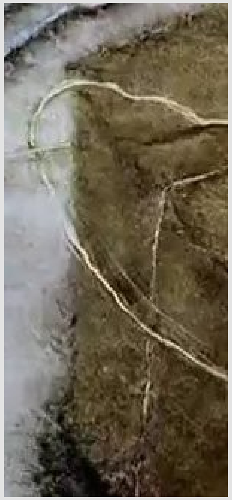
http://www.youtube.com/watch?v=f6rn0sgNwks&feature=related

Das Doppelintegral in der Berechnung von Volumen



Berechnen Sie das Volumen eines Körpers, der durch folgende Flächen begrenzt wird:

$$z = 4 - x^2 - y^2, \qquad z = 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

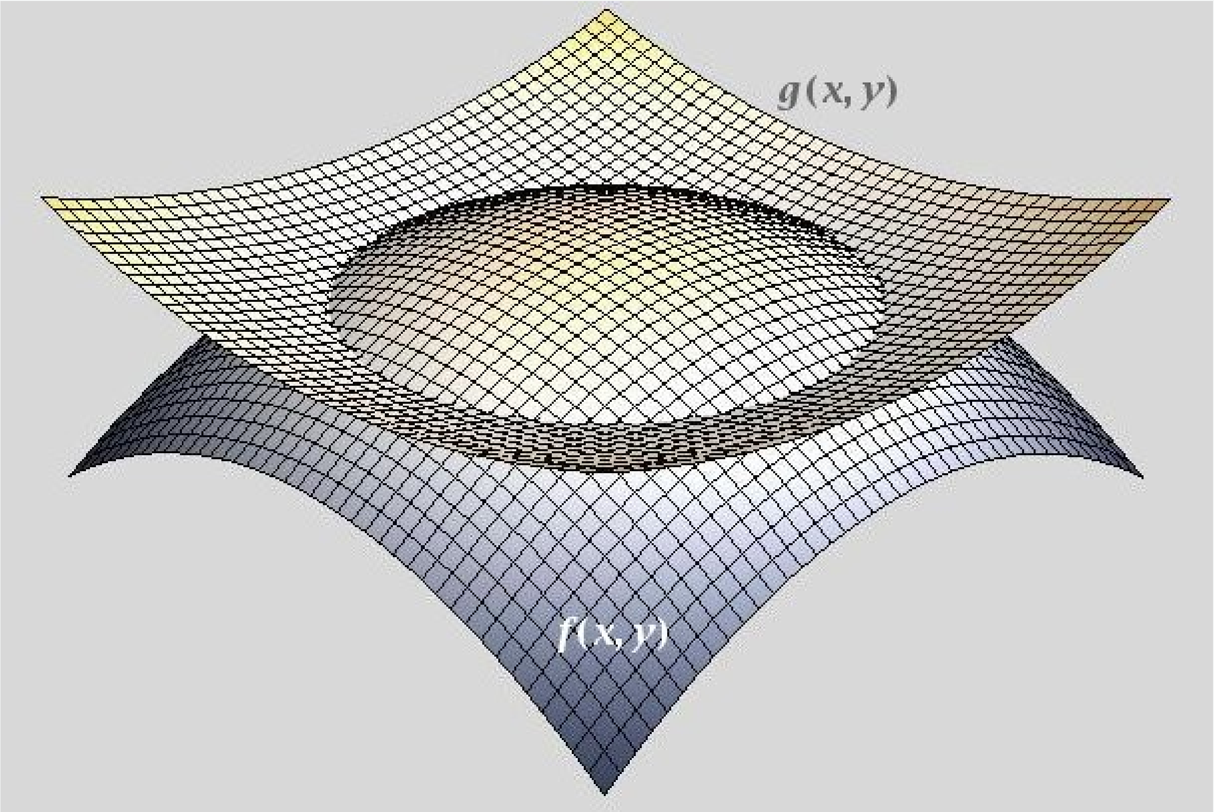


Abb. L10-1: Graphische Darstellung der Funktionen z = f (x, y) und z = g (x, y)

$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2, \qquad g(x, y) = 1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

