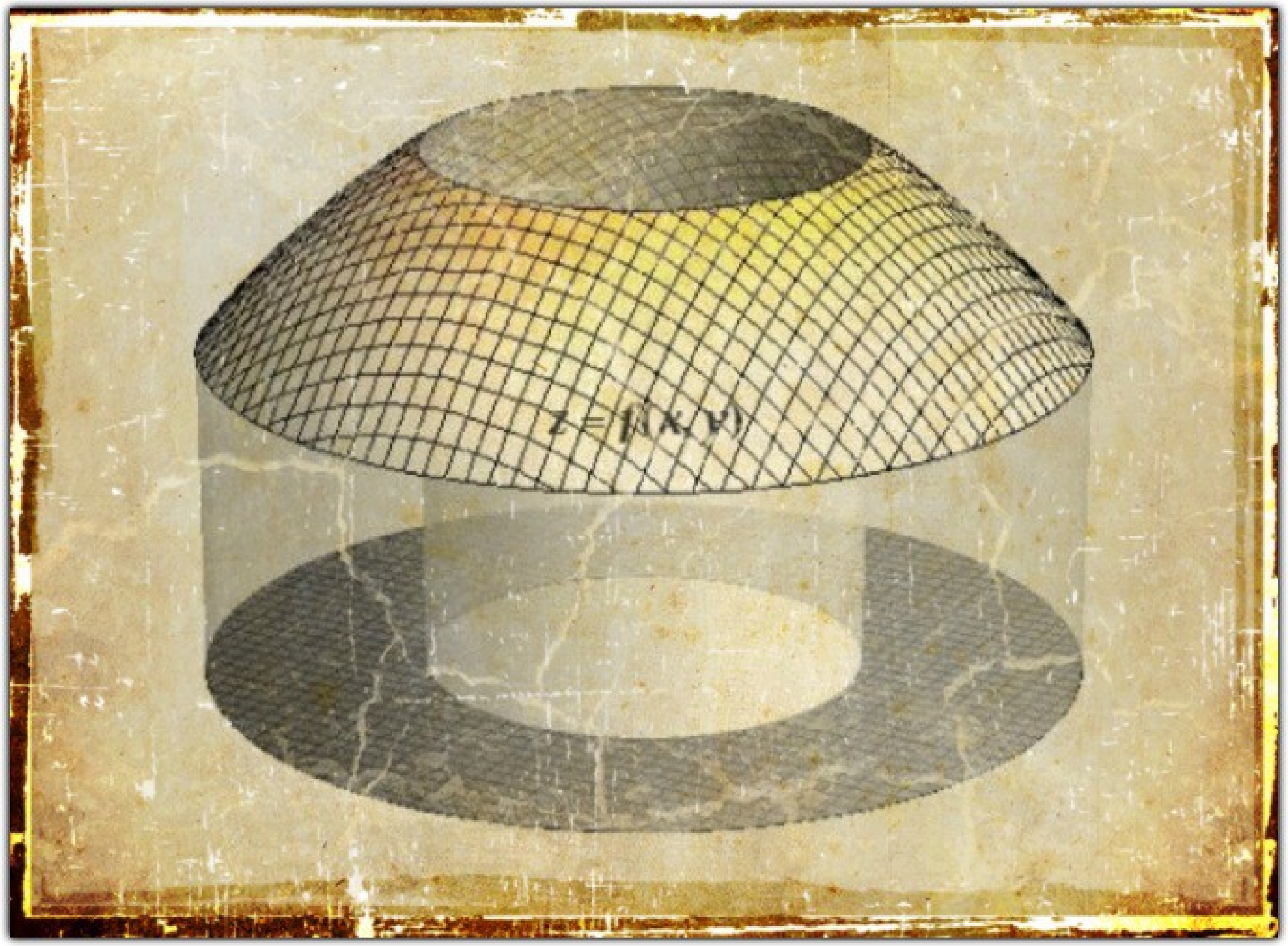
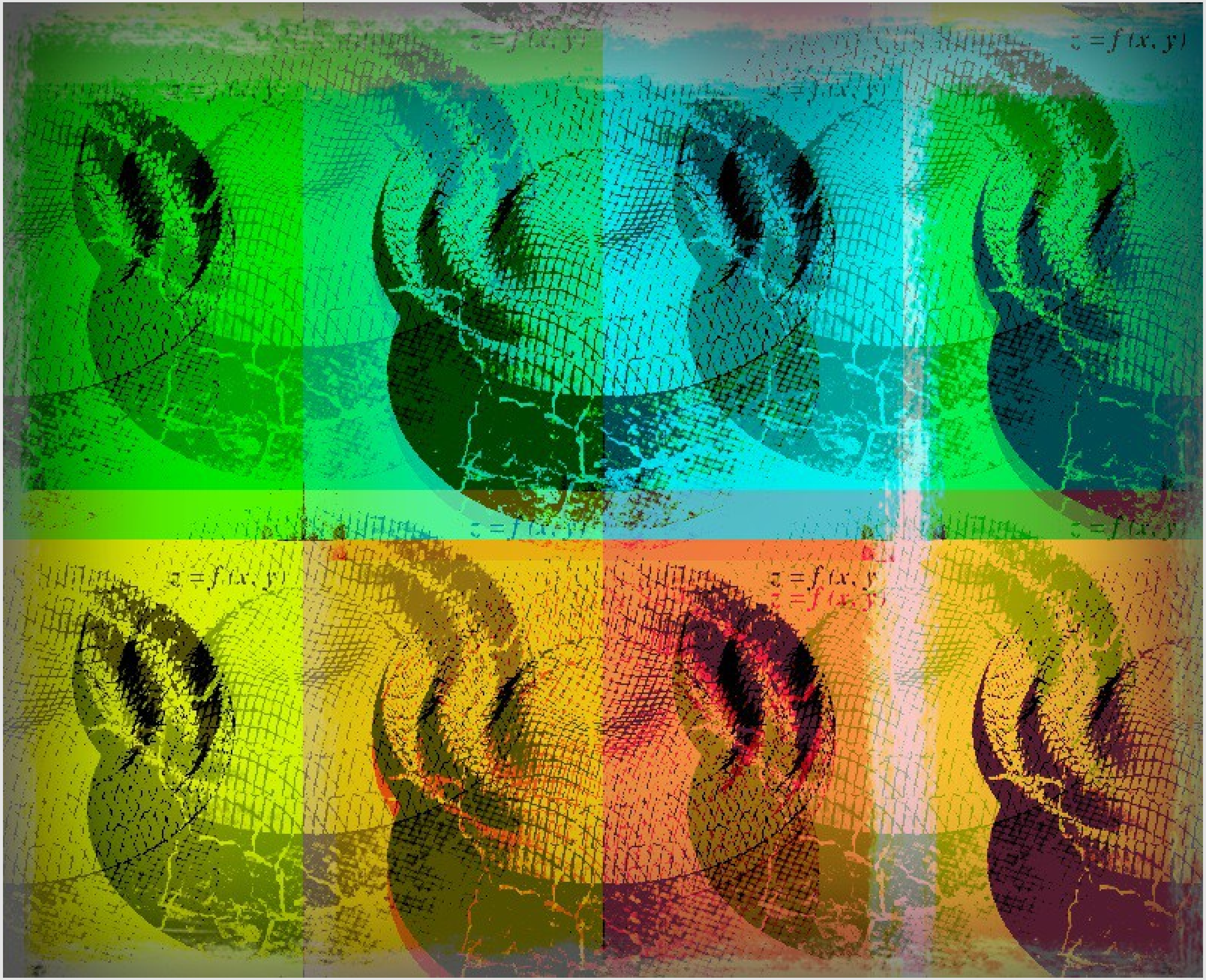


