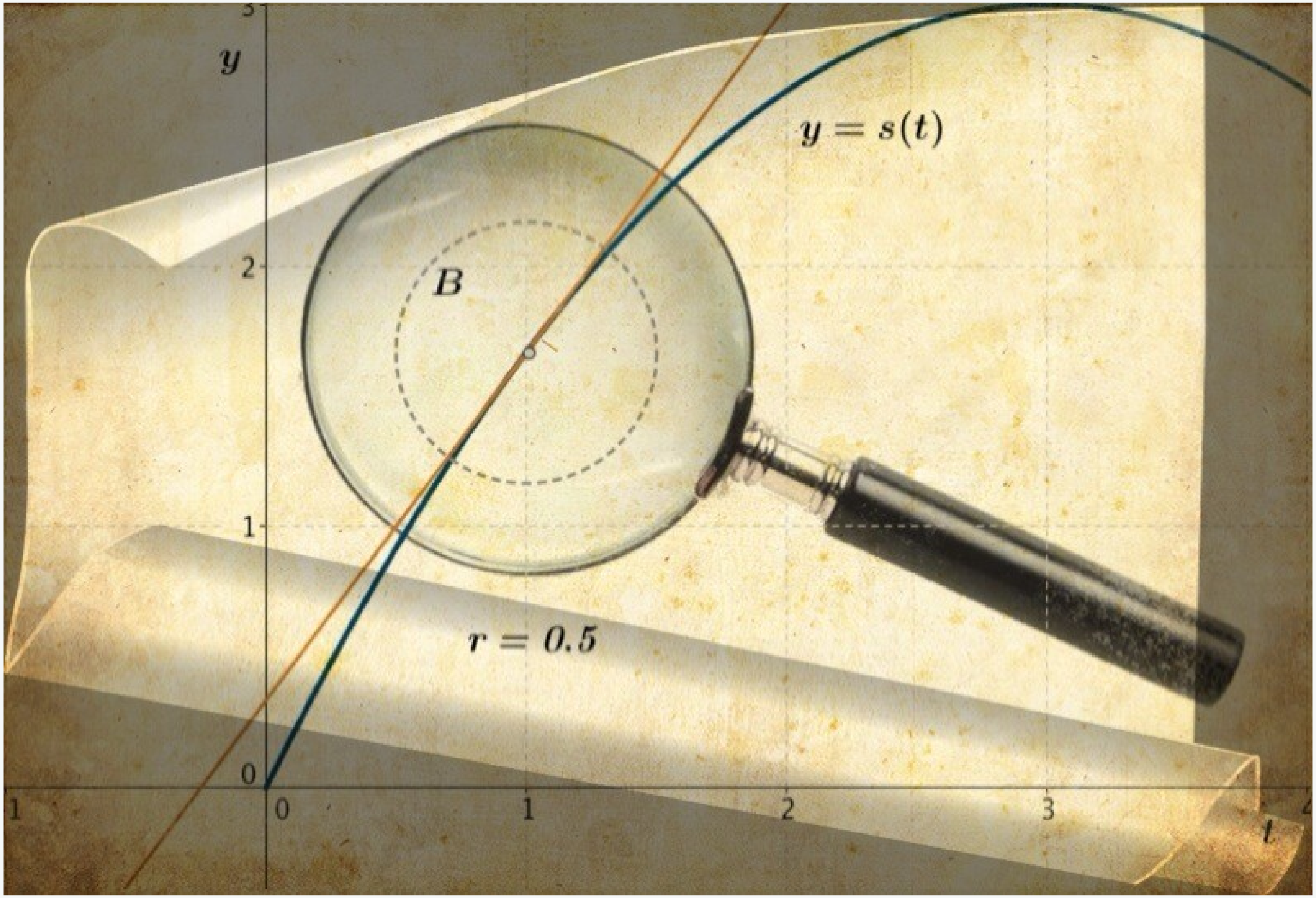


Differenzierbarkeit, Linearisierung: Teil 1

Visualisierung der partiellen Ableitung von $f(x, y)$ in x-Richtung

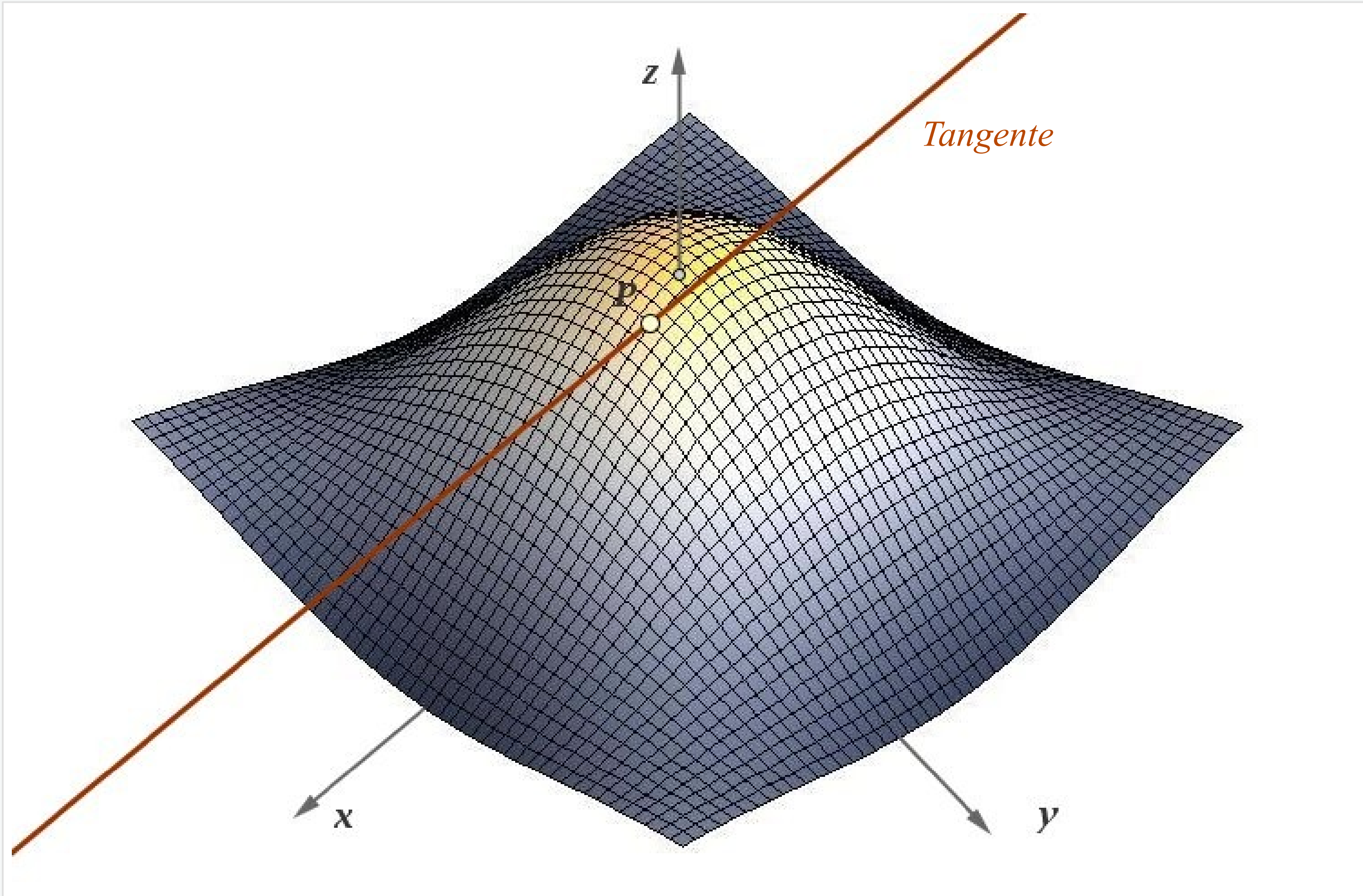


Abb. 1-1: Zum Begriff der partiellen Ableitung einer Funktion $f = f(x, y)$ in x-Richtung. Die Tangente im Punkt P liegt in einer Ebene, die parallel zur x,z-Ebene verläuft