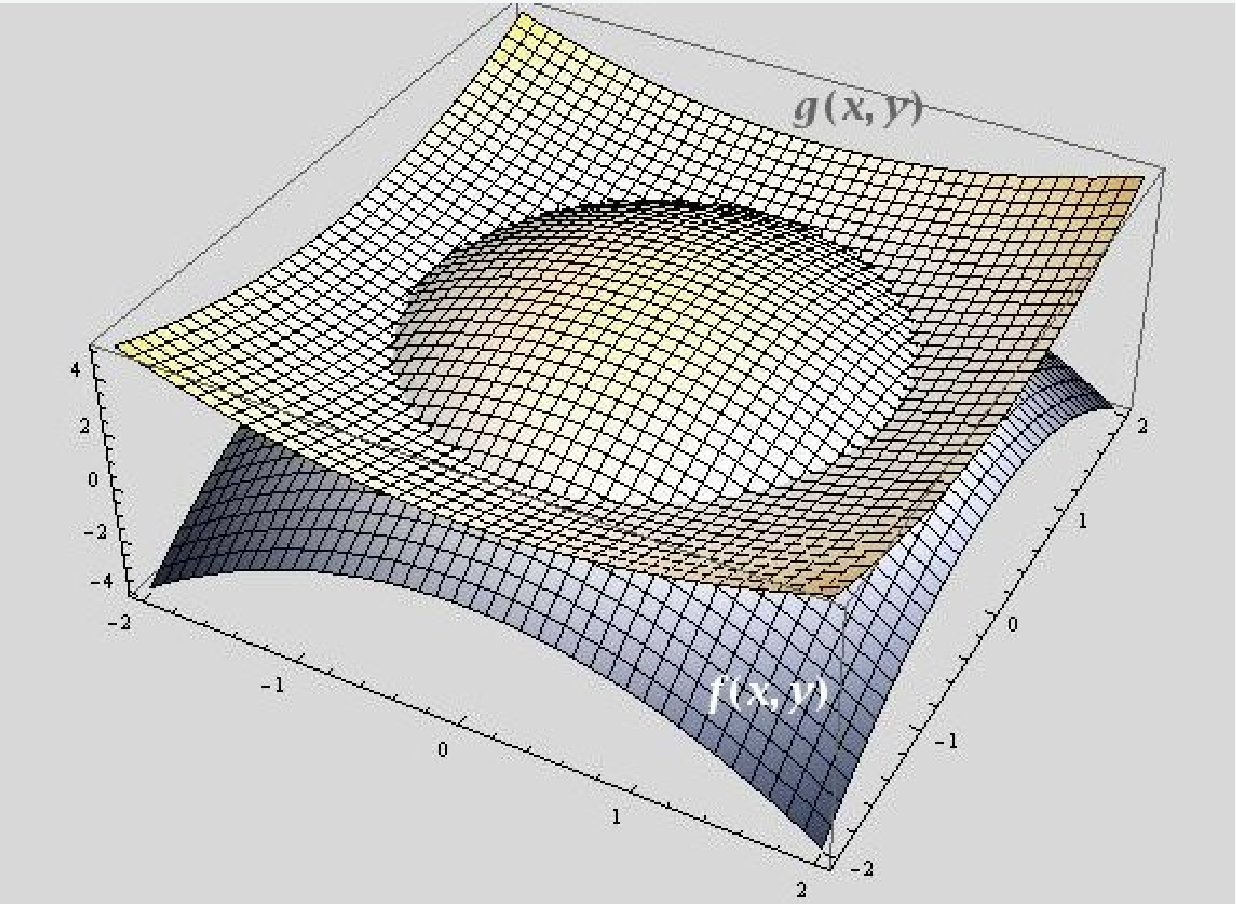


Abb. L10-2: Graphische Darstellung der Funktionen $z = f(x, y)$ und $z = g(x, y)$

$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2, \qquad g(x, y) = 1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