Doppelintegral in der Volumenberechnung: Aufgaben

Teil 2


$z = f(x, y)$

Berechnen Sie Volumina der Körper, die durch folgende Flächen begrenzt werden:

Aufgabe 5: $z = 5 - x^2 - y^2, \quad 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$

Aufgabe 6: $z = 2 + x^2 + y^2, \quad 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$

Aufgabe 7: $z = 3 + \frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2), \quad 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9$

Aufgabe 8: $z = 3 + \frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 \leqslant 16$

Aufgabe 9: $z = y^2 - x^2, \quad z = 0, \quad y = \pm 2$

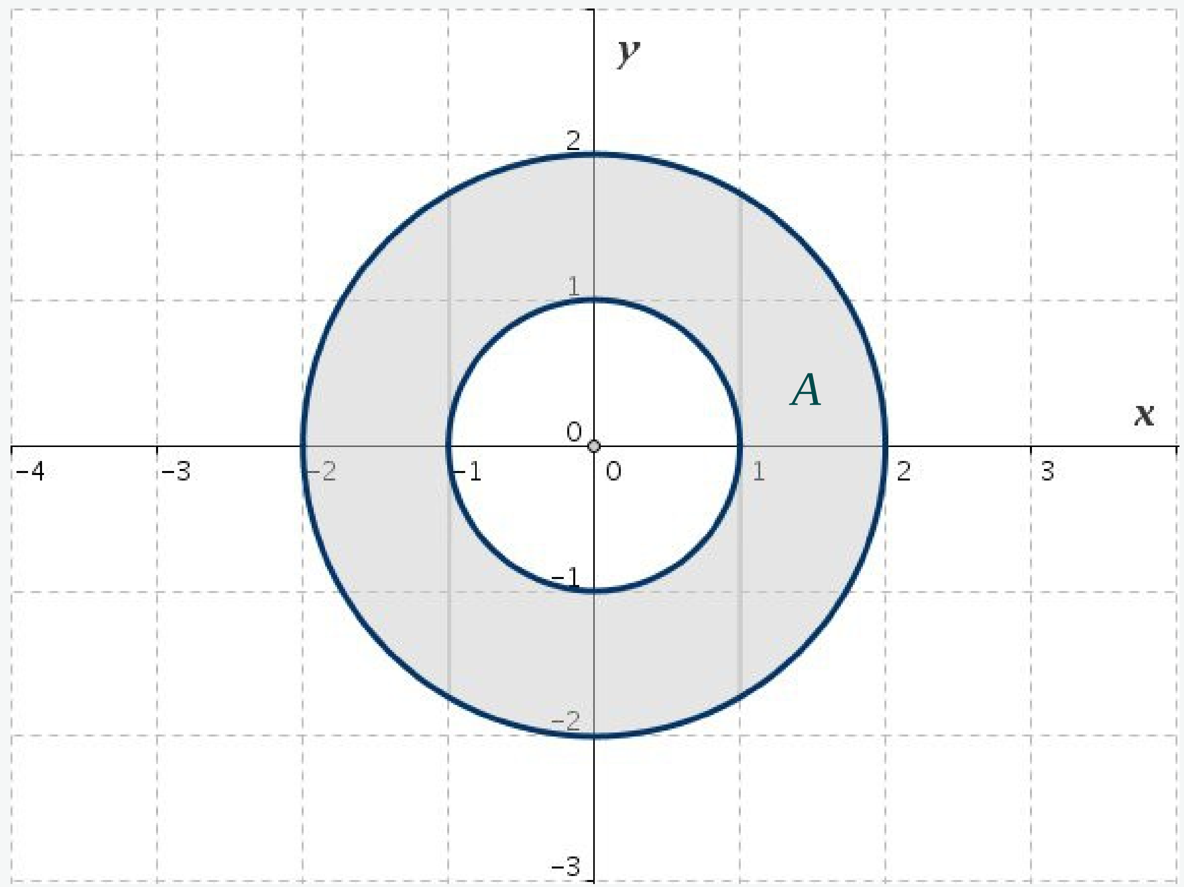


Abb. L5a: Definitionsbereich A der Funktion $z = f(x, y)$ ist ein Ring mit dem Innenradius 1 und dem Außenradius 2

$$f(x, y) = 5 - x^2 - y^2, \qquad A: \quad 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$$

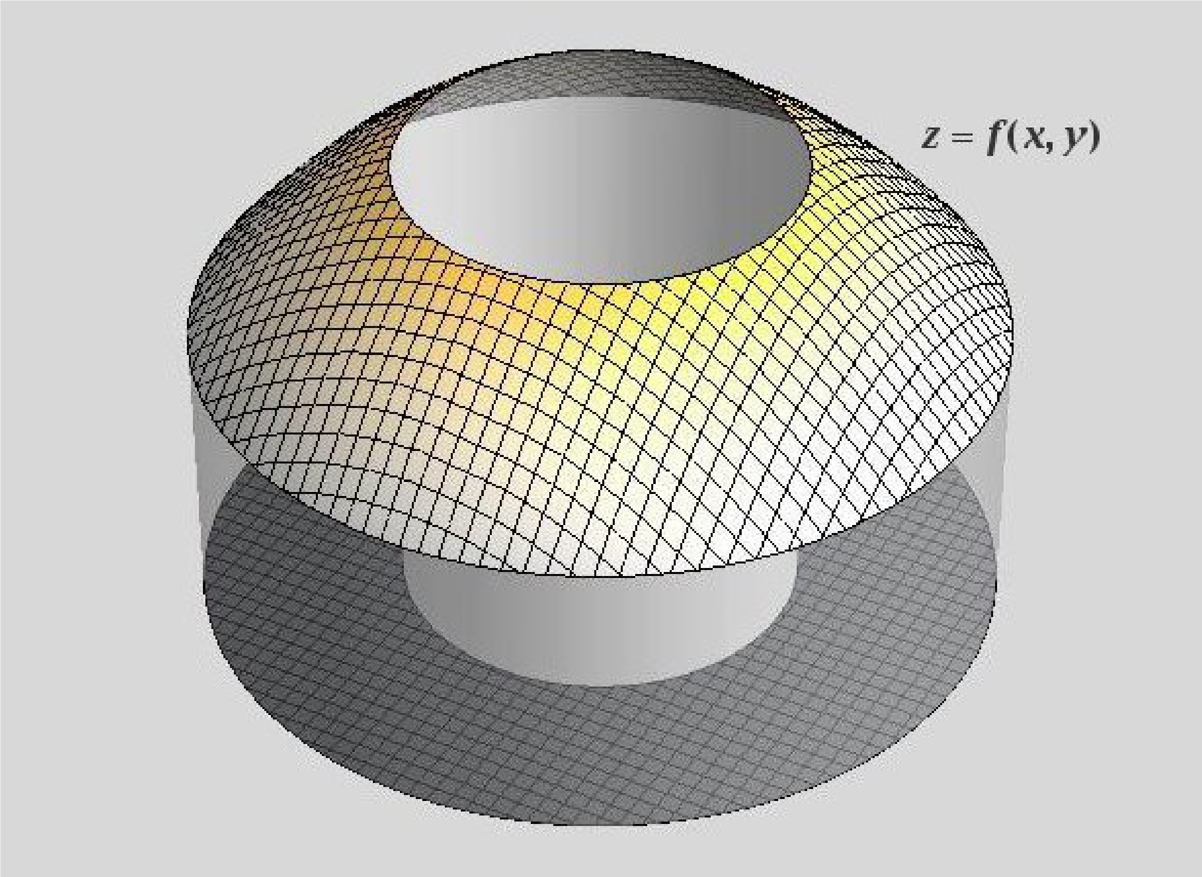


Abb. L5b: Graphische Darstellung der Funktion z = f (x, y) über dem Definitionsbereich A

$$V = \iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_A g(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=1}^{2} (5 - r^2)\, r\, dr\, d\varphi = \frac{15}{2}\pi \quad (\text{VE})$$

