http://www.free-background-wallpaper.com/background-wallpaper-water.php

Partielle Differentialgleichungen

Eine partielle Differentialgleichung (Abkürzung PDGL) ist eine Differentialgleichung, die partielle Ableitungen enthält. Solche Gleichungen dienen der der mathematischen Modellierung vieler physikalischer Vorgänge. Die Lösungstheorie von PDGL ist für lineare Gleichungen weitgehend erforscht, bei nichtlinearen Gleichungen enthält die mathematische Theorie noch viel Lücken. Zur praktischen Berechnung von Lösungen werden in der Regel numerische Verfahren herangezogen.

Eine partielle Differentialgleichung für eine Funktion $f = f\,(x, y)$ in zwei unabhängigen Veränderlichen hat die allgemeine Form

$$F\left(x\,,\; y\,,\; f\,,\; \frac{\partial f}{\partial x},\; \frac{\partial f}{\partial y},\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\; \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y},\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\; \ldots,\; \frac{\partial^{(n)} f}{\partial y^n}\right) = 0$$

n ist die Ordnung der partiellen Differentialgleichung.

1) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x\, y\, f(x, y)\, \frac{\partial f}{\partial x}\, \frac{\partial f}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad f_{xy} = x\, y\, f \cdot f_x \cdot f_y$$

2) $$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\, y \quad \Leftrightarrow \quad f_{xx}^2 + f_{yy} = x\, y$$

3) $$\frac{\partial f}{\partial x} - x^2 y^3\, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_x - x^2 y^3\, f_y = 0$$

Manche physikalischen Prozesse kann man beschreiben, indem man die Veränderung einer Größe bezüglich einer einzelnen Variable betrachtet. So wird beispielsweise die Bewegung eines Massenpunktes im Raum durch die Bewegungsgleichung beschrieben, die nur Ableitungen nach der Zeit (nämlich Geschwindigkeit und Beschleunigung) enthält. Solche Gleichungen nennt man gewöhnliche Differentialgleichungen.

Die historisch ersten Differentialgleichungen waren die der gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Im Jahr 1590 erkannte Galileo Galilei den Zusammenhang zwischen der Fallzeit eines Körpers und seiner Fallge-Schwindigkeit sowie dem Fallweg und formulierte mit geometrischen Mitteln das Gesetz des freien Falles.

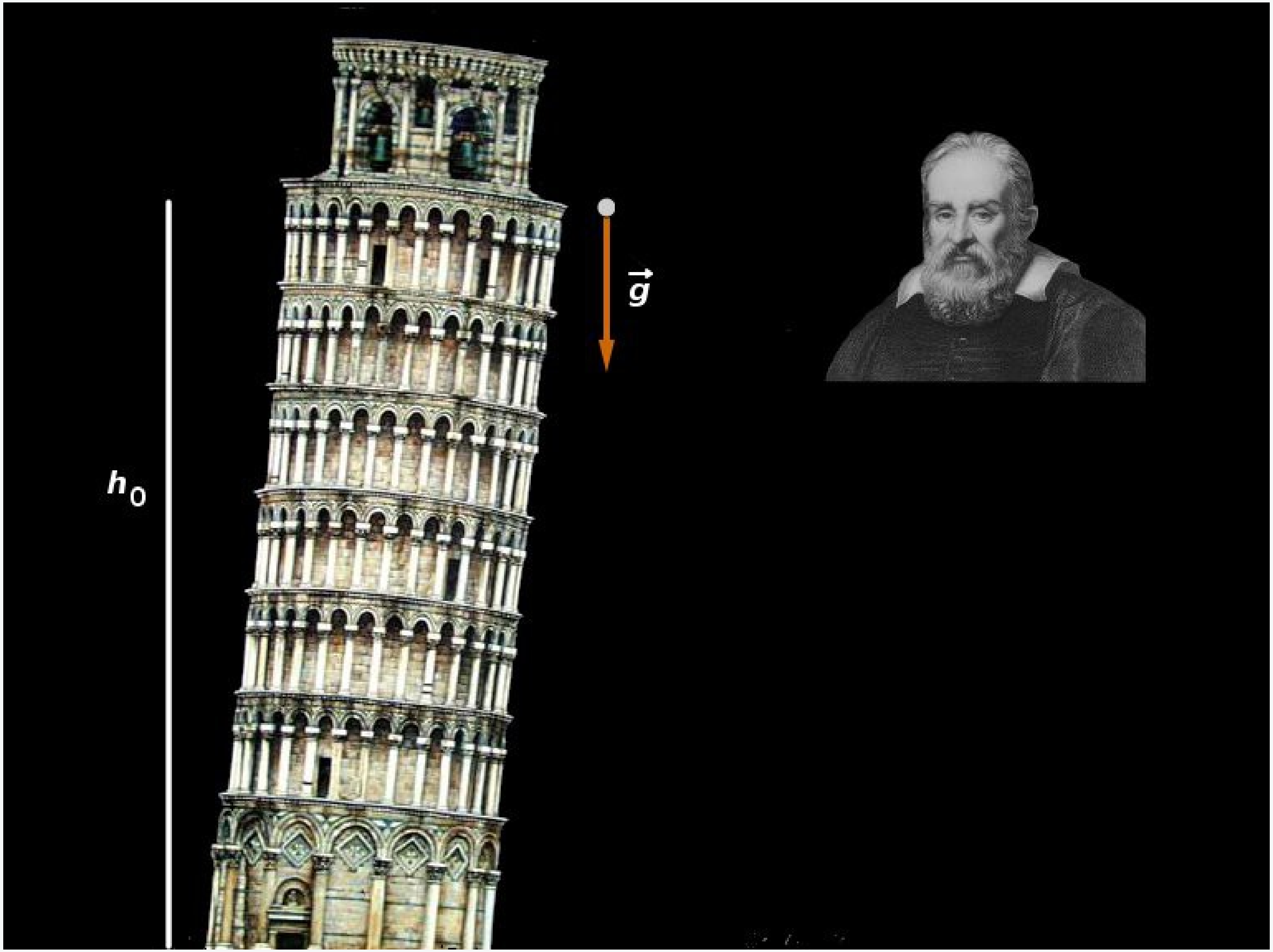
Die allgemeine Formel für den freien Fall lautet