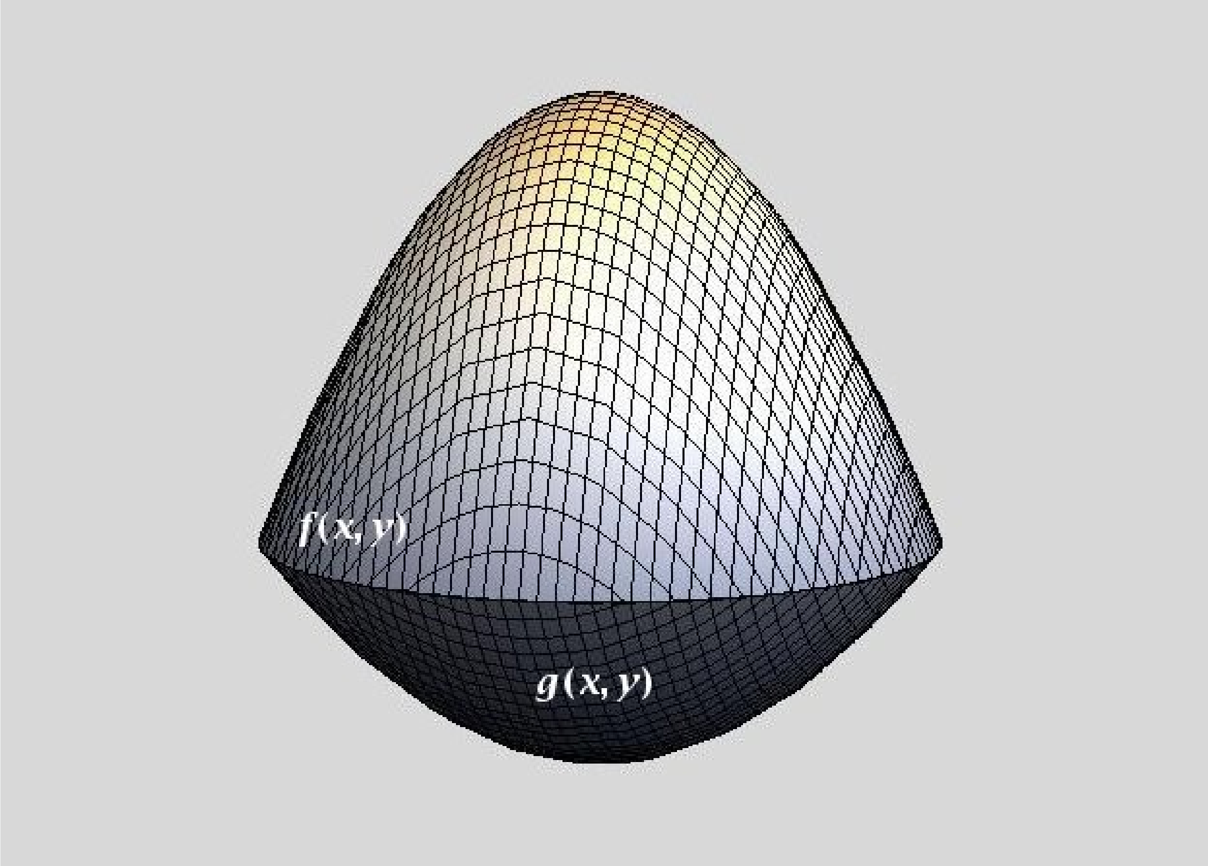


Abb. L10-3: Graphische Darstellung eines Körpers, der zwischen den Flächen der Funktionen $z = f(x, y)$ und $z = g(x, y)$ eingeschlossen wird.

Im Folgenden bestimmen wir das Volumen des Körpers *(Abb. L10-3)* zwischen den Paraboloiden $z = f(x, y)$ und $z = g(x, y)$.