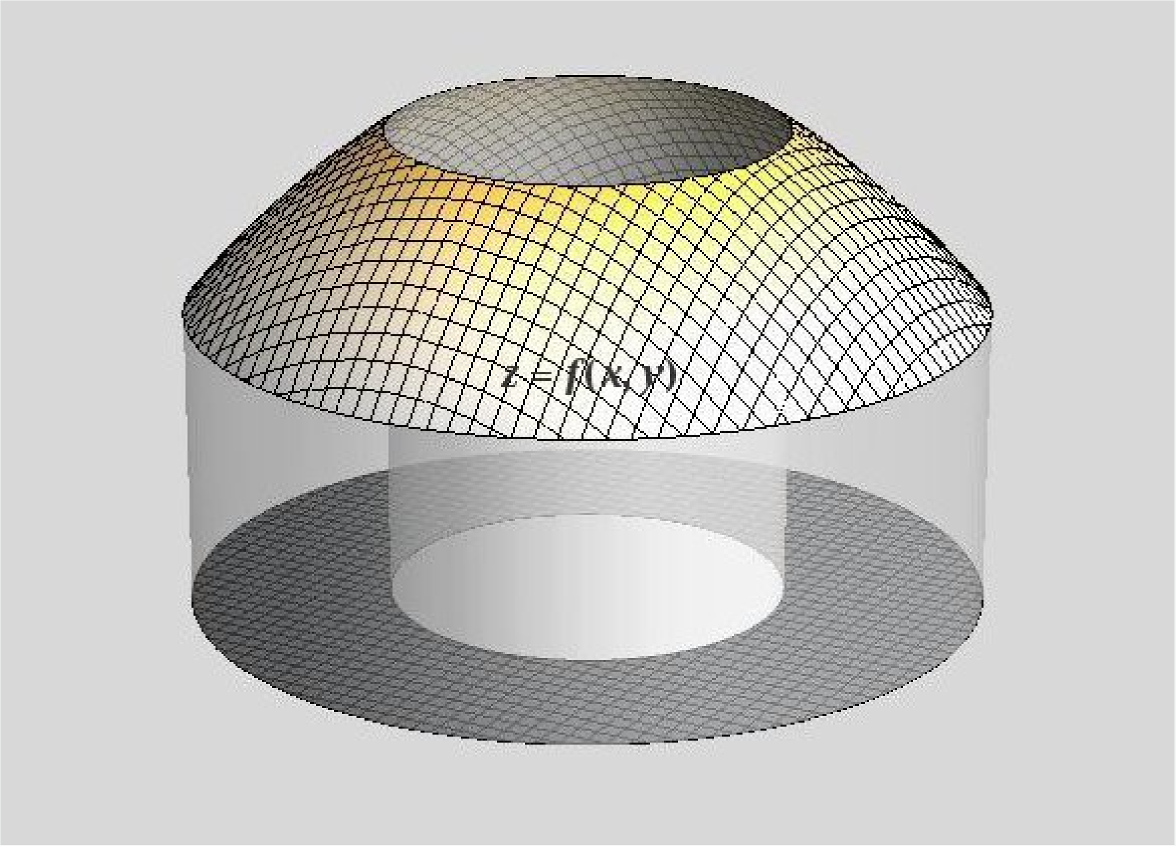


Abb. L5c: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ *über dem Definitionsbereich A*

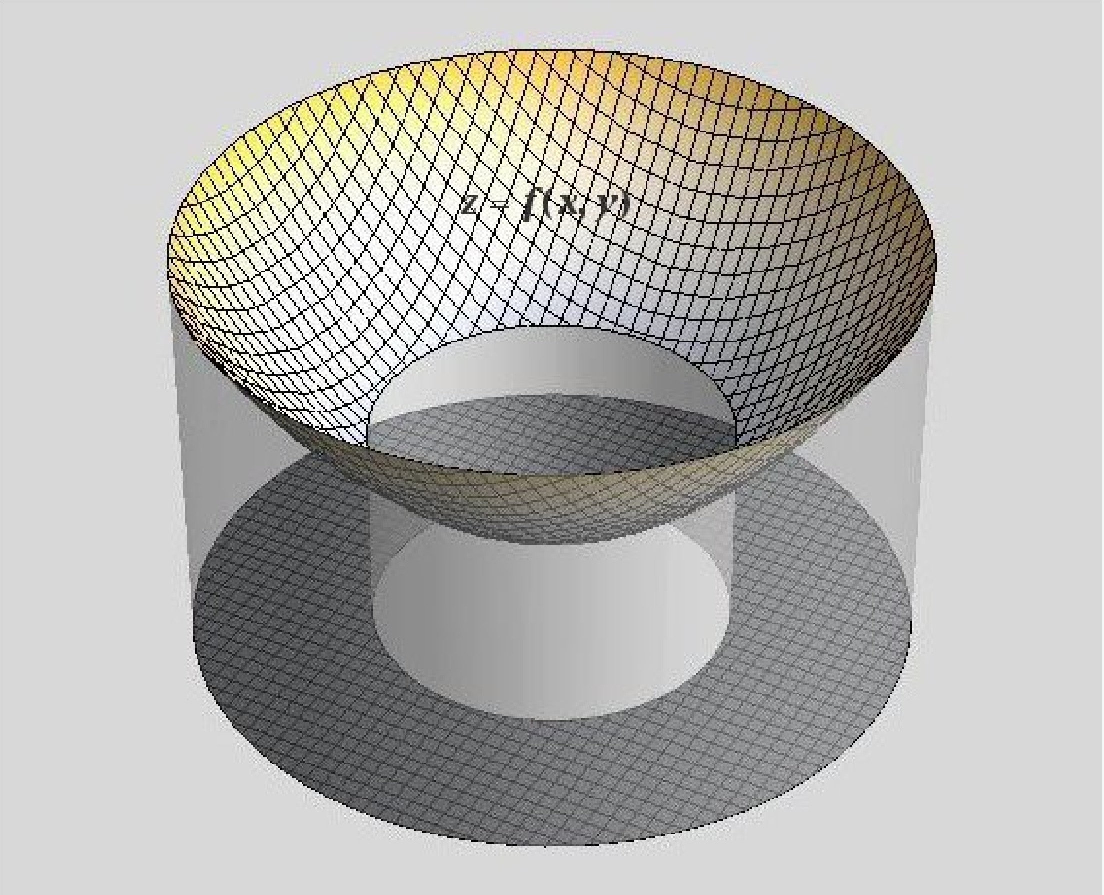


Abb. L6a: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ über dem Definitionsbereich A (dergleiche Bereich wie in der Aufgabe 5)

$$V = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \iint_A g(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{2} (2 + r^2)\, r\, dr\, d\varphi = \frac{27}{2}\pi \ (\text{VE})$$