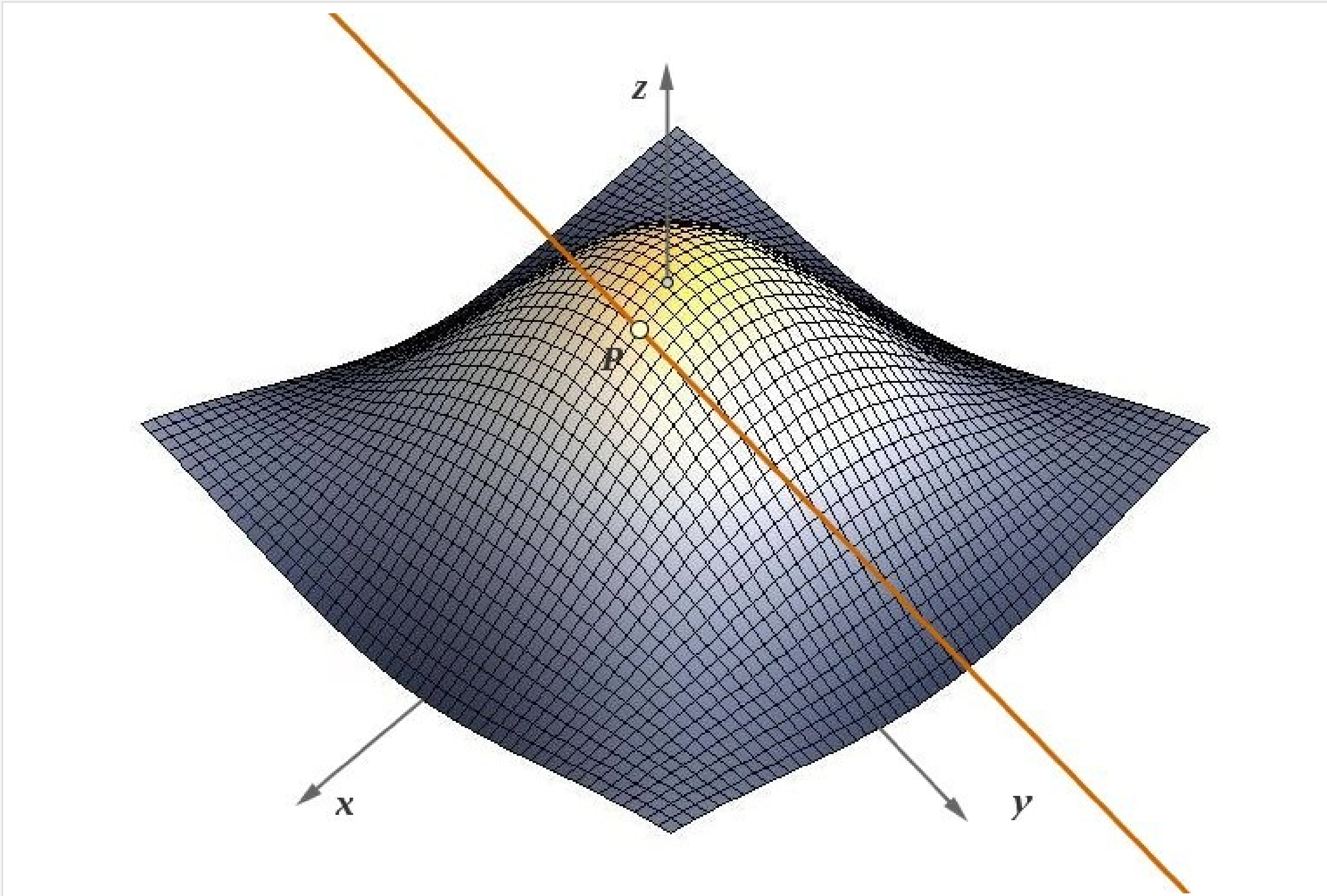


Abb. 1-2: Zum Begriff der partiellen Ableitung einer Funktion $f = f(x, y)$ in y-Richtung. Die Tangente im Punkt P liegt in einer Ebene, die parallel zur y,z-Ebene verläuft

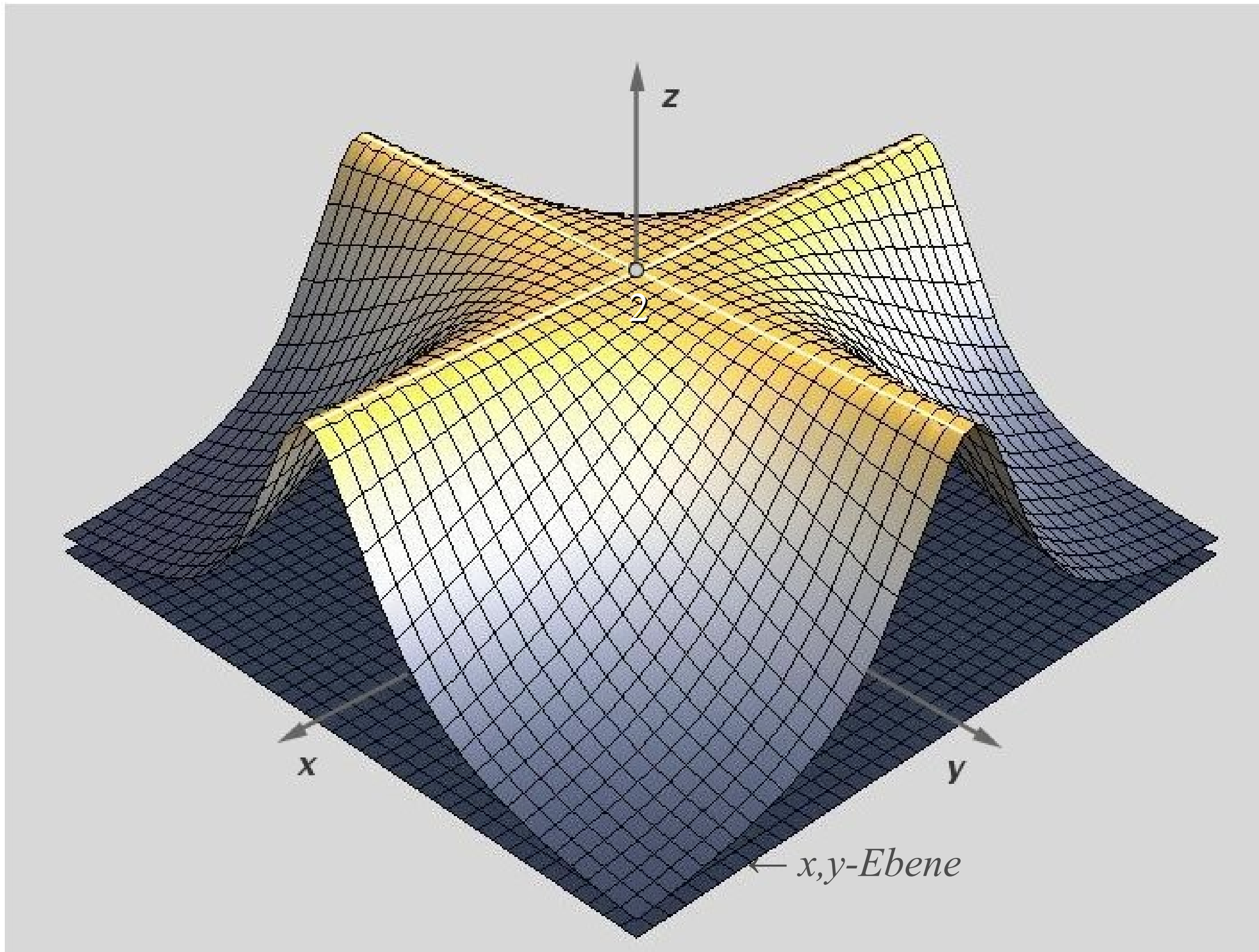
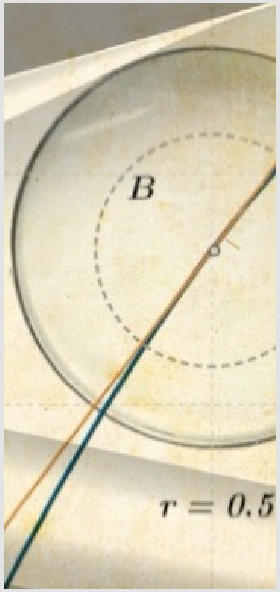


Abb. 1-3: Graphische Darstellung der Funktion f (x, y)

$$f\,(x\,,\ y) = \frac{2}{1 + x^2 \cdot y^2}$$



Analysiert man das Änderungsverhalten der Funktion

$$f(x, y) = \frac{2}{1 + x^2 \cdot y^2}$$

nur längs der Koordinatenachsen, so wird man keine Änderung bemerken

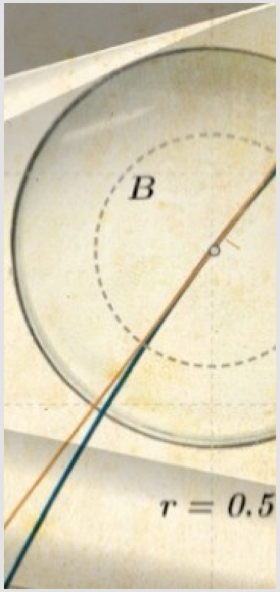
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{4 x y^2}{(1 + x^2 \cdot y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{4 x^2 y}{(1 + x^2 \cdot y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0$$

Die Schnittkurven der Funktion mit den x, z- und y, z-Ebenen liegen in der Ebene $z = 2$.



Da aber

$$f\,(x\,,\;0) = 2 \qquad \text{und} \qquad f\,(0,\;y) = 2$$

ergibt sich sofort

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x\,,\;0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\,(0,\;y) = 0$$

Doch Vorsicht ! Das Änderungsverhalten in x-Richtung bei $x = 0$ kann i.A. nicht studiert werden, indem man von vornherein $x = 0$ setzt. Entsprechendes gilt für y.