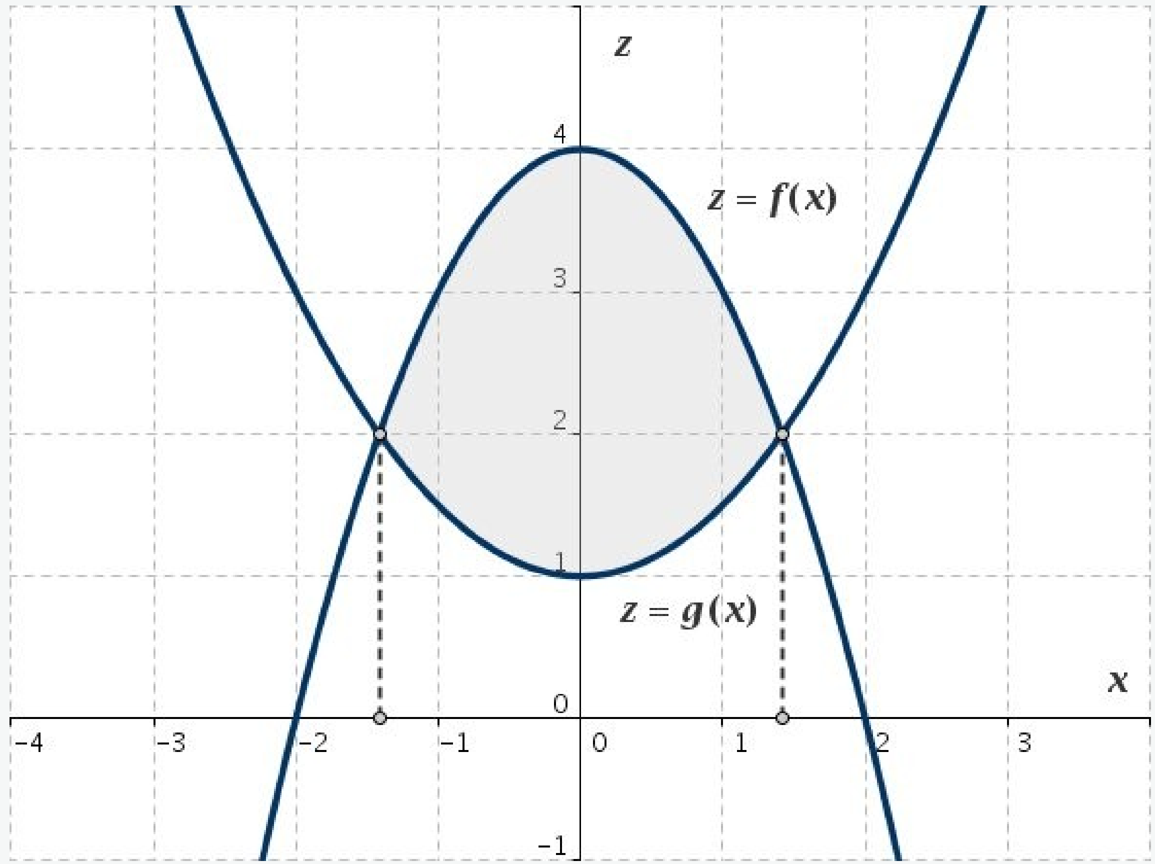


Abb. L10-4: *Die Schnittkurven der Funktionen $z = f(x, y)$ und $z = g(x, y)$ mit der x,z-Ebene ($y = 0$). Die Fläche zwischen den Kurven $z = f(x)$ und $z = g(x)$ entspricht der Schnittfläche zwischen den Paraboloiden und der x,z-Ebene.*

Die beiden Funktionen sind Rotationsparaboloide. Sie entstehen durch Rotation entsprechender Funktionen um die z-Achse. Deshalb gibt ein Schnittkurvendiagramm der Flächen mit der x,z-Ebene einen guten Blick auf den Verlauf der Funktionen.

Das eingeschlossene Volumen zwischen zwei Flächen im *3D*-Raum bestimmen wir auf die gleiche Weise wie die Fläche zwischen zwei Funktionen einer Variablen

$$V = V_1 - V_2 = \iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy - \iint\limits_A g(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_A (4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy - \iint\limits_A \left(1 + \frac{1}{2}\,(x^2 + y^2)\right) dx\, dy$$

$$= \frac{3}{2} \iint\limits_A (2 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$$

V_1 – das Volumen zwischen der Fläche der Funktion $z = f(x, y)$ und dem Integrationsbereich A

V_2 – das Volumen zwischen der Fläche der Funktion $z = g(x, y)$ und dem Integrationsbereich A