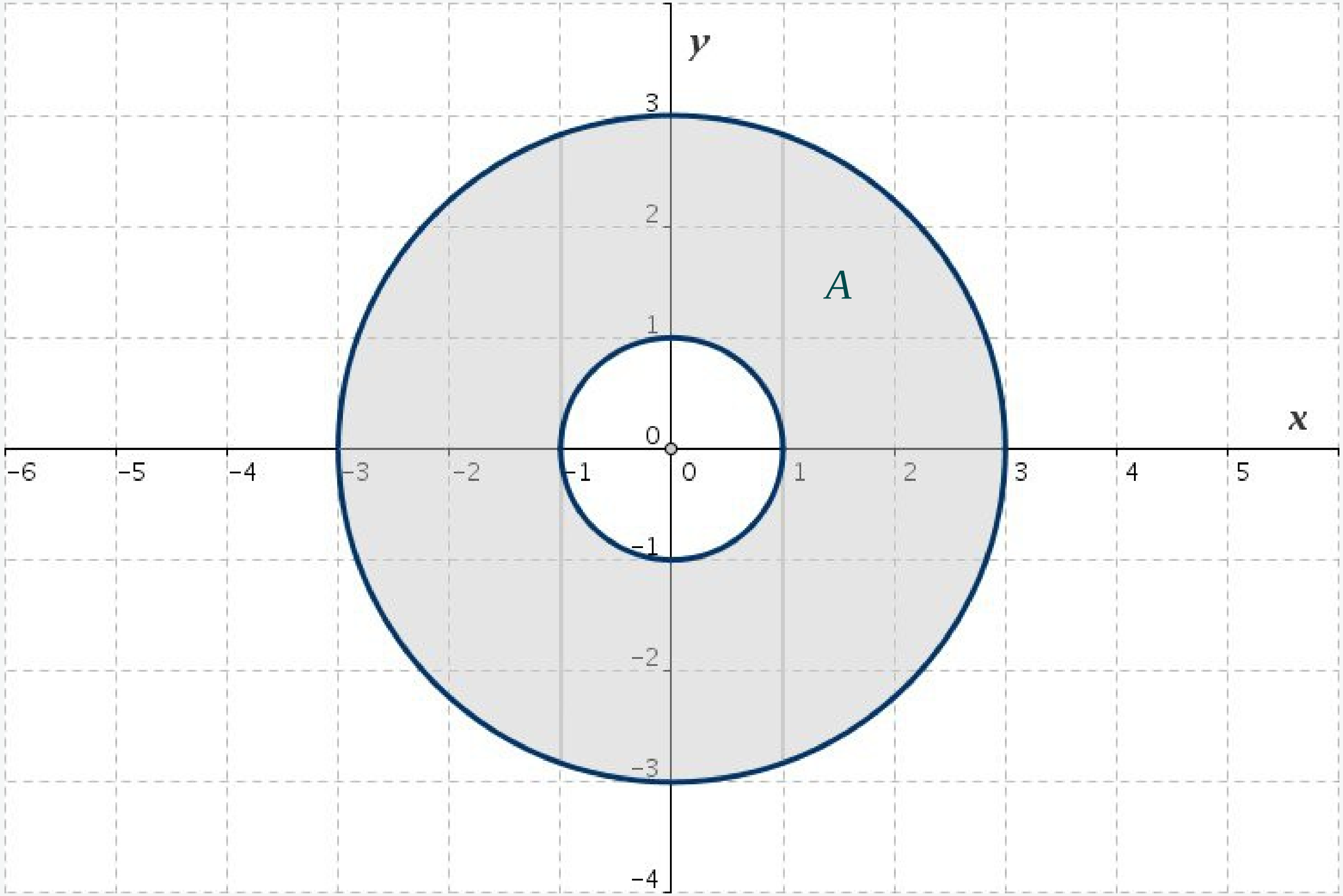


Abb. L7a: Definitionsbereich A der Funktion $z = f(x, y)$ ist ein Ring mit dem Innenradius 1 und dem Außenradius 3

$$f(x, y) = 3 + \frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2), \qquad A: \quad 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9$$

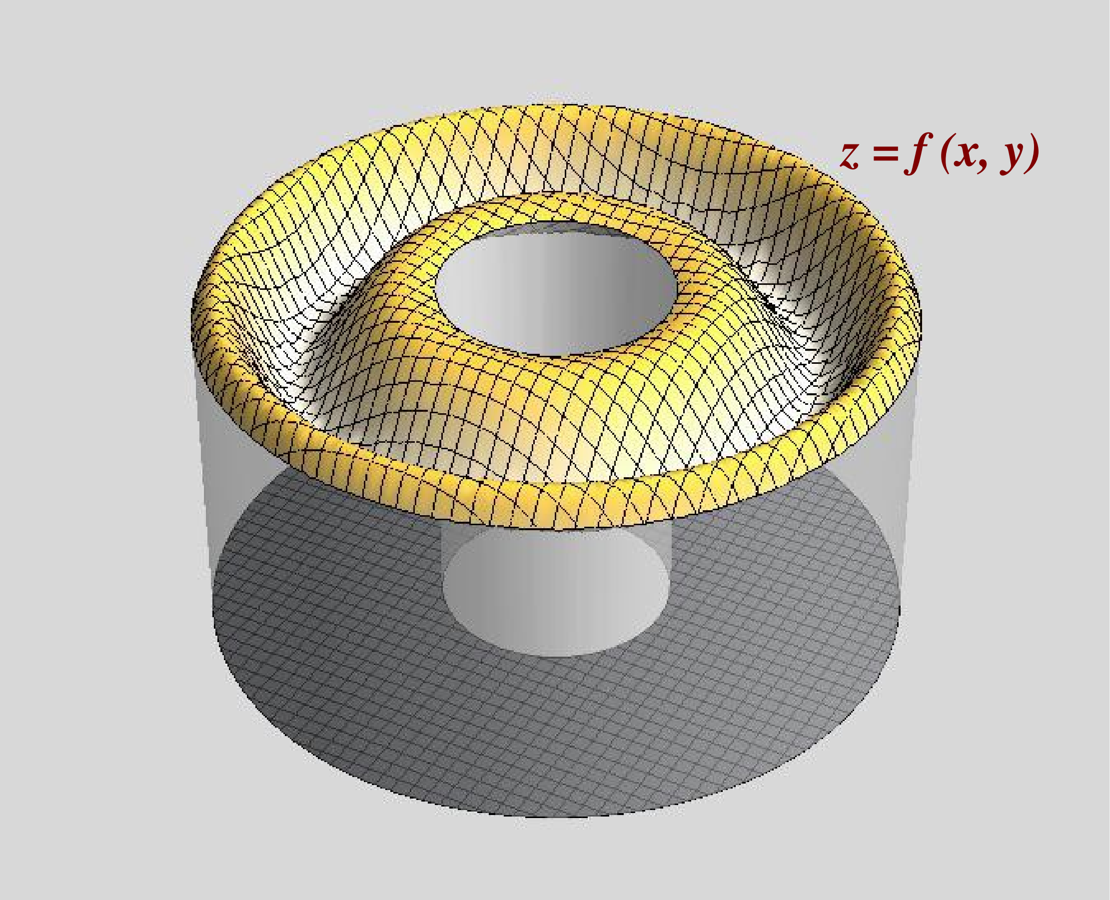


Abb. L7b: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ über dem Definitionsbereich A

$$V = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \iint_A g(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{3} \left(3 + \frac{1}{2}\sin(r^2)\right) r\, dr\, d\varphi =$$

$$= 24\pi + \frac{\pi}{2}\cos(1) - \frac{\pi}{2}\cos(9) \simeq 77.68 \ (\text{VE})$$

