $q \leq k$ vertauschbar.

Für die gemischten partiellen Ableitungen *2.* bzw. *3.* Ordnung einer Funktion $z = f(x, y)$ gilt somit unter den Voraussetzungen des Satzes von Schwarz :

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$f_{xxy} = f_{yxx} = f_{xyx}$$

$$f_{yxy} = f_{yyx} = f_{xyy}$$

Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), deutscher Mathematiker

1. Für die in den Anwendungen benötigten Funktionen ist der Satz von Schwarz in der Regel gültig.

2. Der Satz von Schwarz bringt in der Praxis einen Zeitgewinn, da er die Anzahl der verschiedenen partiellen Ableitungen erheblich reduziert.

Bestimmen Sie für die Funktionen

a) $f(x, y, z) = x^3 e^y + x^2 + z\, e^{x y}$

b) $f(x, y, z) = \cos(x y) + \sin(y^2) + x\, y \cos z$

c) $f(x, y, z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{\sqrt{z - y^2}}{z}$

d) $f(x, y, z) = \ln(x y z) + x\, y\, e^z + e^{x^2 + y^2}$

e) $f(x, y, z) = \cos(x^2 - y^2) + e^{x + y + z}$

die gemischte partielle Ableitung 3. Ordnung

$$f_{x y z} = \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$$

$$f(x, y, z) = x^3 e^y + x^2 + z e^{xy}$$

Wir bestimmen die gemischte partielle Ableitung 3. Ordnung

$$f_{xyz} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \, \partial y \, \partial z}$$

1 Möglichkeit:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^3 e^y + x^2 + z e^{xy} \right) = 3 x^2 e^y + 2x + y z e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(3 x^2 e^y + 2x + y z e^{xy} \right) =$$

$$= 3 x^2 e^y + z e^{xy} + x y z e^{xy} = 3 x^2 e^y + z \, (1 + x y) e^{xy}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \, \partial y \, \partial z} \left(3 x^2 e^y + z \, (1 + x y) e^{xy} \right) = (1 + x y) e^{xy}$$

$$f(x, y, z) = x^3 e^y + x^2 + z\,e^{x y}$$

2 Möglichkeit:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(x^3 e^y + x^2 + z\,e^{x y} \right) = e^{x y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x y} \right) = y\,e^{x y}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z\,\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\,e^{x y} \right) = (1 + x\,y)\,e^{x y}$$

Es ist einfacher mit der Ableitung nach z anzufangen!

Vertauschen der Reihenfolge bei gemischten Ableitungen kann viel Zeit sparen!

$b)\quad f(x, y, z) = \cos(x\,y) + \sin(y^2) + x\,y\cos z$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}(x\,y\cos z) = -\sin z$$

$c)\quad f(x, y, z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{\sqrt{z - y^2}}{z}, \qquad \dfrac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = 0$

$d)\quad f(x, y, z) = \ln(x\,y\,z) + x\,y\,e^z + e^{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\left(\ln(x\,y\,z) + x\,y\,e^z\right) = e^z$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln(x\,y\,z) = \frac{1}{x}$$

$e)\quad f(x, y, z) = \cos(x^2 - y^2) + e^{x + y + z}$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}e^{x + y + z} = e^{x + y + z}$$

Bestimmen Sie für die Funktionen

a) $f(x, y) = x^4 e^x y^2 + 2$

b) $f(x, y) = y(\sin x - x^4)$

c) $f(x, y) = x^2 \cdot y^2 + y \sin(x^3) + e^x$

die gemischte partielle Ableitung 5. Ordnung

$$f_{xxyyy} = \frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \, \partial y^3}$$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \, \partial y^3} \qquad oder \qquad \frac{\partial^5 f}{\partial y^3 \, \partial x^2}$$

$$a) \quad f(x, y) = x^4 e^x y^2 + 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0$$

$$b) \quad f(x, y) = y \, (\sin x - x^4), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2} = 0$$

$$c) \quad f(x, y) = x^2 \cdot y^2 + y \sin(x^3) + e^x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0$$

In allen Fällen ist es einfacher mit der Ableitung nach y anzufangen!

Bestimmen Sie für die Funktionen

$a)\quad f(x, y) = x\, e^{x+y} + e^{x}$

$b)\quad f(x, y) = \sin(y + 2x)$

$c)\quad f(x, y) = \ln(x^2 y^2) + \ln(e^{xy})$

$d)\quad f(x, y) = \ln(x + y) + x y^2$

$e)\quad f(x, y) = x\sqrt{y} - y\sqrt{x}$

$f)\quad f(x, y) = \dfrac{1}{x\, y}$

die gemischte partielle Ableitung *4.* Ordnung

$$f_{yyxx} = \frac{\partial^4 f}{\partial y^2\, \partial x^2}$$

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie für jede Funktion die höchste partielle Ableitung:

$a)\quad f(x, y) = x^2 y + x y^2$

$b)\quad f(x, y) = x^5 y^2 + x y^4$

$c)\quad f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$

$d)\quad f(x, y) = y e^x + x y^2$

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie folgende partielle Ableitungen:

$a)\quad f(x, y) = x e^{2y}, \qquad \dfrac{\partial^6 f}{\partial y^6} = ?$

$b)\quad f(x, y) = e^{xy}, \qquad \dfrac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^4} = ?, \qquad \dfrac{\partial^8 f}{\partial x^7 \partial y} = ?$

$b)\quad f(x, y) = \ln(\sqrt{x y}), \qquad \dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4} = ?$