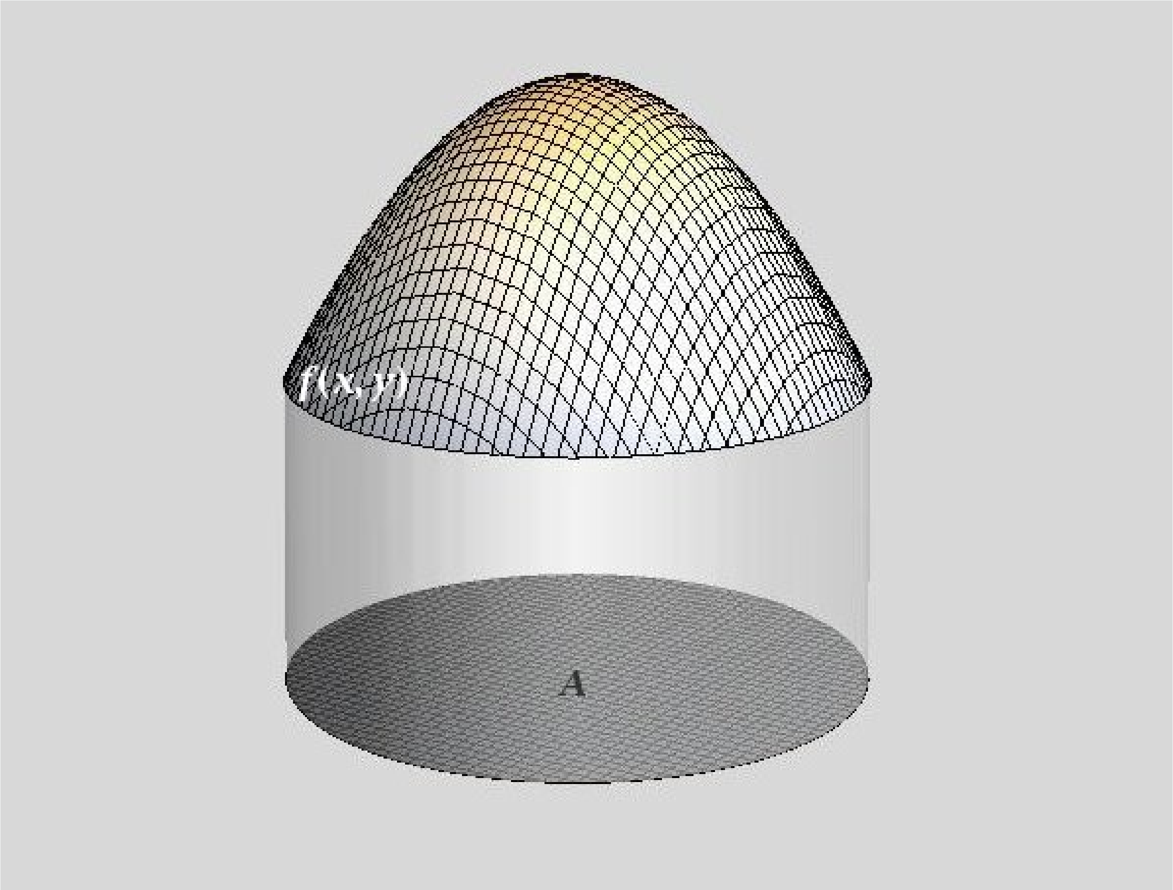


Abb. L10-5: *Graphische Darstellung des Körpers, der zwischen der Fläche der Funktion $z = f(x, y)$ und dem Integrationsbereich A eingeschlossen wird. Das Volumen des Körpers entspricht V_1*