Beispiel:

$$f\,(x\,,\;y) = x \cdot y\,, \qquad f\,(0,\;y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(0,\;y) = y$$

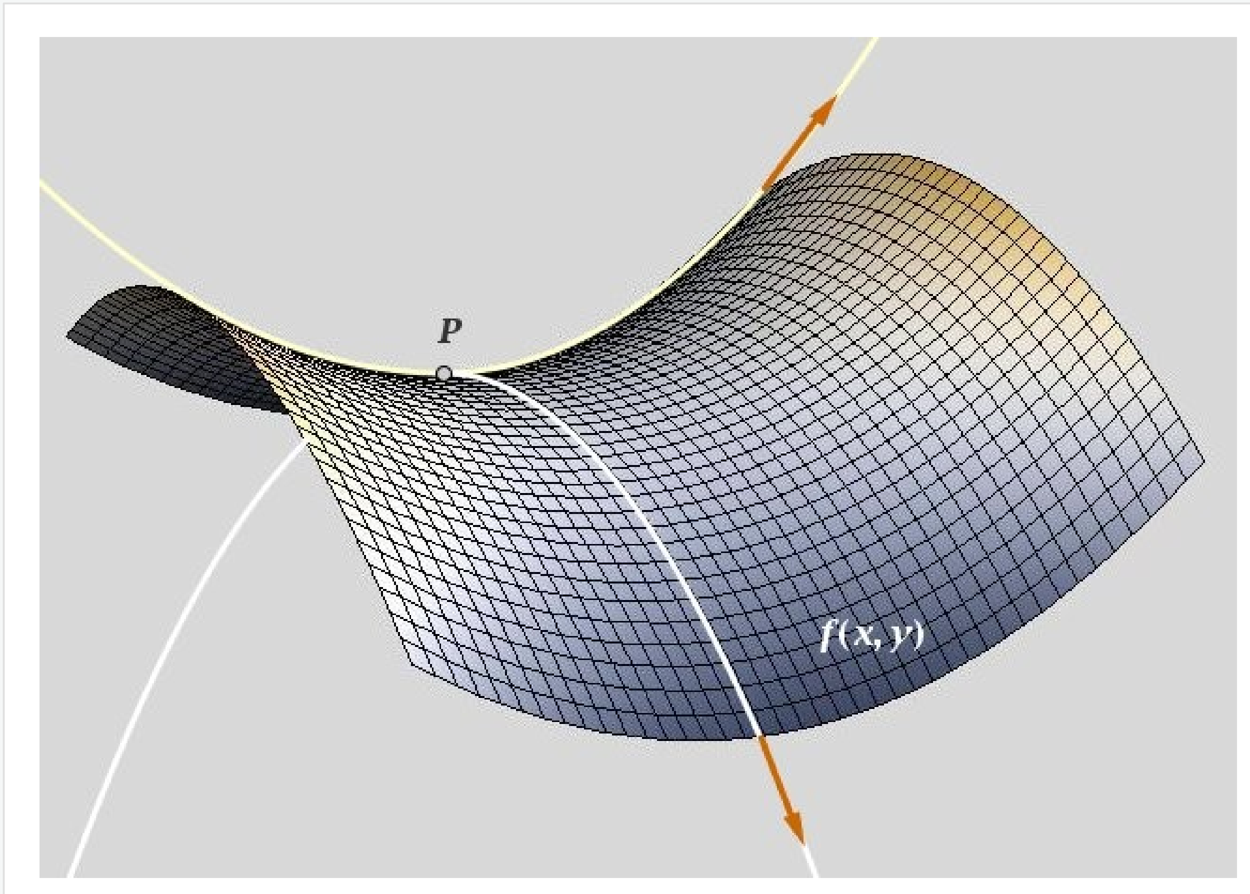
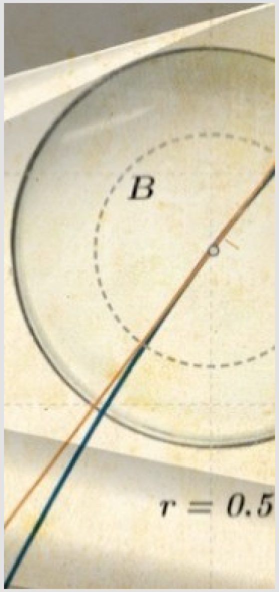


Abb. 1-4: Graphische Darstellung der Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ (hyperbolisches Paraboloid) und der Schnittkurven mit den x,z- und y,z-Ebenen

Eine Funktion mehrerer Variablen kann durchaus in einem Punkt sowohl eine positive als auch eine negative Steigung haben.



Partielle Ableitungen erfassen nur einen Teil des Änderungsverhaltens einer Funktion:

- Sie sind Ableitungen einer reduzierten Funktion, die nur von einer Variablen abhängt.
- Die Änderung parallel zu einer Koordinatenachse "spürt gar nichts" von den Änderungen in Richtung der anderen Koordinatenachsen.
- Die Existenz einer partiellen Ableitungen sagt nur etwas über die Glattheit der Fläche in der entsprechende Richtung aus, nicht aber für andere Richtungen.

?

Wie kann das Änderungsverhalten einer gegebenen Funktion von mehreren Variablen erfasst werden?

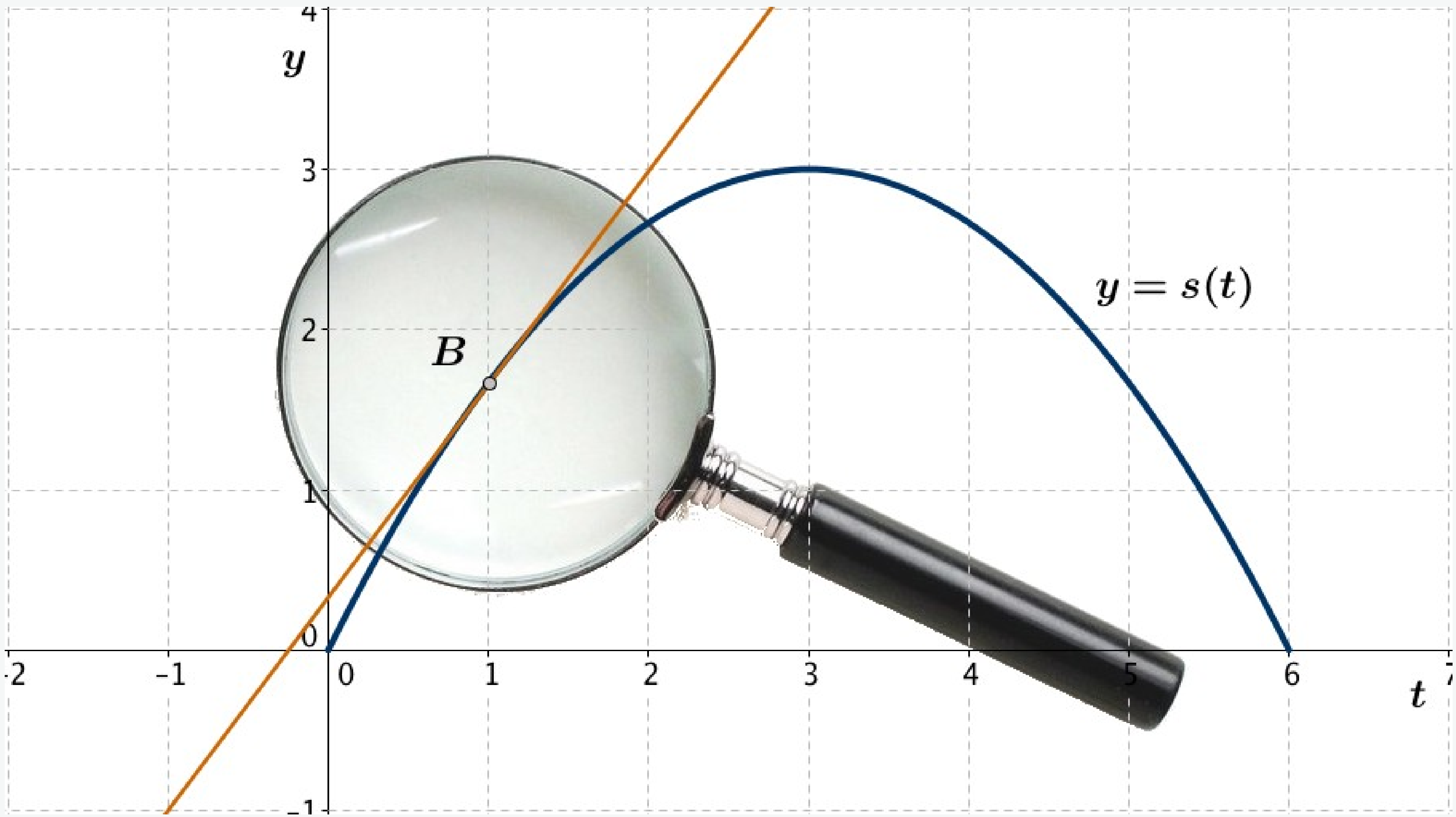


Abb. 2: Abschätzen der Steigung durch "Zoomen"

Sofort übertragen kann man das Konzept der linearen Approximierbarkeit.

http://www.flickr.com/photos/blogrodent/2053876697/

Nehmen wir unsere Erde wie eine Kugel wahr?