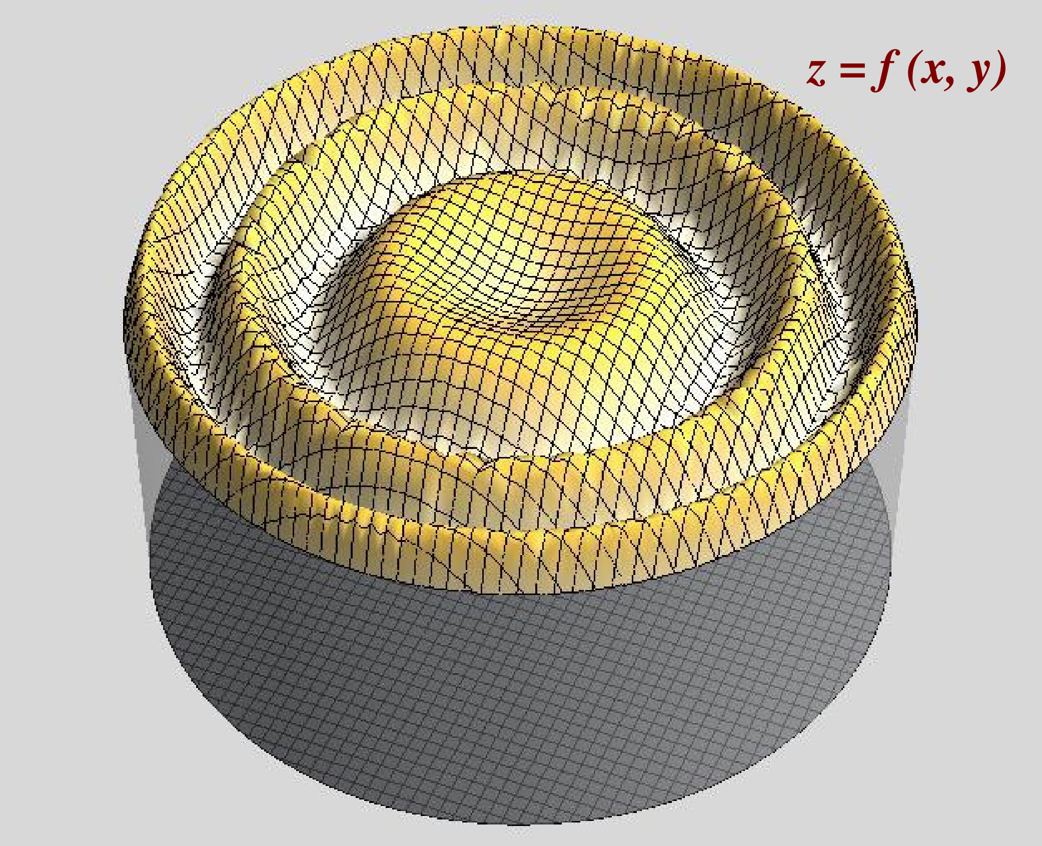
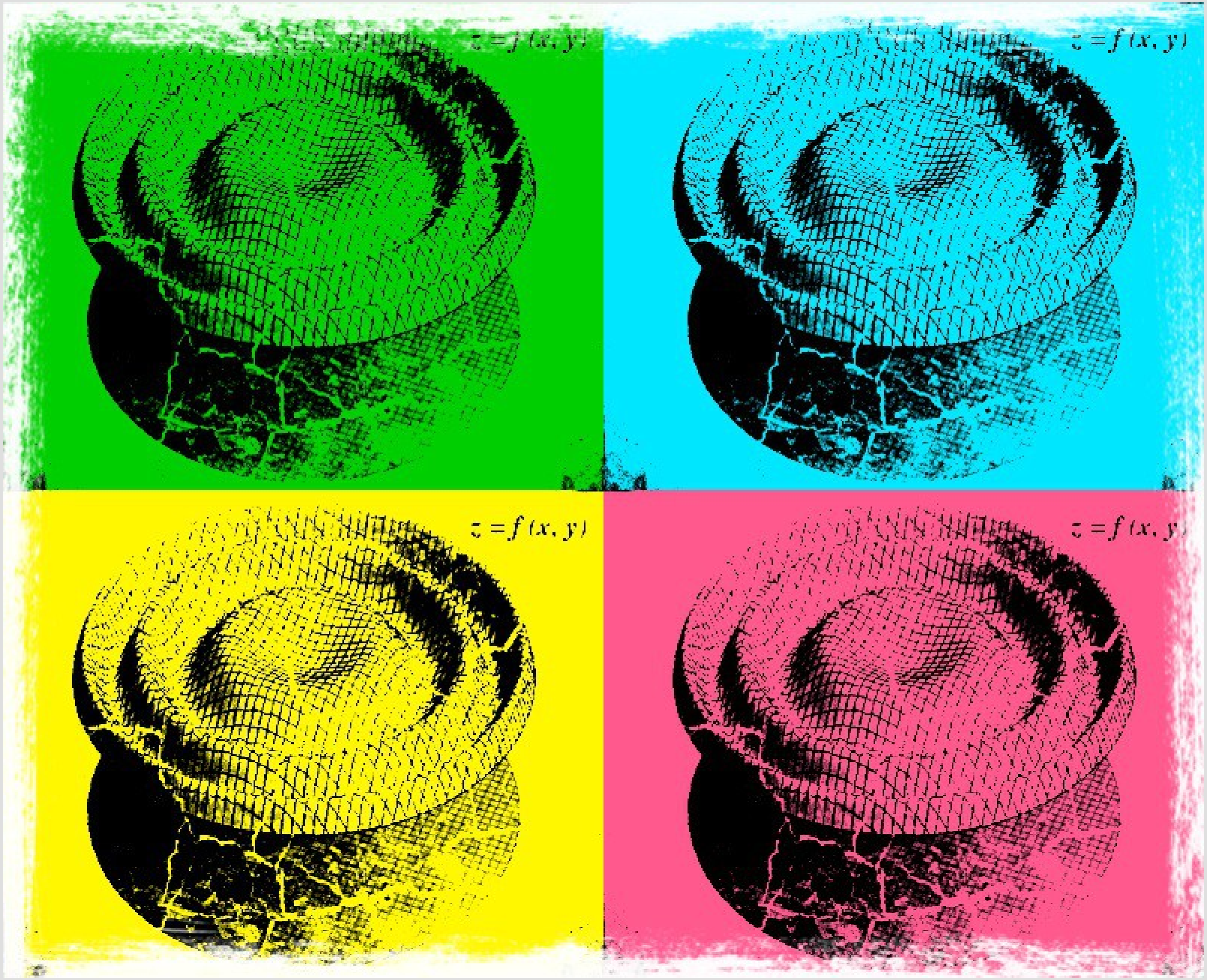


Abb. L7a: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ über dem Definitionsbereich A, dem Kreis mit dem Radius 4

$$V = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \iint_A g(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{4} \left(3 + \frac{1}{2} \sin(r^2)\right) r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \frac{97}{2}\pi - \frac{\pi}{2} \cos(16) \simeq 153.87 \text{ (VE)}$$