$$h(t) = h_0 - \frac{g}{2}\, t^2$$

Der Körper wird in der Höhe h_0 ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen, die Luftreibung wird nicht berücksichtigt.

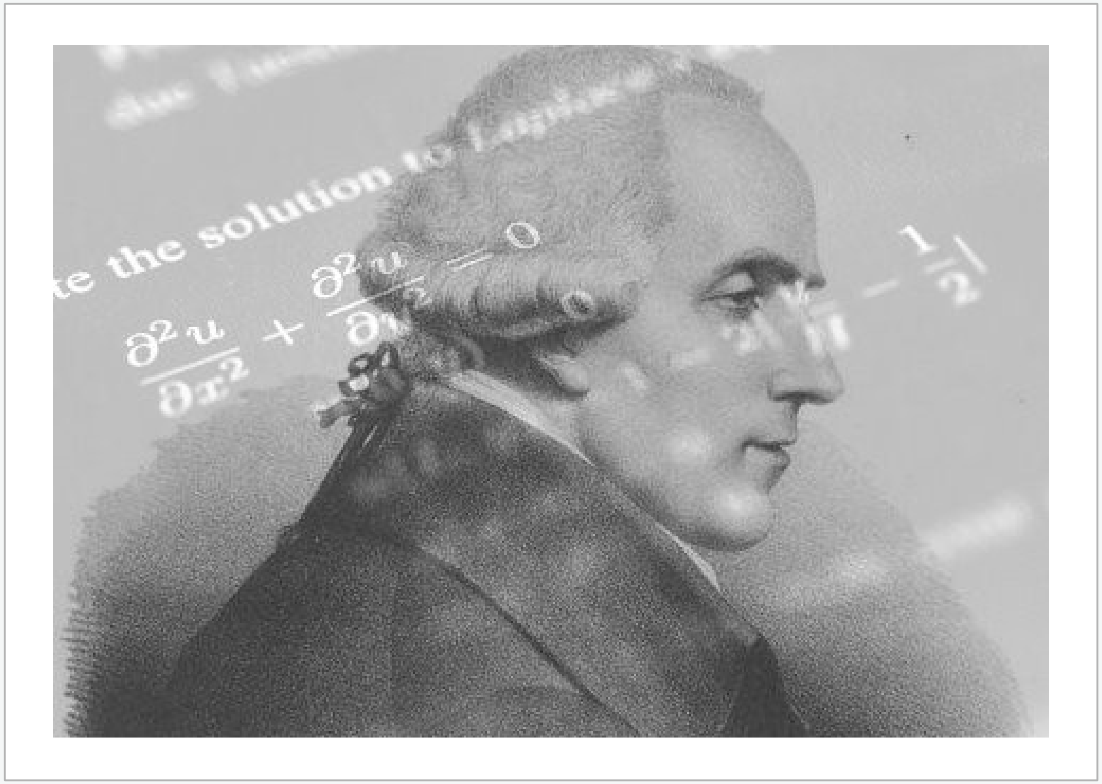
$$s(t) = \left| h_0 - h(t) \right| = \frac{g}{2}\, t^2$$