Wenn ja, warum?

http://27.media.tumblr.com/tumblr_li27bpbPZl1qfspsqo1_500.jpg

Wie nimmt der kleine Prinz seinen Planeten wahr?

Warum?

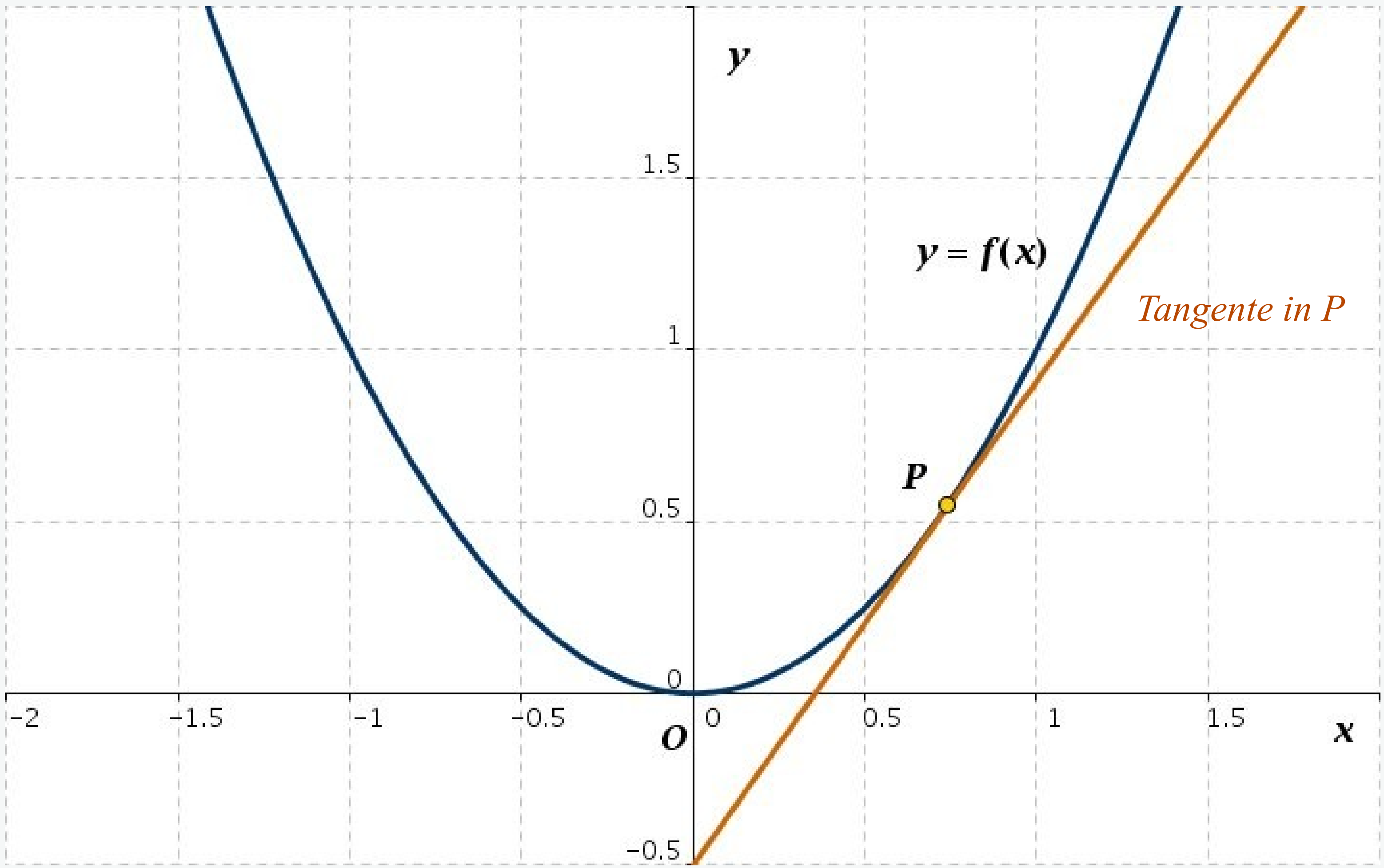


Abb. 3-1: Zum Begriff der lokalen Linearität einer Funktion $y = f(x)$

Was bedeutet es, dass eine Funktion lokal linear ist? Wie beschreiben wir lokale Linearität der Funktion?

Wir suchen eine Δx-Umgebung des Punktes P, in der die Funktion $y = f(x)$ linear aussieht.

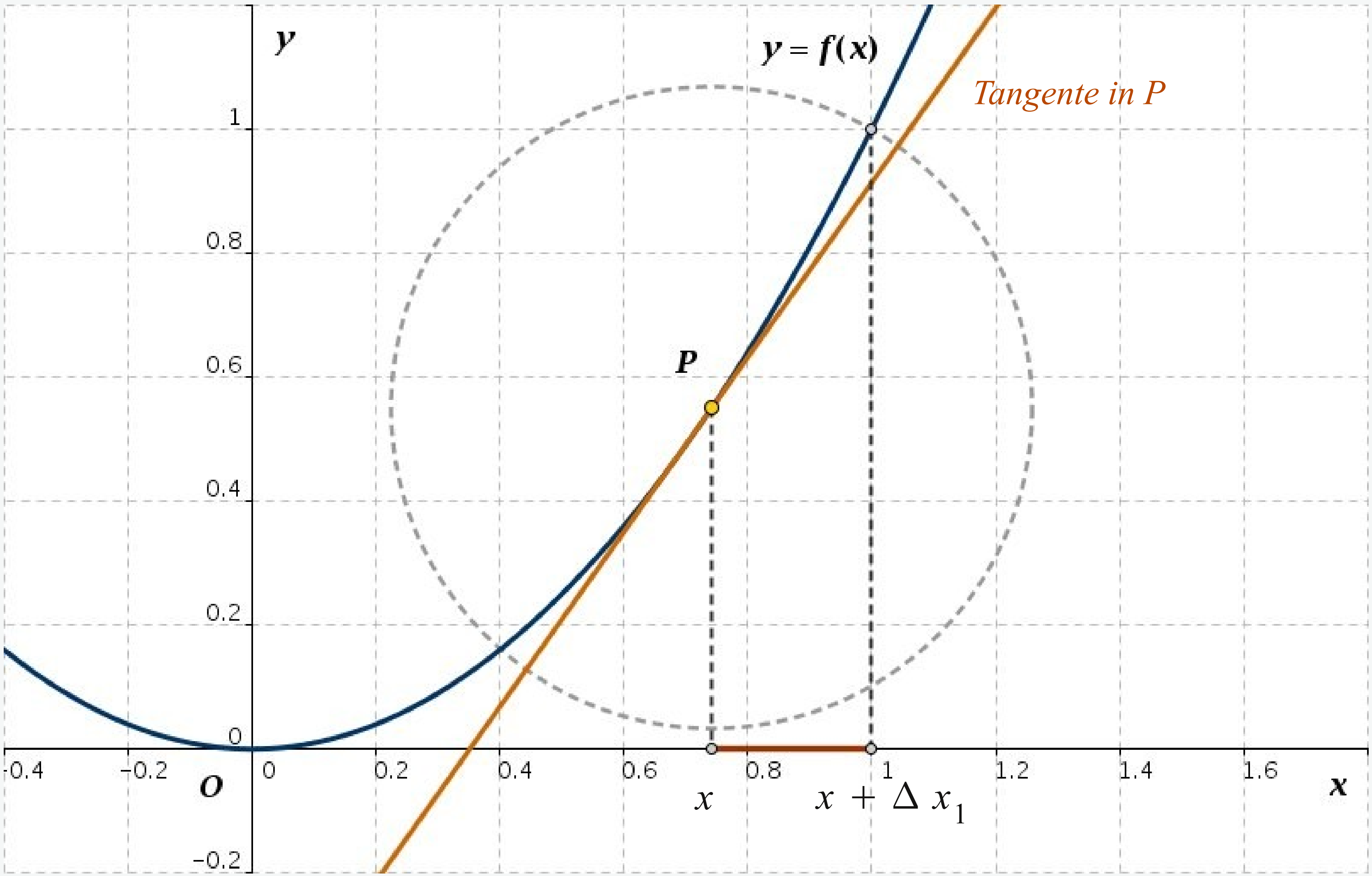


Abb. 3-2: Zum Begriff der lokalen Linearität einer Funktion $y = f(x)$. Die erste Umgebung des Punktes $P(x, f(x))$