$z = f(x, y)$
$z = f(x, y)$
$z = f(x, y)$
$z = f(x, y)$

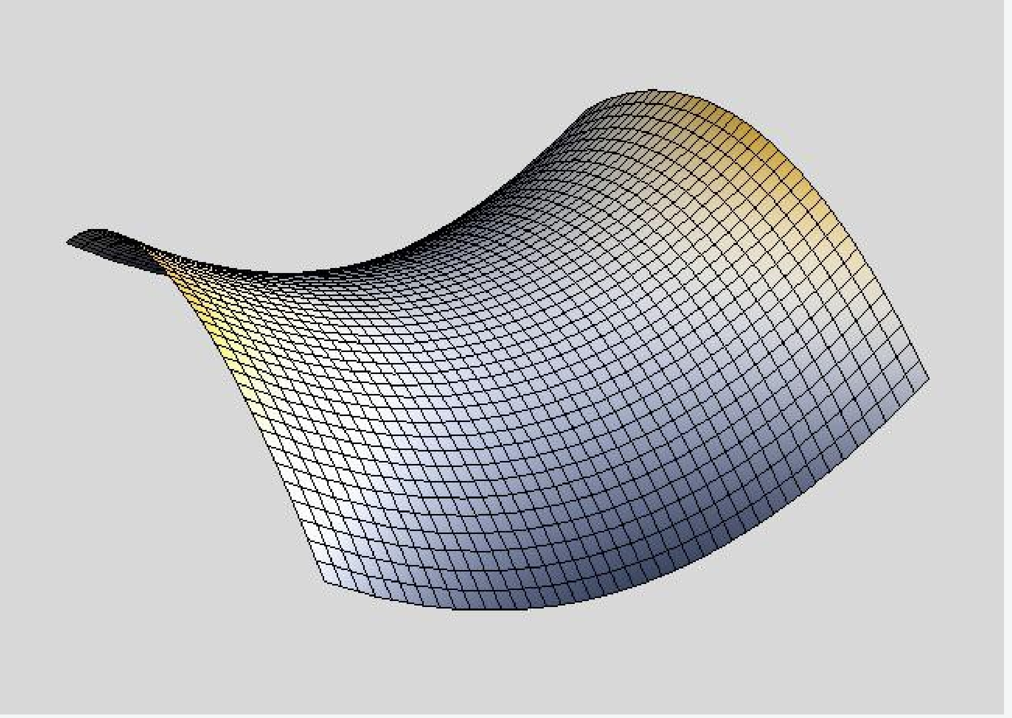


Abb. L9a: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

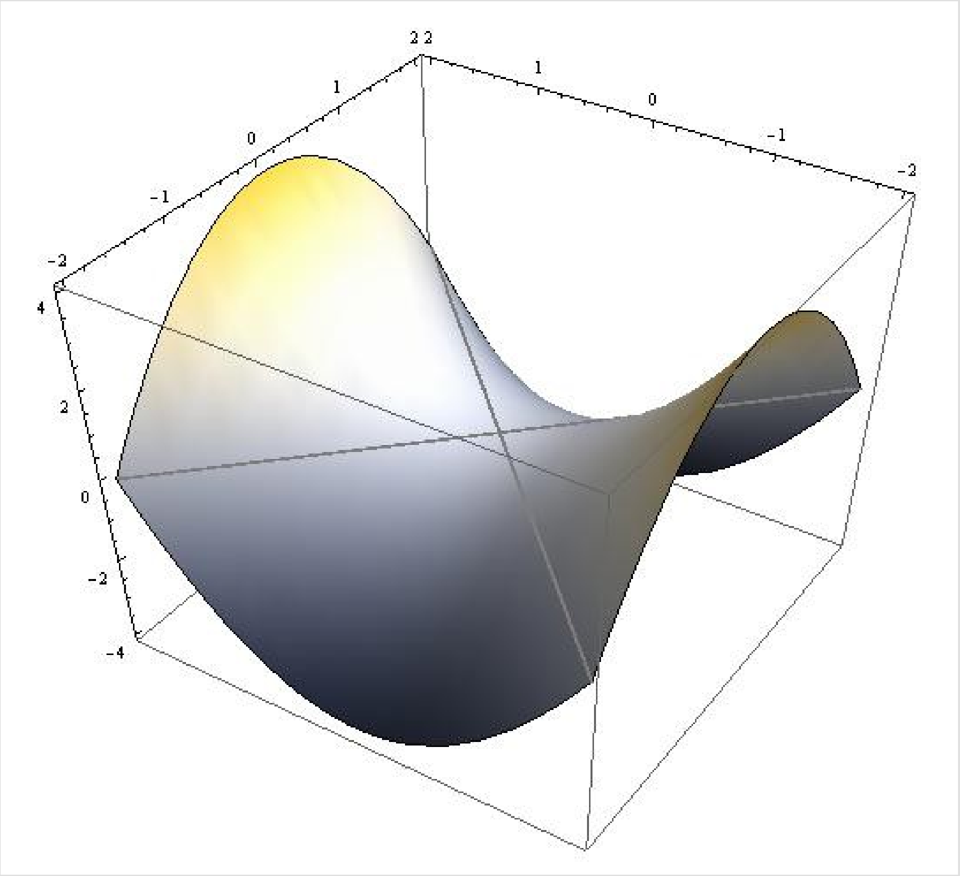


Abb. L9b: Graphische Darstellung der Funktion $z = y^2 - x^2$

Im Folgenden bestimmen wir das Volumen, das zwischen der Fläche der Funktion $z = f(x, y)$, dem Bereich A und den Ebenen $y = -2$ und $y = 2$ eingeschlossen ist.