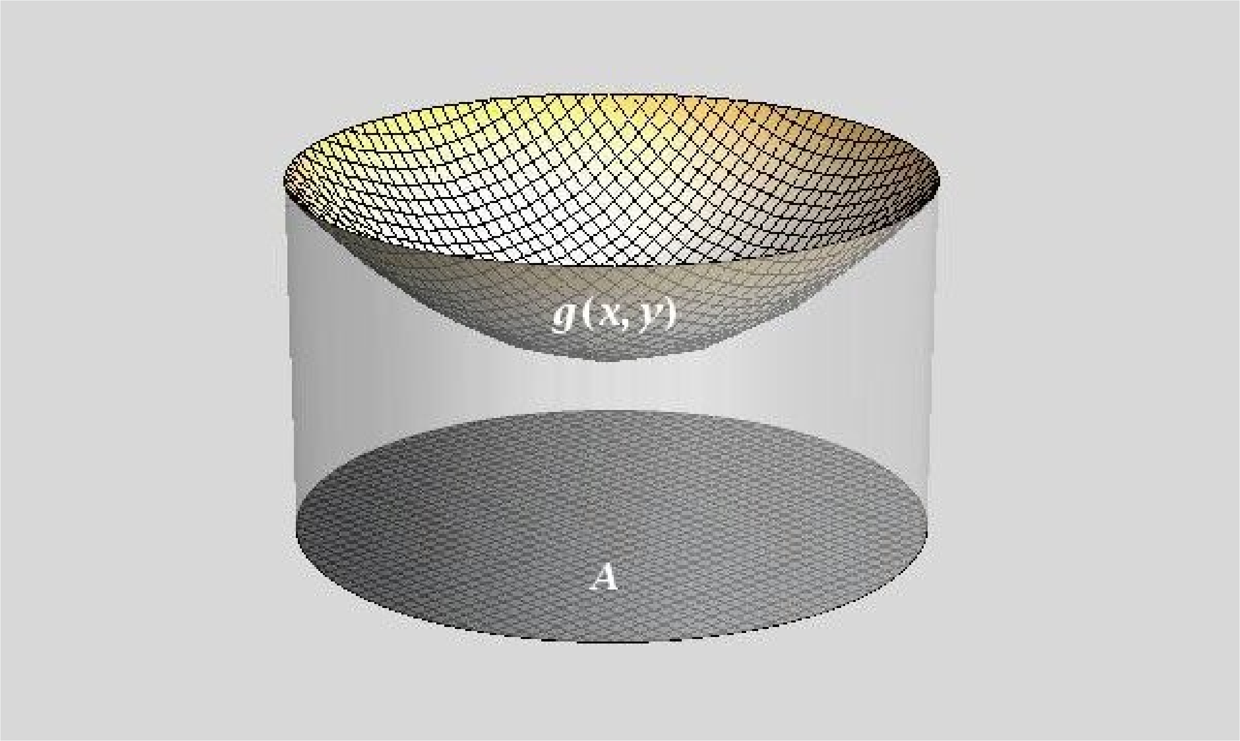


Abb. L10-6: Graphische Darstellung des Körpers, der zwischen der Fläche der Funktion $z = g(x, y)$ und dem Integrationsbereich A eingeschlossen wird. Das Volumen des Körpers entspricht V_2