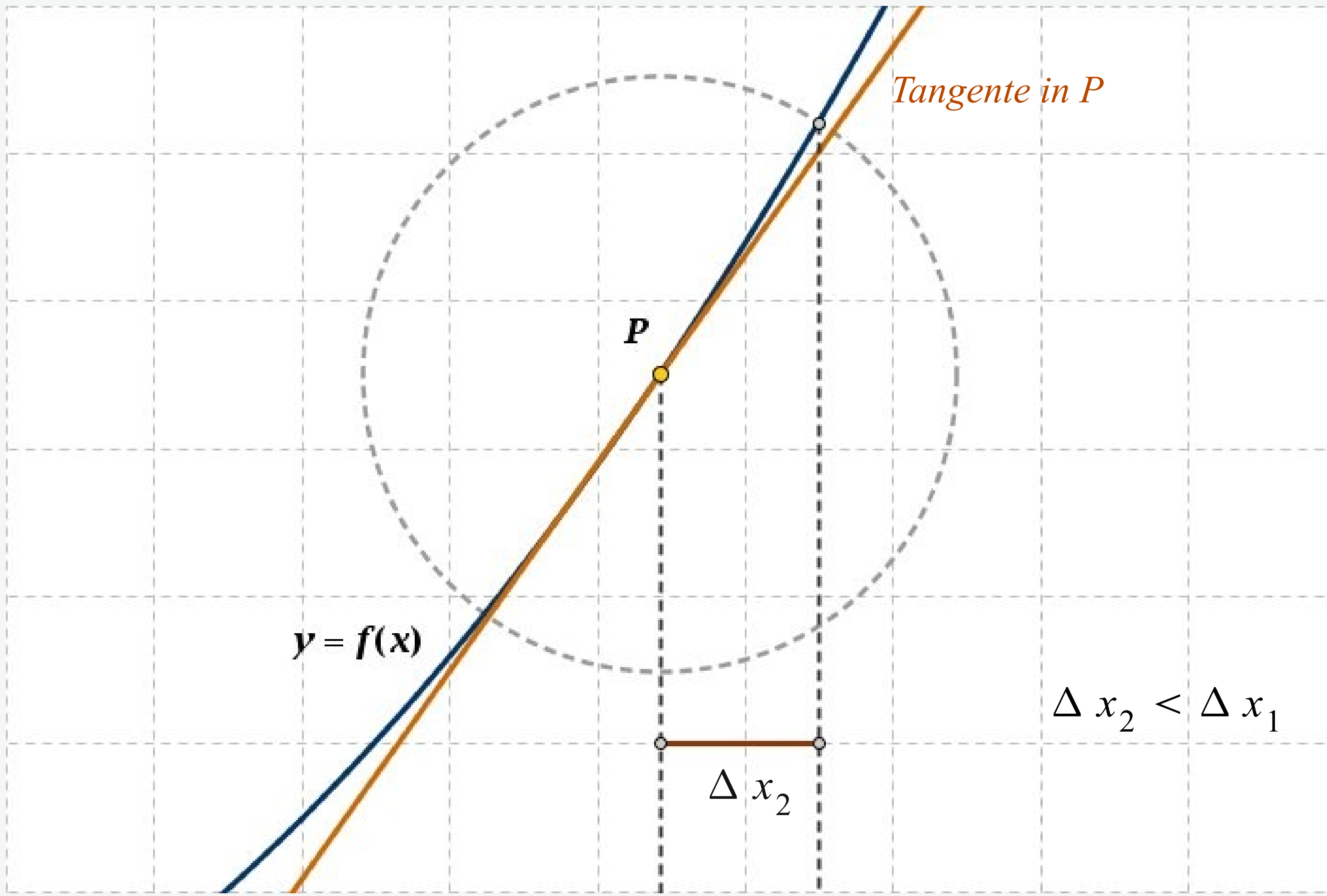


Abb. 3-3: Zum Begriff der lokalen Linearität einer Funktion $y = f(x)$. Die zweite Umgebung des Punktes $P(x, f(x))$

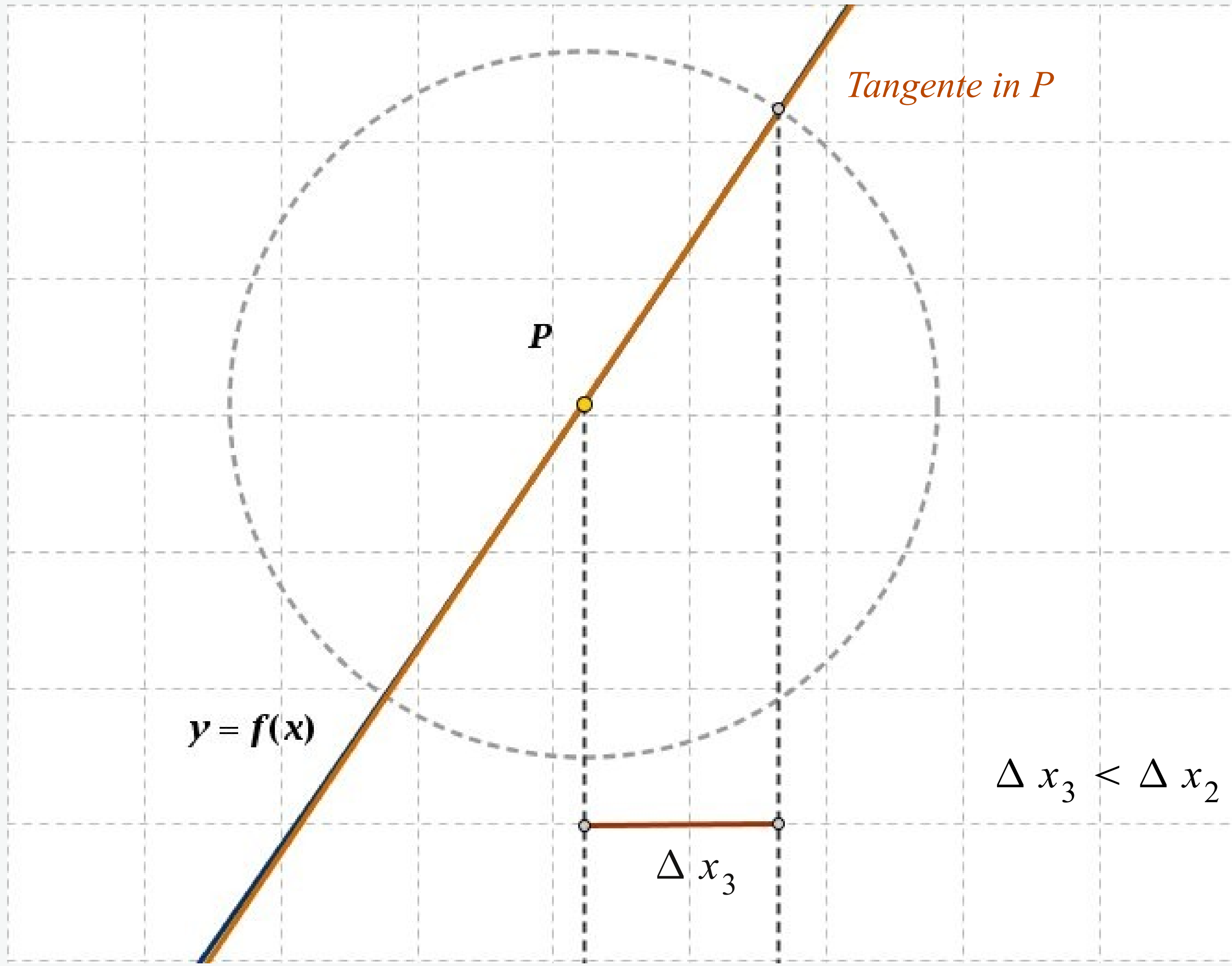


Abb. 3-4: Zum Begriff der lokalen Linearität einer Funktion $y = f(x)$. In dieser Umgebung des Punktes $P(x, f(x))$ kann man kaum einen Unterschied zwischen der Funktion und der Tangente bemerken

