http://musicbox.juniorwebaward.ch/pictures/05/bpam2v8uuurwum051rpbwvhons4j18/violine_11-289.jpg

Symmetrien in Doppelintegralen: Aufgaben

Berechnen Sie folgende Integrale:

Aufgabe 1: $$\iint_A \left(2x - \sin(x^2)\, y\right) dx\, dy$$

Der Integrationsbereich A besteht aus den beiden Dreiecken OPQ und ORS mit den Eckpunkten:

$O\,(0,\ 0)$, $P\,(3,\ 2)$, $Q\,(3,\ -2)$, $R\,(-3,\ 2)$, $S\,(-3,\ -2)$

Aufgabe 2: $$\iint_A \left(\sin x + \cos x \cdot \sin y\right) dx\, dy$$

A ist ein Viereck mit den Eckpunkten:

$(2\pi,\ \pi)$, $(2\pi,\ -\pi)$, $(-2\pi,\ \pi)$, $(-2\pi,\ -\pi)$

Aufgabe 3: $$\iint_A \left(x - e^{x^2} y\right) dx\, dy$$

A ist ein Viereck mit den Eckpunkten:

$(3,\ 2)$, $(3,\ -2)$, $(-3,\ 2)$, $(-3,\ -2)$

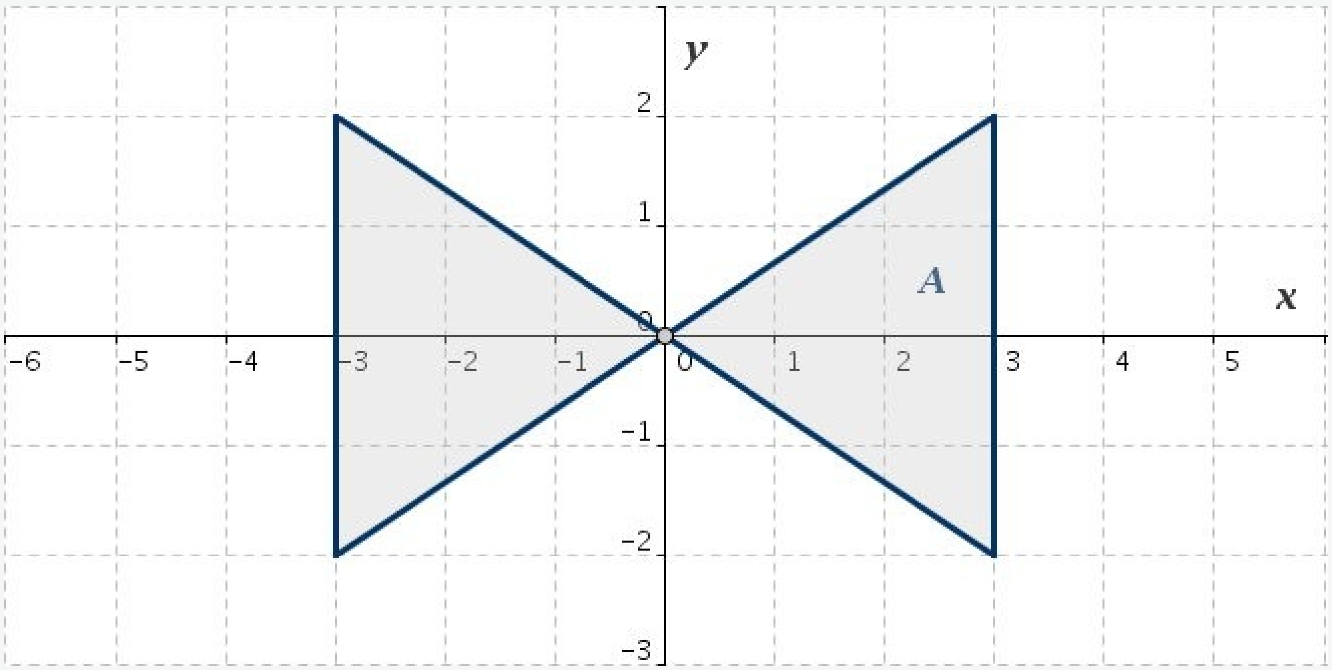

Abb. L1: Darstellung des Integrationsbereiches A

Wir berechnen das Integral $\iint\limits_A (2\,x - y\sin x^2)\;dx\,dy$

Die Symmetrie bezüglich der y-Achse liefert $\iint\limits_A 2\,x\;\;dx\,dy = 0$

Die Symmetrie bezüglich der x-Achse liefert $\iint\limits_A \sin x^2\,y\;\;dx\,dy = 0$