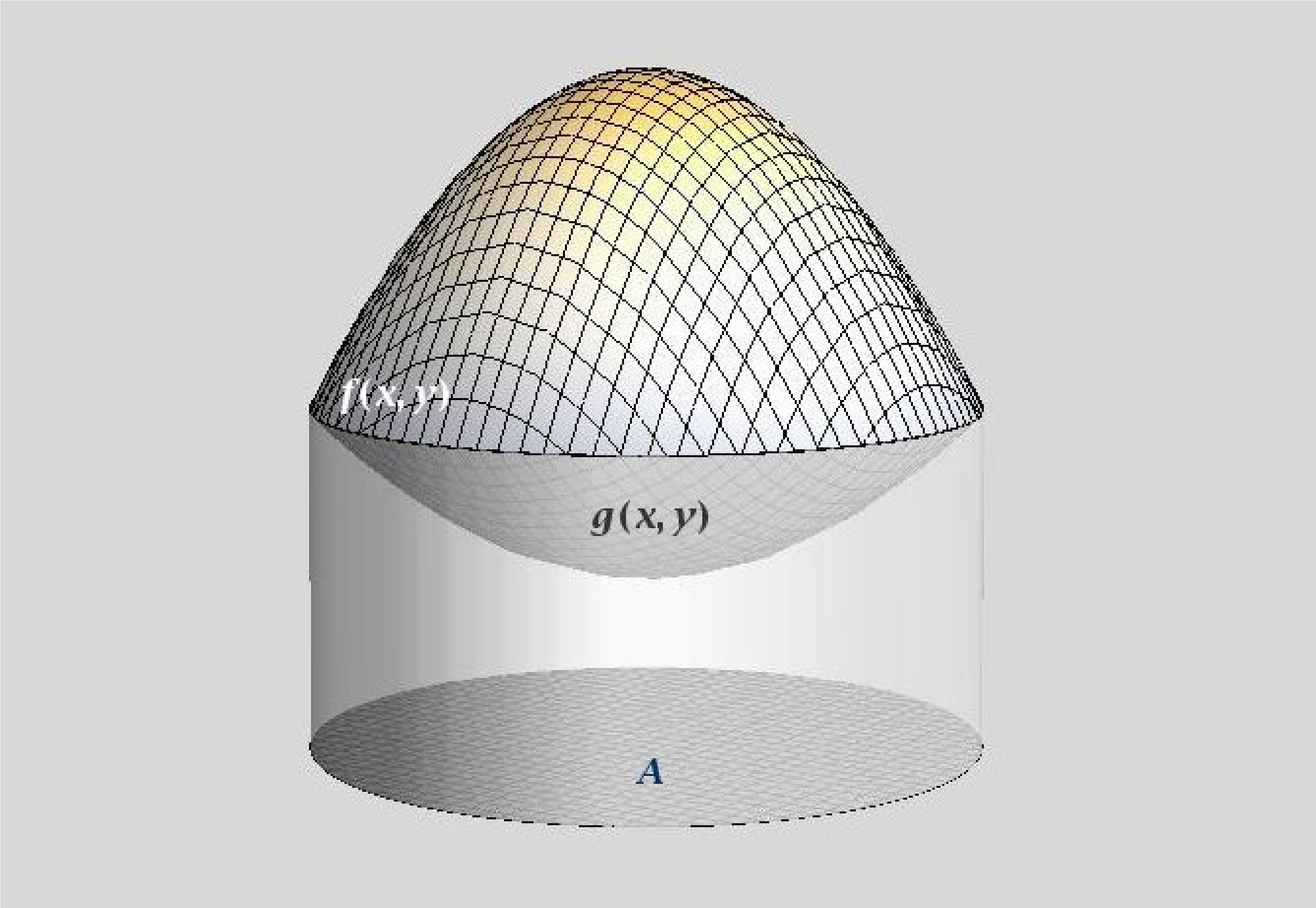


Abb. L10-7: Der zwischen den Flächen der Funktionen $z = f\,(x, y)$ und $z = g\,(x, y)$ eingeschlossene Körper auf dem Bereich A

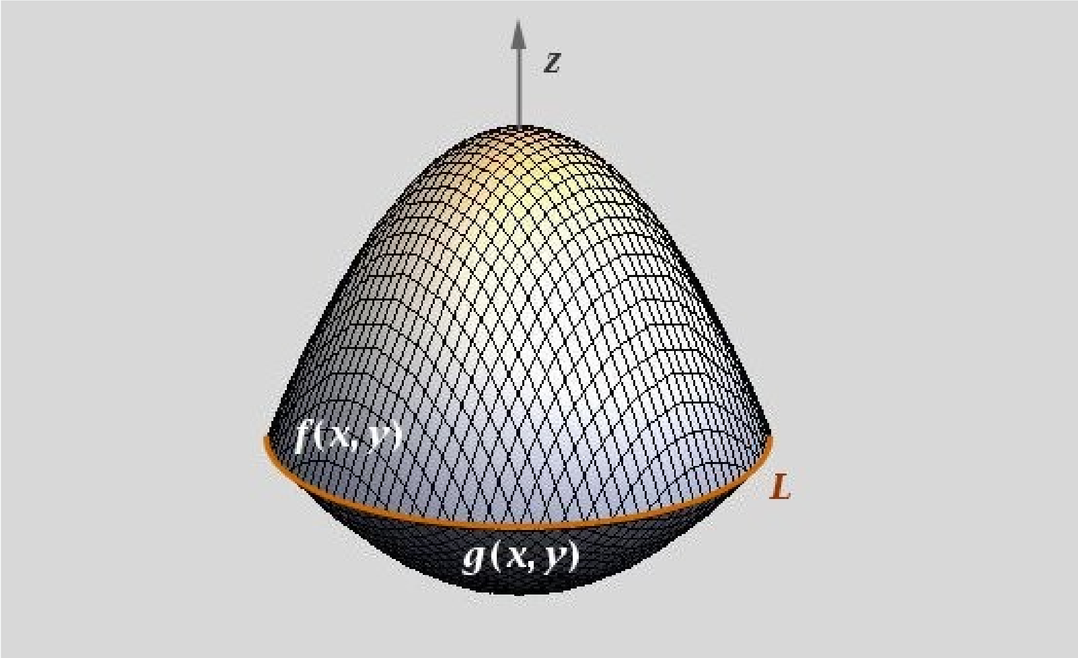


Abb. L10-8: Der zwischen den Flächen der Funktionen z = f (x, y) und z = g (x, y) eingeschlossene Körper. Schnittlinie L