Lokale Linearität einer Funktion $y = f(x)$

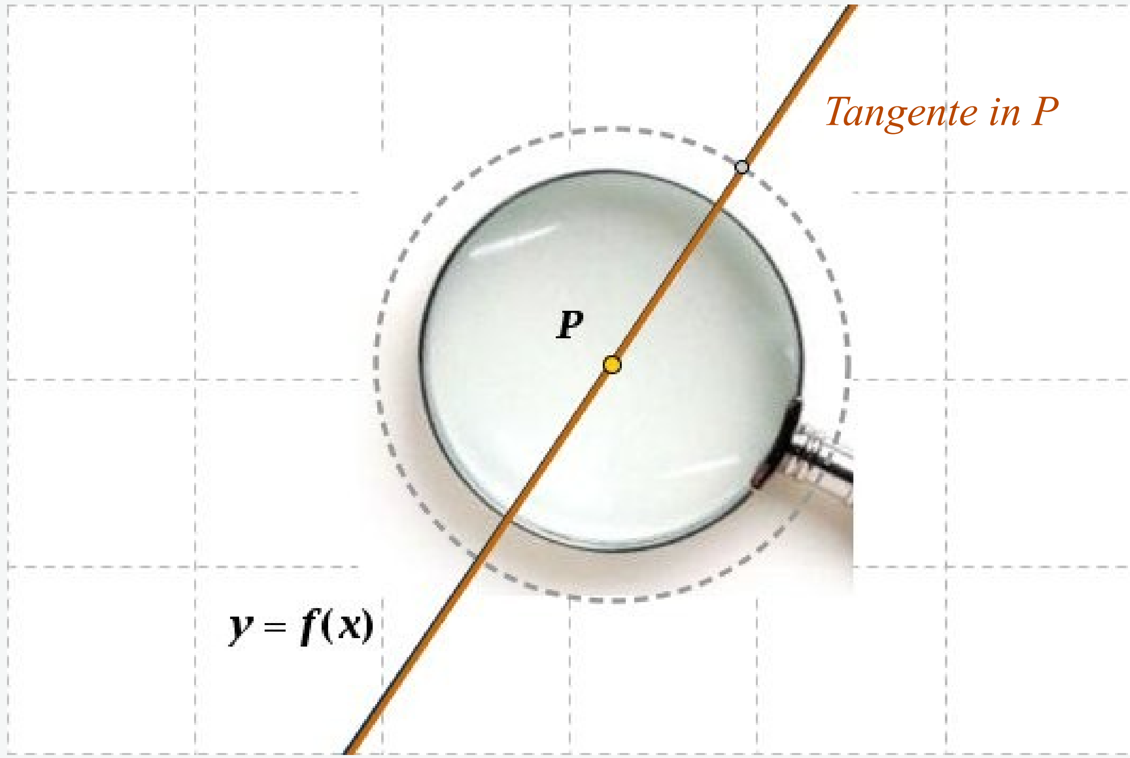


Abb. 3-5: Zum Begriff der lokalen Linearität einer Funktion $y = f(x)$

Wir zoomen so lange in den Graph der Funktion $y = f(x)$ hinein, bis sie wie eine lineare Funktion aussieht. Beim "Zoomen" suchen wir ein so kleines Interval Δx, dass wir auf die Differenz zwischen der Funktion und der linearen Näherungsfunktion verzichten können.

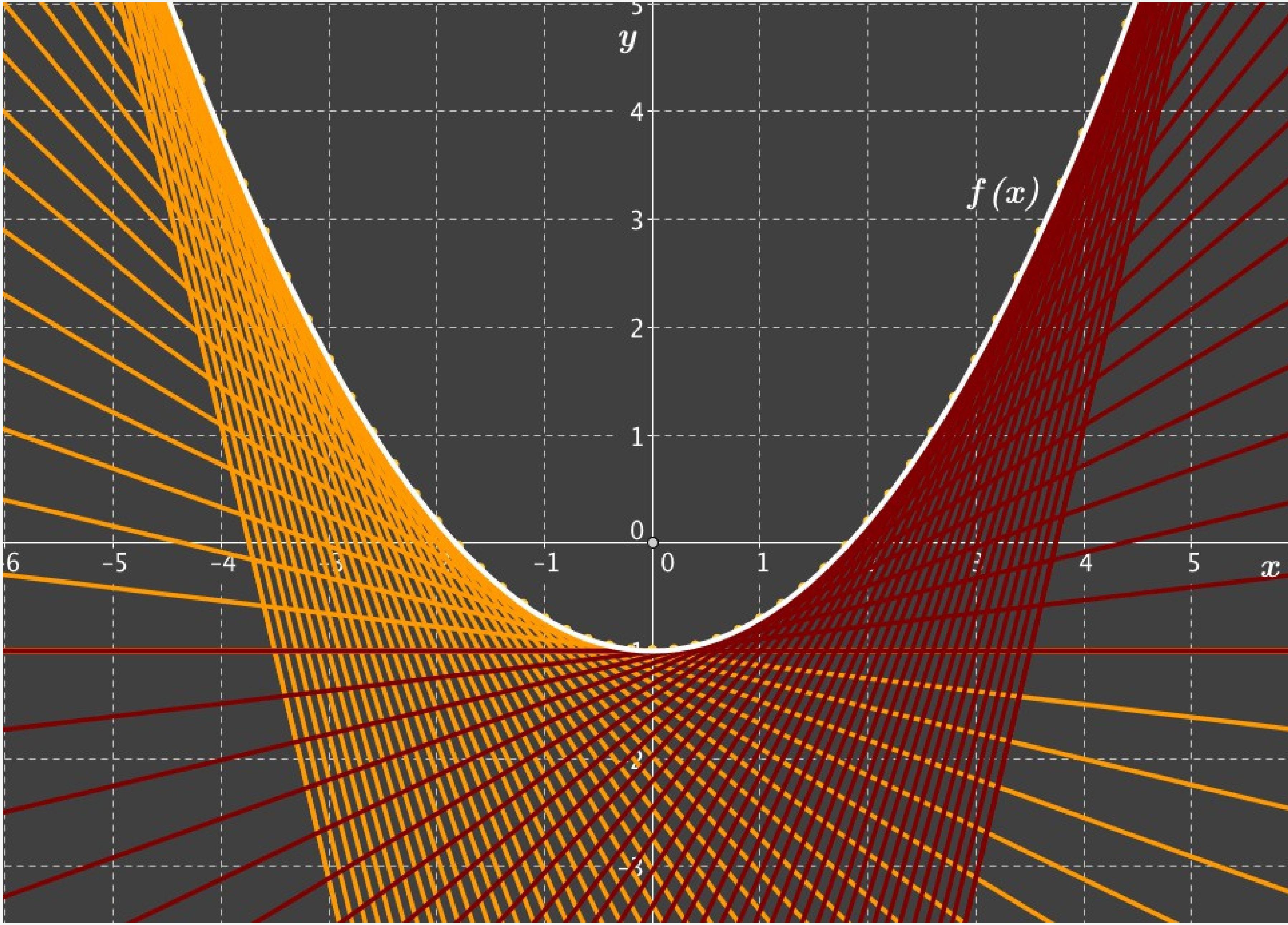
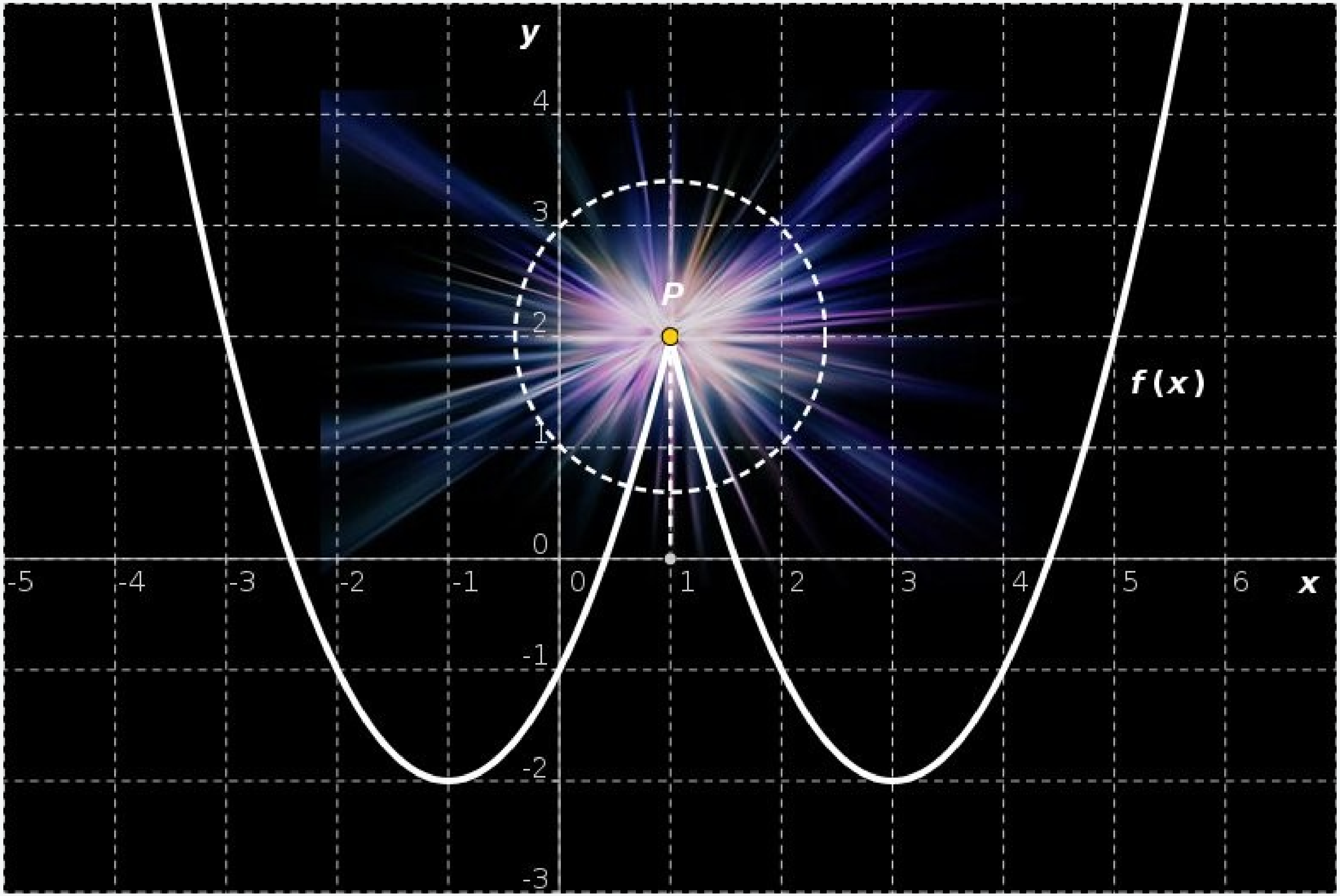


Abb. 3-6: Eine differenzierbare Funktion y= f (x) und ihre Tangenten

Eine im Punkt P differenzierbare Funktion hat in diesem Punkte eine eindeutige Tangente.