Deshalb ist $\iint\limits_A (2\,x - \sin x^2\,y)\;dx\,dy = 0$

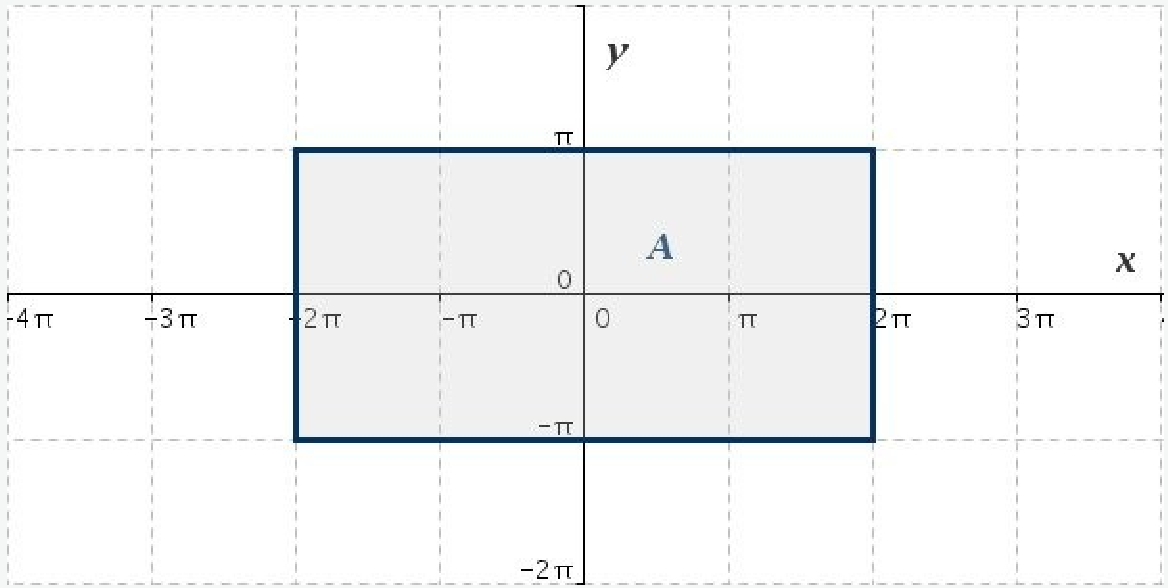

Abb. L2: Darstellung des Integrationsbereiches A

$$\iint\limits_A (\sin x + \cos x \cdot \sin y)\ dx\, dy$$

Die Symmetrie bezüglich der y-Achse liefert $\displaystyle\iint\limits_A \sin x\ dx\, dy = 0$

Die Symmetrie bezüglich der x-Achse liefert $\displaystyle\iint\limits_A \cos x \cdot \sin y\ dx\, dy = 0$

Deshalb ist $\displaystyle\iint\limits_A (\sin x - \cos \cdot \sin y)\ dx\, dy = 0$