(Wikipedia)



http://www.goldammer.at/Goldammer/Grafik/Pisa.jpg

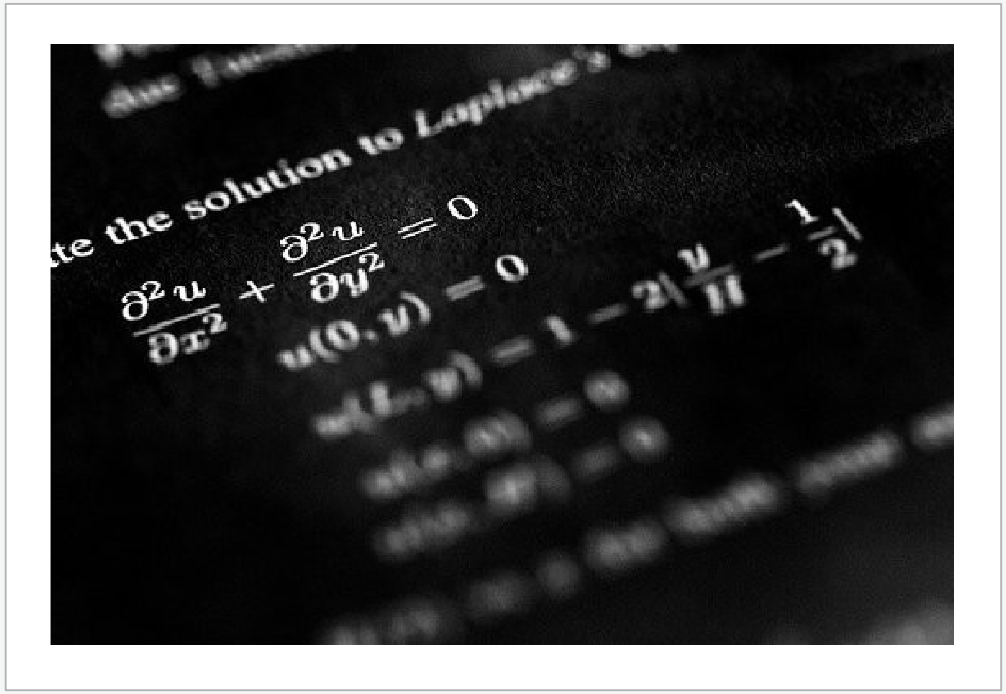
Abb. 1: Zur Illustration des freien Falles



http://www.flickr.com/photos/rocketdude/489565079/

Die Laplace-Gleichung ist nach dem französischen Mathematiker Pierre-Simon Laplace *(1749–1827)* benannt. Laplace hat zwei Monumentalwerke hinterlassen, eines über Himmelsmechanik und ein z weites über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Auch zur Theorie der Differentialgleichungen hat er wesentliche Beiträge geliefert.

Die Laplace-Gleichung

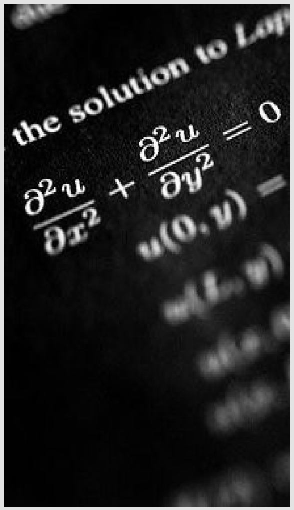


http://www.flickr.com/photos/rocketdude/489565079/

Die zweidimensionale Laplace-Gleichung $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Die dreidimensionale Laplace-Gleichung $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$

Die Laplace-Gleichung: Aufgabe 1



Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen in ihren Definitionsbereichen der Laplace-Gleichung genügen