Wir bestimmen die Gleichung der Schnittkurve L zwischen den beiden Flächen

$$z = 4 - x^2 - y^2, \qquad z = 1 + \frac{1}{2}\,(x^2 + y^2)$$

$$4 - x^2 - y^2 = 1 + \frac{1}{2}\,(x^2 + y^2), \qquad L: \; x^2 + y^2 = 2$$

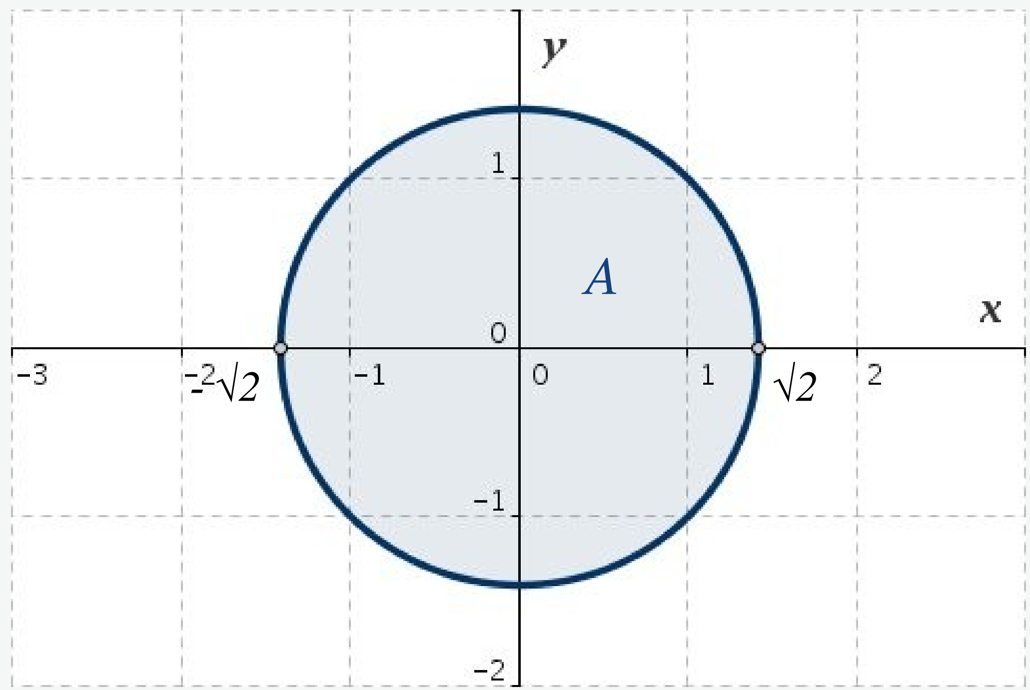


Abb. L10-9: Integrationsbereich A

$$A: \quad x^2 + y^2 \leqslant 2$$

Der Integrationsbereich A zur Volumenbestimmung des Körpers

$$-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\,, \qquad -\sqrt{2 - x^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2 - x^2}$$

Definitionsbereich A in Polarkoordinaten:

$$0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}\,, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$$

Wir berechnen zuerst das Volumen in Polarkoordinaten:

$$V = \frac{3}{2}\iint_A (2 - x^2 - y^2)\; dx\,dy = \frac{3}{2}\iint_A (2 - r^2)\; r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{\sqrt{2}} (2 - r^2)\; r\,dr = 3\pi \int_{r=0}^{\sqrt{2}} (2 - r^2)\,r\,dr = 3\pi \;\;(\mathrm{VE})$$

Jetzt berechnen wir das Volumen in kartesischen Koordinaten:

$$V = \frac{3}{2} \iint\limits_{A} (2 - x^2 - y^2)\ dx\, dy =$$

$$= \frac{3}{2} \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2 - x^2}}^{\sqrt{2 - x^2}} (2 - x^2 - y^2)\ dy =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(6\sqrt{2 - x^2} - 3\,x^2 \sqrt{2 - x^2} - (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx = 3\,\pi \ \ (\mathrm{VE})$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a > 0)$$