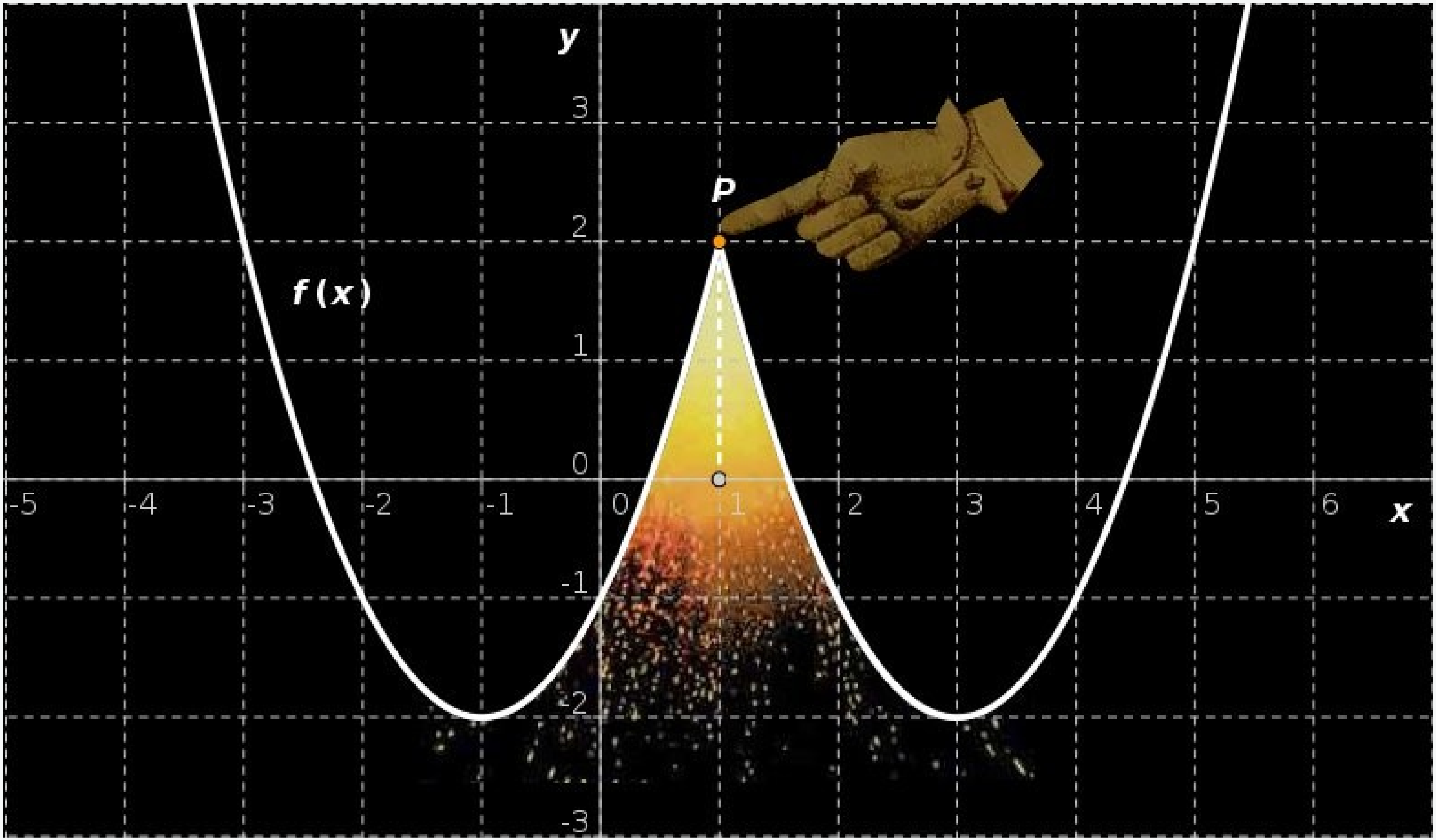
Wenn wir eine Funktion $f(x)$ in unmittelbarer Umgebung eines Punktes P linearisieren, ersetzen wir die Funktion durch die Kurventangente.



http://www.gott-und-wissenschaft.de/BILDER/gb.jpg

Abb. 4-1: Beispiel einer im Punkt P nicht differenzierbaren Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1, & x < 1 \\ x^2 - 6x + 7, & x \geqslant 1 \end{cases}$$



http://startswithabang.com/wp-content/uploads/2008/07/big-bang.jpg, http://www.youtube.com/watch?v=eNV24DT80wg&NR=1

Abb. 4-2: Beispiel einer im Punkt P nicht differenzierbaren Funktion $y = f(x)$

Unabhängig davon, wie lange man in den Graph der Funktion $y = f(x)$ “hineinzoomt”, die Funktion wird niemals in der Umgebung des Punktes P linear aussehen.