Symmetrien in Doppelintegralen: Lösung 3

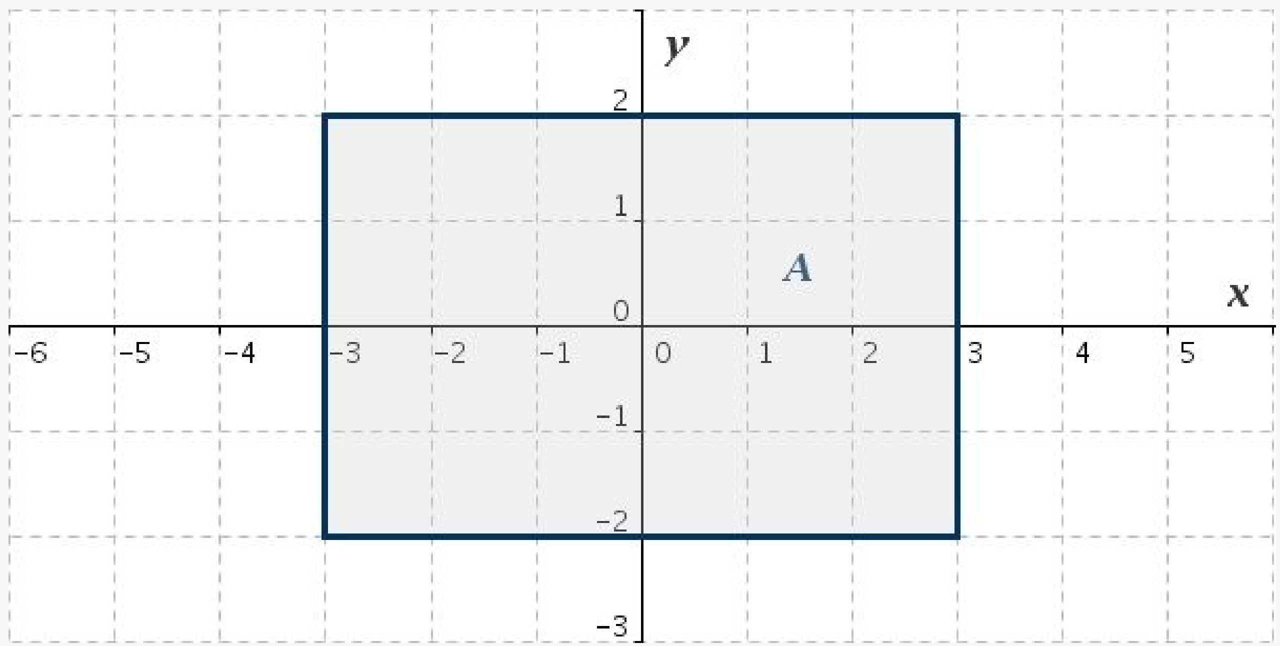

Abb. L3: Darstellung des Integrationsbereiches A

$$\iint_A \left(x - e^{x^2} y\right)\, dx\, dy$$

Die Symmetrie bezüglich der y-Achse liefert $\displaystyle\iint_A x \; dx\, dy = 0$

Die Symmetrie bezüglich der x-Achse liefert $\displaystyle\iint_A e^{x} \; y \; dx\, dy = 0$