$a)\quad f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

$b)\quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

$c)\quad f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

$d)\quad f(x, y) = e^{-2y}\cos(2x)$

Wenn wir an der Meeresküste stehen und eine Momentaufnahme der Wellen machen, zeigt das Bild ein regelmässiges Muster der Wellenkämme und -täler eines Augenblicks. Wir sehen eine in Bezug auf die Distanz periodische vertikale Bewegung. Wenn wir aber im Wasser stehen und die Wellen sich vorbei bewegen, spüren wir, wie sich das Wasser hebt und senkt. Wir sehen eine in der Zeit periodische vertikale Bewegung. In der Physik wird diese schöne Symmetrie durch die eindimensionale Wellengleichung ausgedrückt:

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}$$

Hier ist w die Wellenhöhe, x ist die Distanz entlang einer schwingenden Saite, die Distanz in der Luft (Schallwellen) oder die Distanz im Raum (Lichtwellen), t ist die Zeit. Die Größe c hängt vom Medium und vom Typ der Welle ab.

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen

1. $w = \sin(x + c\,t)$

2. $w = \sin(x + c\,t) + \cos(2\,x + 2\,c\,t)$

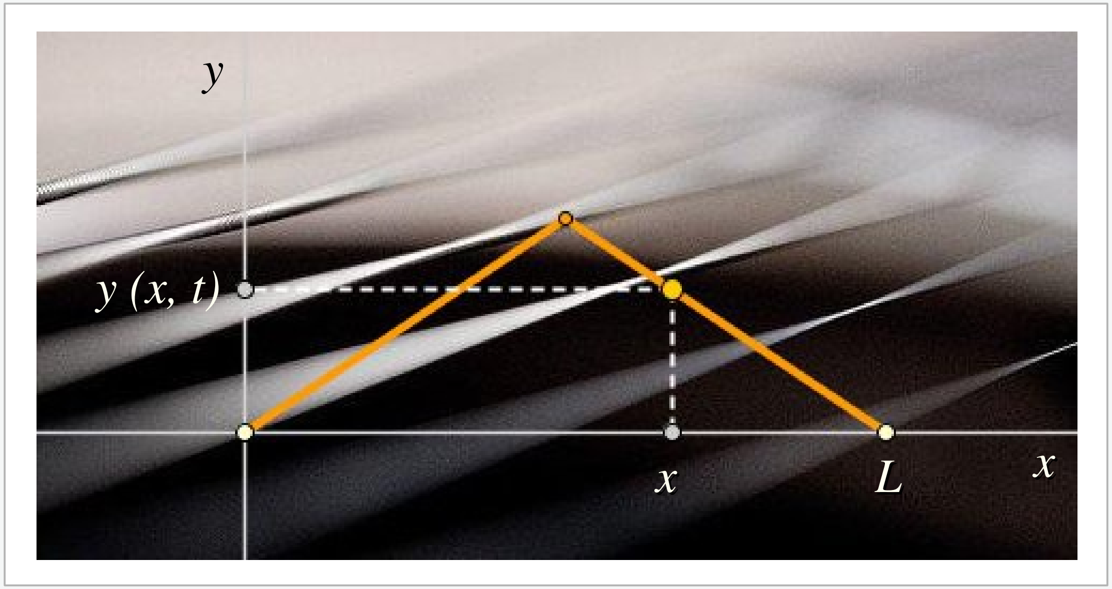
3. $w = \ln(2\,x + 2\,c\,t)$

die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

erfüllen.

http://www.free-background-wallpaper.com/background-wallpaper-water.php



http://www.flickr.com/photos/jonblock/448581594/

Wir betrachten eine Saite, die zwischen zwei Punkten $x = 0$ und $x = L$ auf der x-Achse gespannt ist. Die Saite wird zur Zeit $t = 0$ ausgelenkt und losgelassen, wodurch sie in Schwingung versetzt wird. Dieser Augenblick ist in der Abbildung dargestellt. $y\,(x, t)$ sei die Auslenkung der Saite zu irgendeiner Zeit $t > 0$ an einem beliebigen Punkt x im Intervall $[0, L]$.

Man kann zeigen, dass w *(x, t)* der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

genügt, wobei c eine Konstante ist. Dies ist die sogenannte eindimensionale Wellengleichung. Diese Gleichung hat *1746* *d'Alembert* gefunden.

Aufgabe 10:

Bestätige, dass $w = w\,(x, t)$ eine Lösung der Wellengleichung ist

$$w(x\,,\ t) = \frac{1}{2}\left[(x - c\,t)^2 + (x + c\,t)^2\right]$$