Differenzierbarkeit einer Funktion $y = f(x)$: Beispiel 1

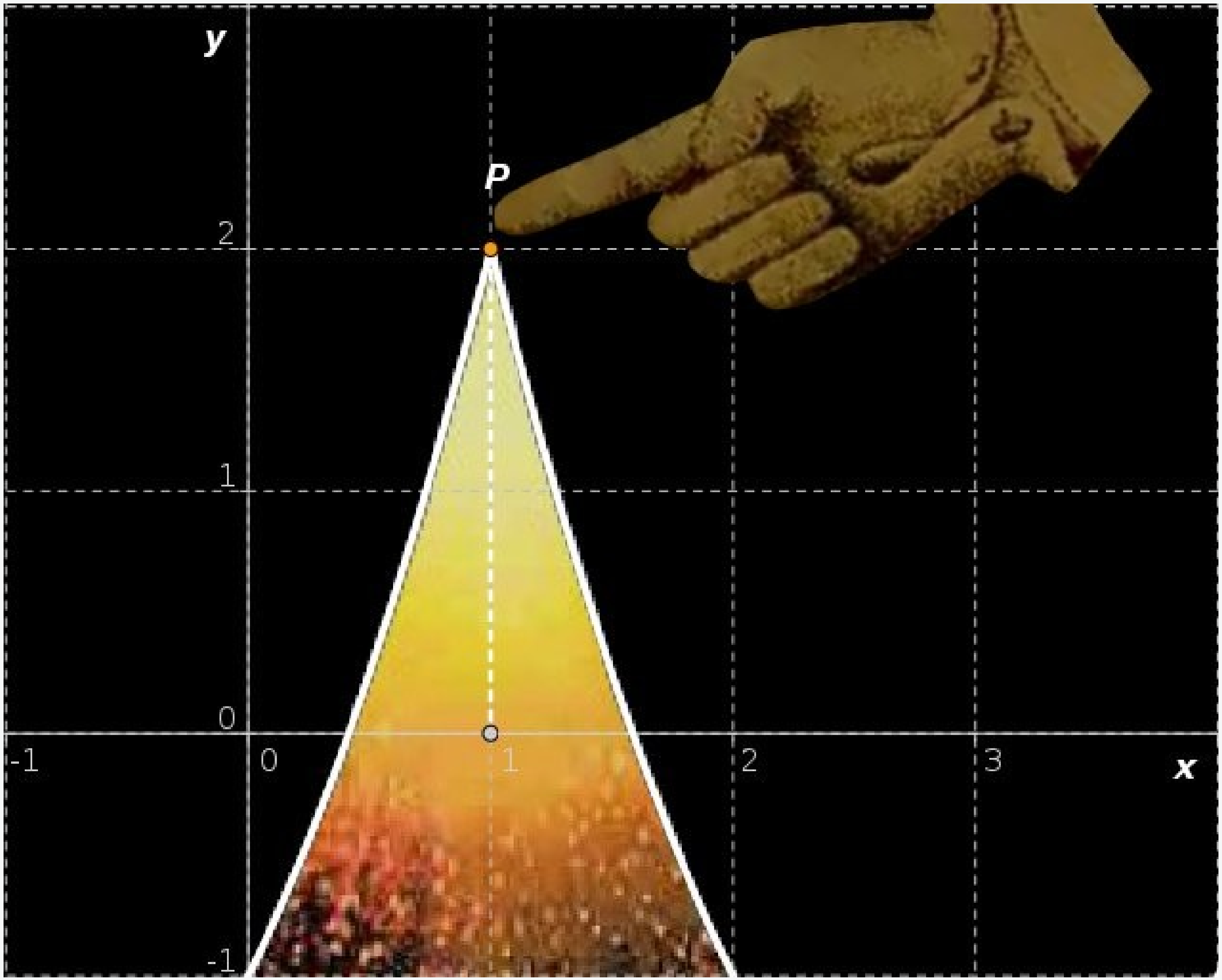


Abb. 4-3: Beispiel einer im Punkt P nicht differenzierbaren Funktion $y = f(x)$

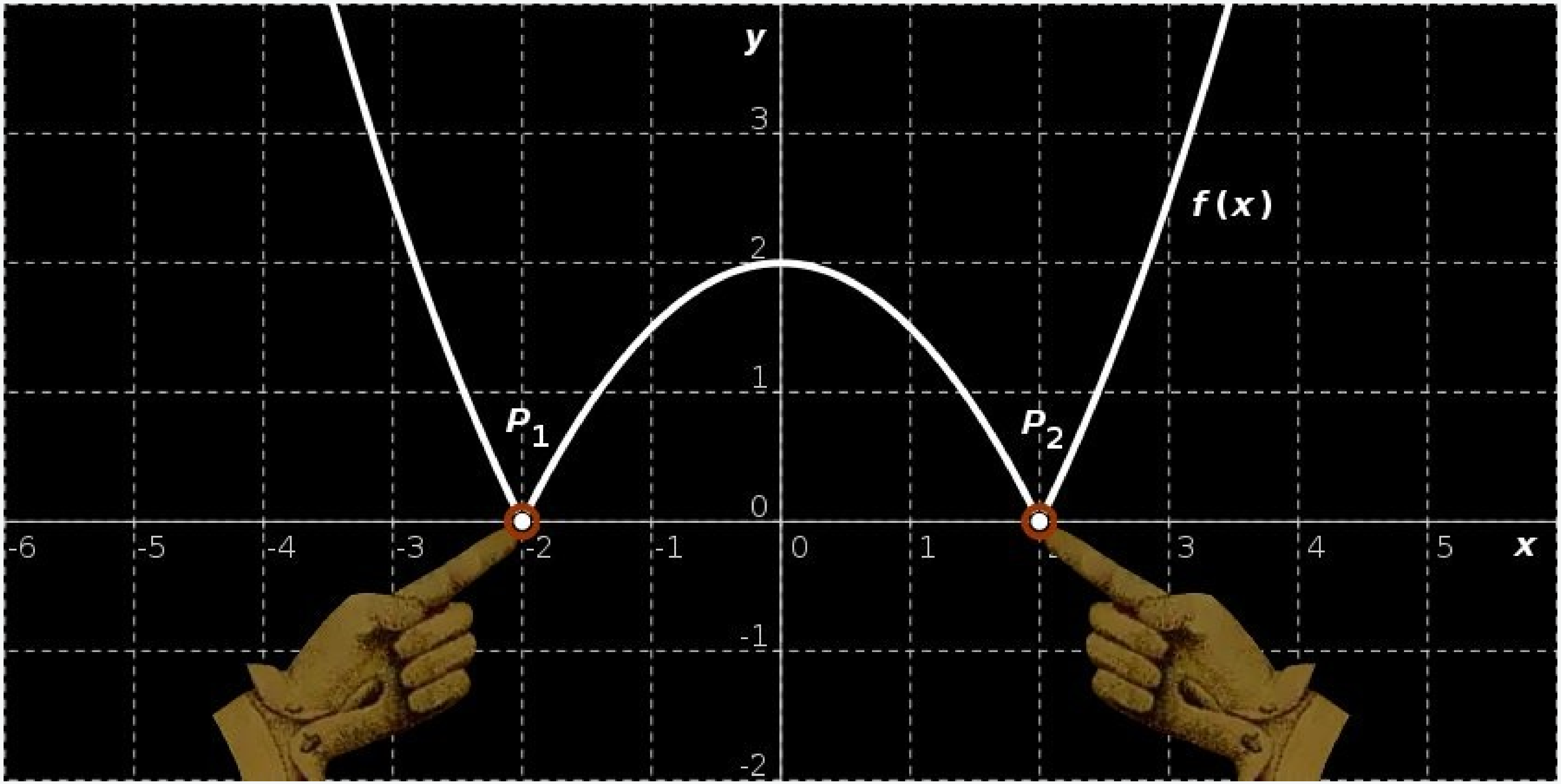


Abb. 5-1: Beispiel einer in Punkten A und B nicht differenzierbaren Funktion y = f (x)

$$f\,(x) = \left| \frac{x^2}{2} - 2 \right|$$

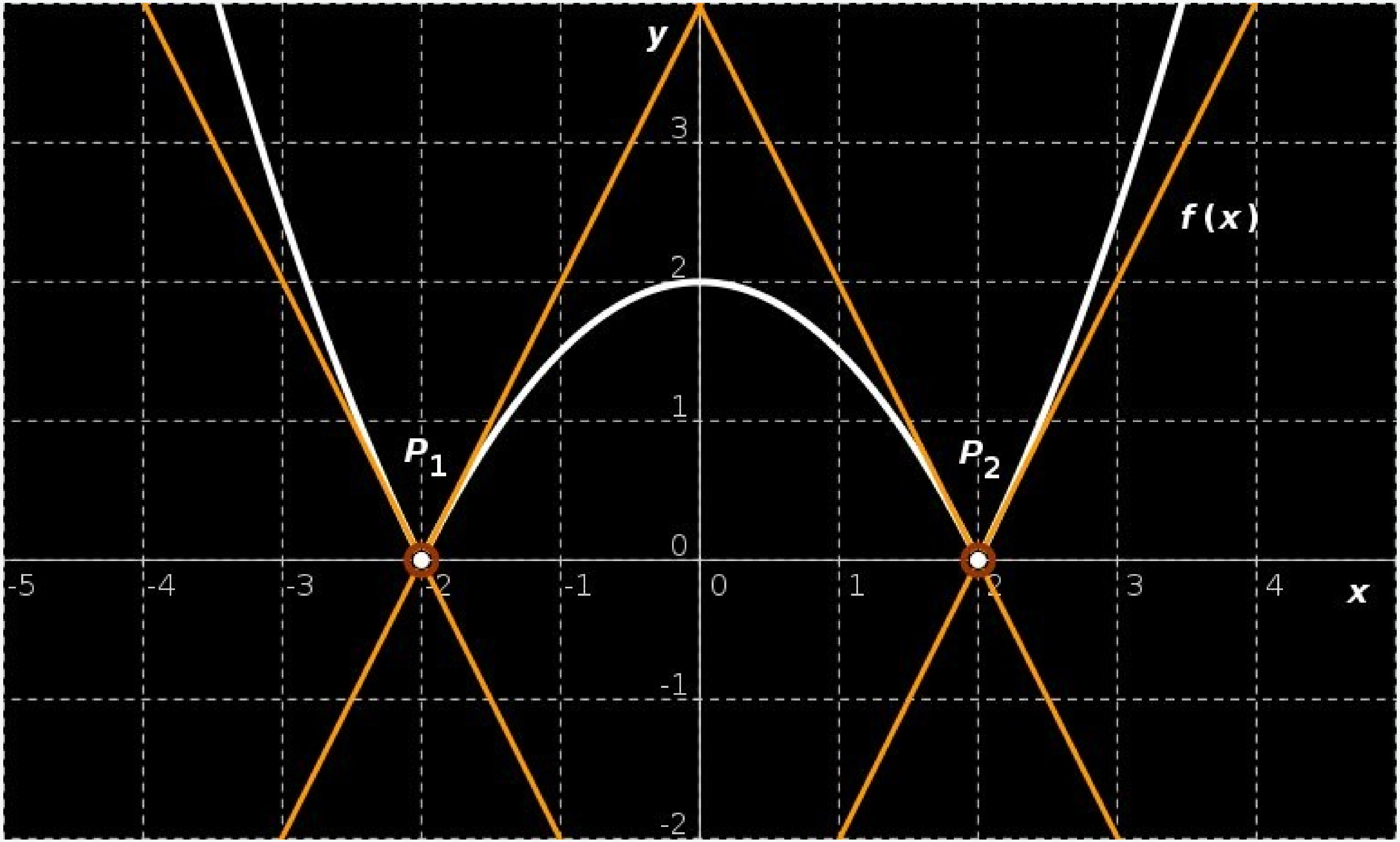


Abb. 3-4b: Beispiel einer in Punkten A und B nicht differenzierbaren Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \left| \frac{x^2}{2} - 2 \right|$$