Deshalb ist $\displaystyle\iint_A \left(x - e^{x^2} y\right)\, dx\, dy = 0$

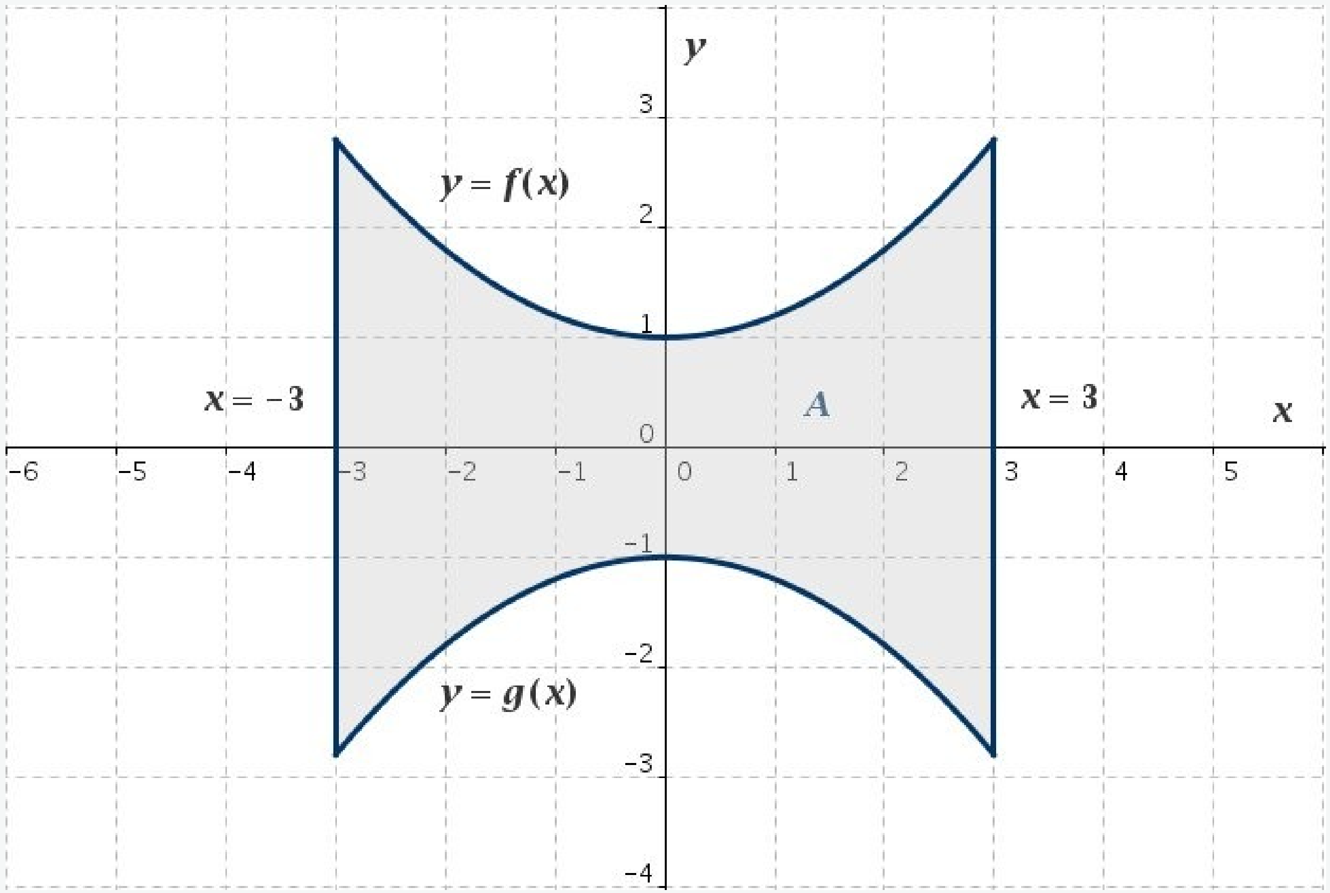

Abb. L4: Darstellung des Integrationsbereiches A

Berechnen Sie das Integral $\iint\limits_A (x^2 - y)\, dx\, dy$

Der Bereich A ist durch folgende Funktionen bestimmt:

$$f(x) = \frac{x^2}{5} + 1, \quad g(x) = -\frac{x^2}{5} - 1, \quad x = -3, \quad x = 3$$

$$\iint_A (x^2 - y)\; dx\, dy$$

Der Bereich A ist symmetrisch bezüglich der x-Achse und der y-Achse.

Die Symmetrie bezüglich der x-Achse liefert $\displaystyle\iint_A y\; dx\, dy = 0$

Die Symmetrie bezüglich der y-Achse liefert $\displaystyle\iint_A x^2\; dx\, dy = 2 \iint_{A_R} x^2\; dx\, dy$

A_R ist die rechte Hälfte von A, bzw. der Teil mit $x \geq 0$.

Die Symmetrie bezüglich der x-Achse liefert $\displaystyle\iint_{A_R} x^2\; dx\, dy = 2 \iint_{A_{R_o}} x^2\; dx\, dy$

A_{R_o} ist der oberer Teil der rechten Hälfte von A_R, bzw. der Teil von A_R mit $y \geq 0$.

$$\Rightarrow \quad \iint_A x^2\; dx\, dy = 2 \iint_{A_R} x^2\; dx\, dy = 4 \iint_{A_{R_o}} x^2\; dx\, dy$$

$$\iint_A (x^2 - y)\; dx\, dy = 4 \int_{x=0}^{3} x^2\; dx \int_{y=0}^{\frac{x^2}{5}+1} dy = 4 \int_0^3 \left(\frac{x^4}{5} + x^2 \right) dx = \frac{1872}{25} \simeq 74.88$$