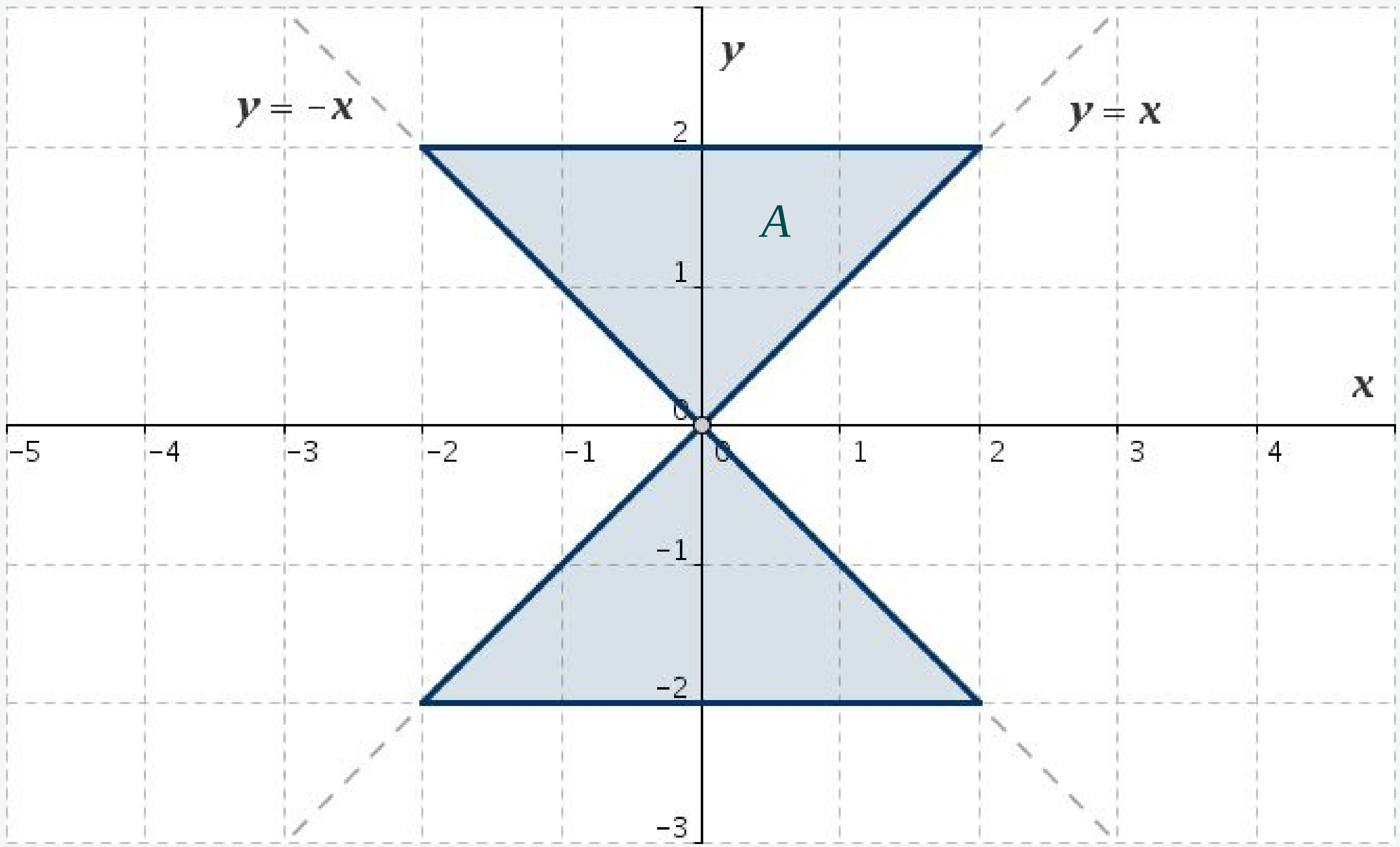


Abb. L9c: Graphische Darstellung des Bereiches A in der x,y-Ebene, A ist zwischen den Geraden y = x, y = - x, y = -2 und y = 2 eingeschlossen

Die Linien $y = x$ und $y = -x$ sind die Schnittlinien des hyperbolischen Paraboloids und der x,y-Ebene.

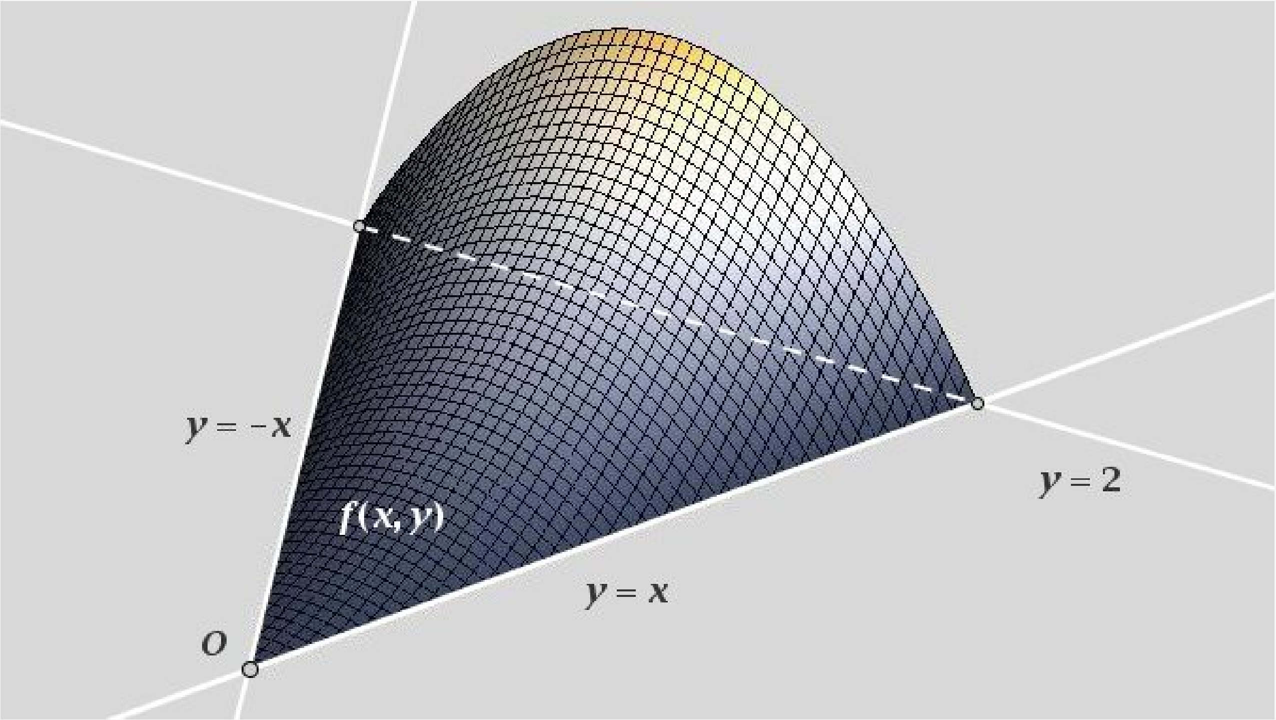


Abb. L9d: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ auf der oberen Hälfte des Bereiches A $(y \geq 0)$

$$f(x, y) = y^2 - x^2, \qquad A_O: \quad 0 \leqslant y \leqslant 2, \quad -y \leqslant x \leqslant y$$

Die Funktion $z = f(x, y)$ ist symmetrisch bezüglich der y-Achse:

$$f(-x, y) = f(x, y)$$

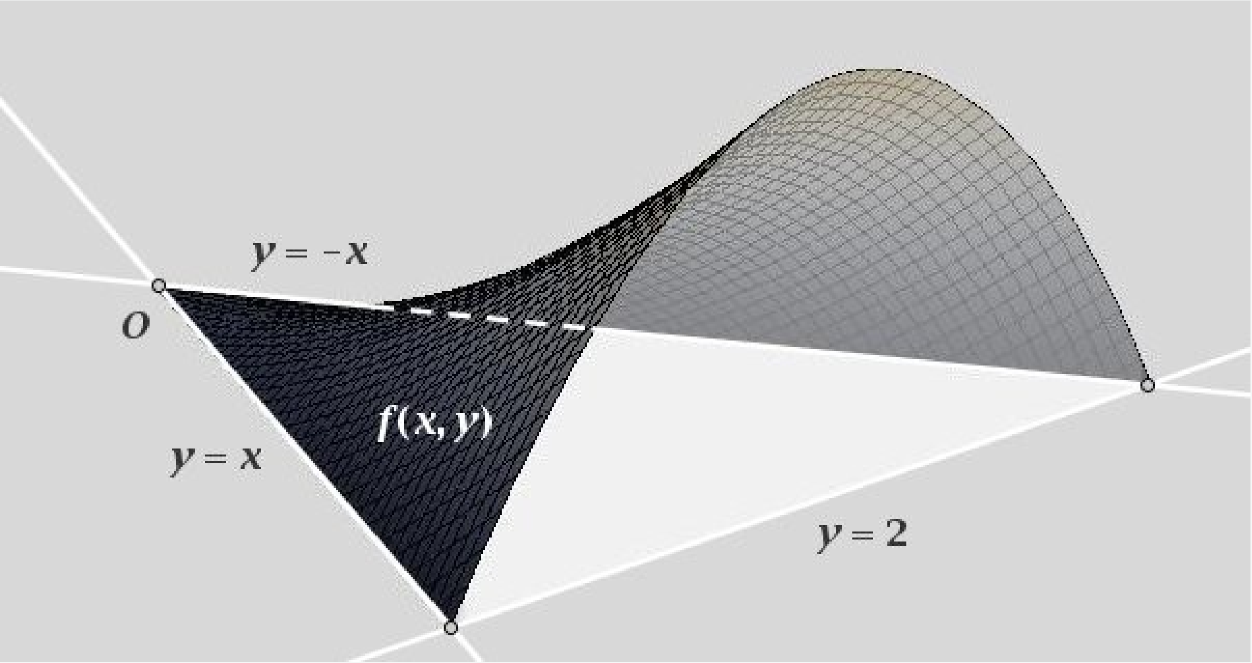


Abb. L9e: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ auf der oberen Hälfte des Bereiches A $(y \geq 0)$

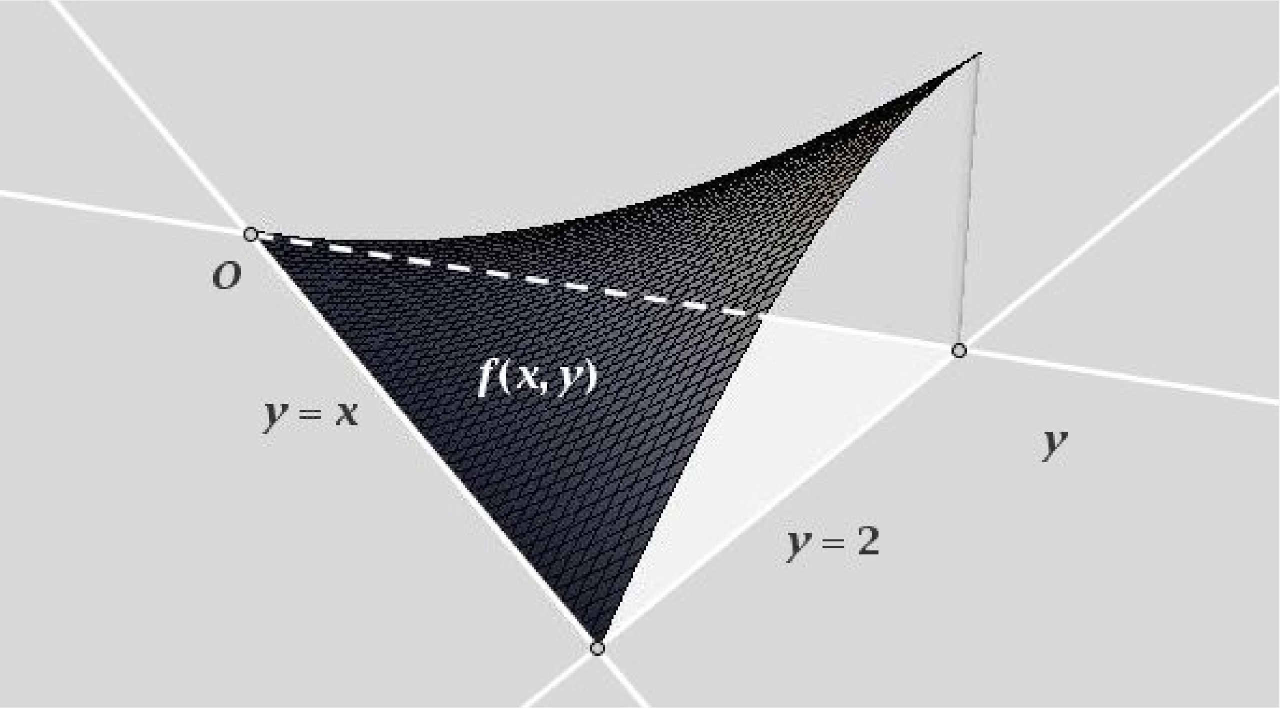
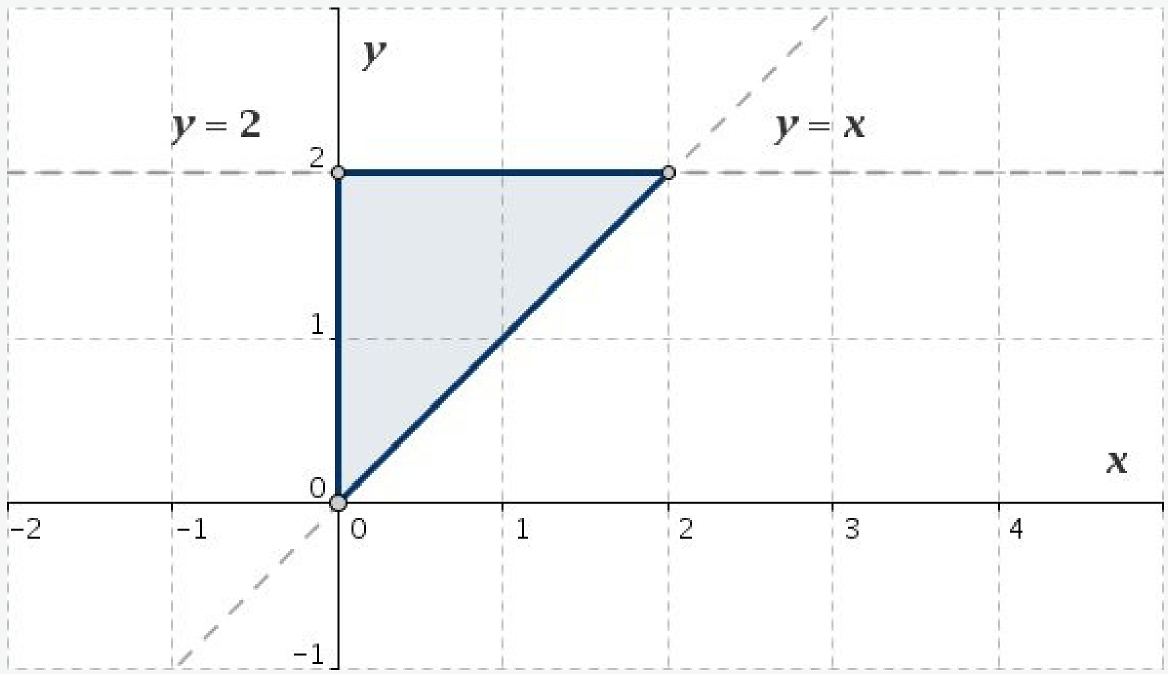


Abb. L9d: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ auf der rechten Hälfte des oberen Bereiches A $(x, y \geq 0)$

Die Funktion $z = f(x, y)$ ist symmetrisch bezüglich der x-Achse:

$$f(x, -y) = f(x, y)$$



$$V = \iint_A z \, dx\, dy = 4 \int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{y} z \, dx\, dy = 4 \int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{y} \left(y^2 - x^2 \right) dx\, dy =$$

$$= \frac{8}{3} \int_{y=0}^{2} y^3 \, dy = \frac{32}{3} \quad (\text{VE})$$