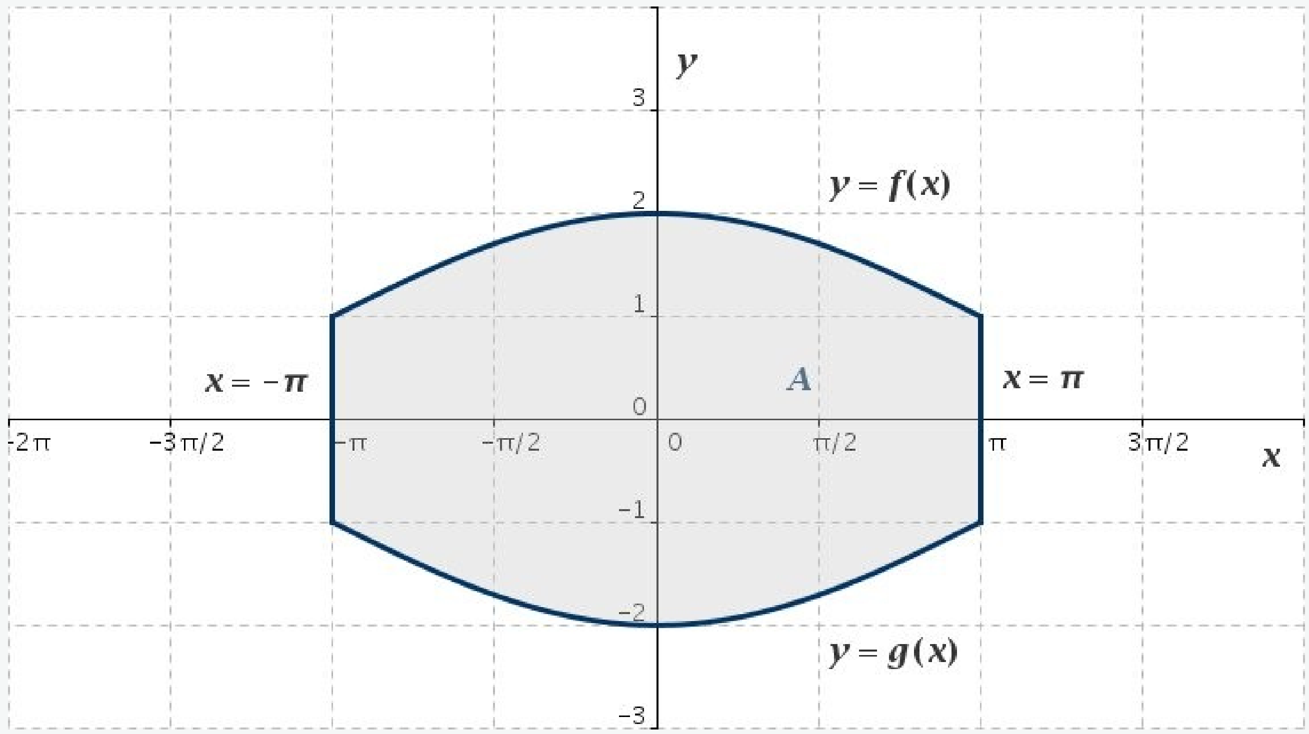

Abb. L5: Darstellung des Integrationsbereiches A

Berechnen Sie das Integral $\iint\limits_A (x^2 - \sin y + x^4 y)\ dx\, dy$

Der Bereich A ist durch folgende Funktionen bestimmt:

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1, \quad g(x) = -\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1, \quad x = -\pi, \quad x = \pi$$

$$\iint\limits_A (x^2 - \sin y + x^4 y)\, dx\, dy$$

Der Bereich A ist symmetrisch bezüglich der x-Achse und der y-Achse.

$$\iint\limits_A (\sin y + x^4 y)\, dx\, dy = 0, \qquad \iint\limits_A x^2\, dx\, dy = 2 \iint\limits_{A_R} x^2\, dx\, dy$$

$$A_R: \quad -\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \leqslant y \leqslant \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

$$\iint\limits_{A_R} x^{٢}\, dx\, dy = 2 \iint\limits_{A_{R_O}} x^2\, dx\, dy\,, \quad A_{R_O}: \; 0 \leqslant y \leqslant \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

$$\iint\limits_A (x^2 - \sin y + x^4 y)\, dx\, dy = 4 \int\limits_{x=0}^{\pi} x^2\, dx \int\limits_{y=0}^{\cos(x/2)+1} dy =$$

$$= 4 \int\limits_{x=0}^{\pi} x^2 \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) dx = 8\pi^2 - 64 + \frac{4}{3}\pi^3 \simeq 56.3$$