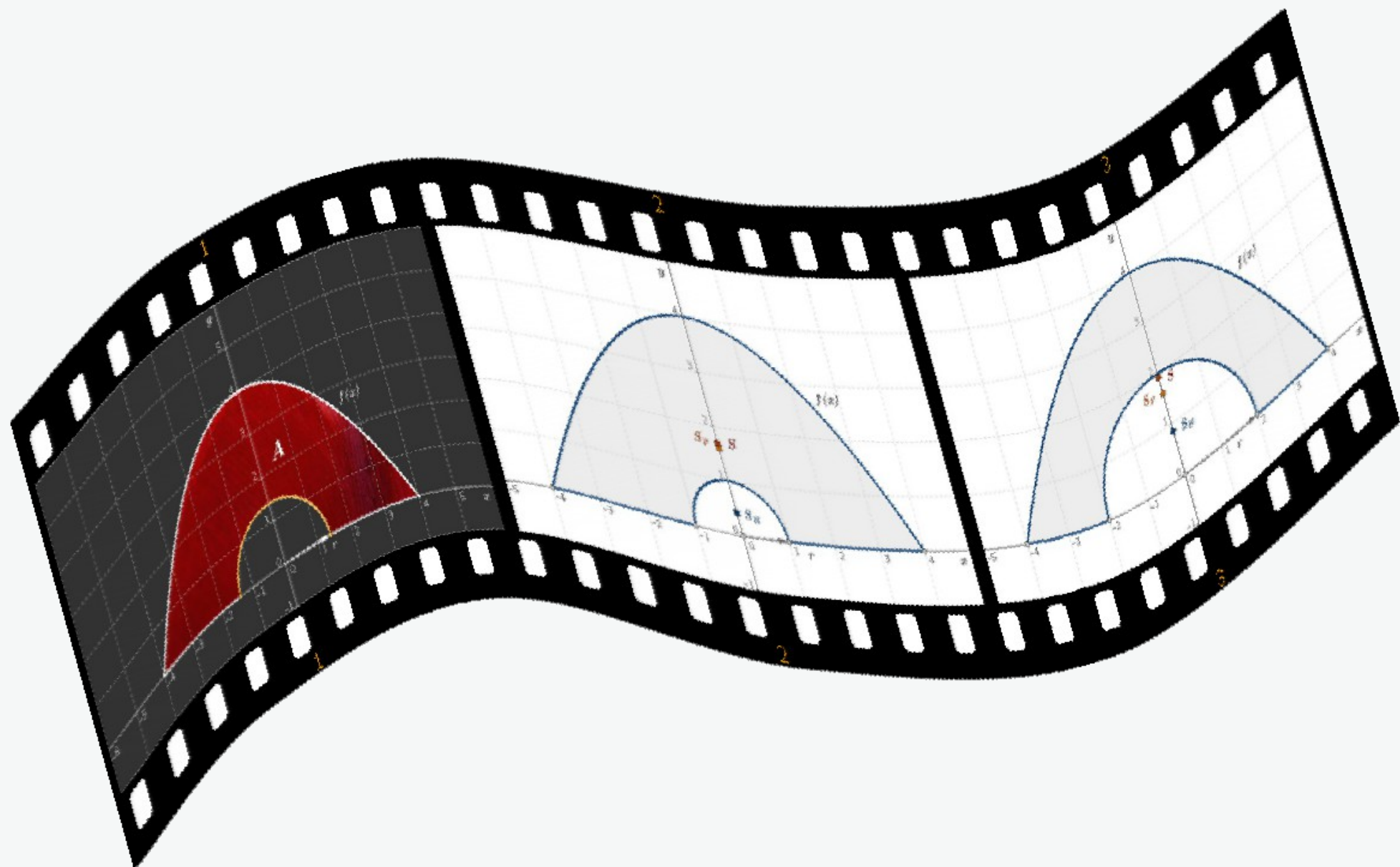




Schwerpunkt homogener ebener Flächen: Teil 3b





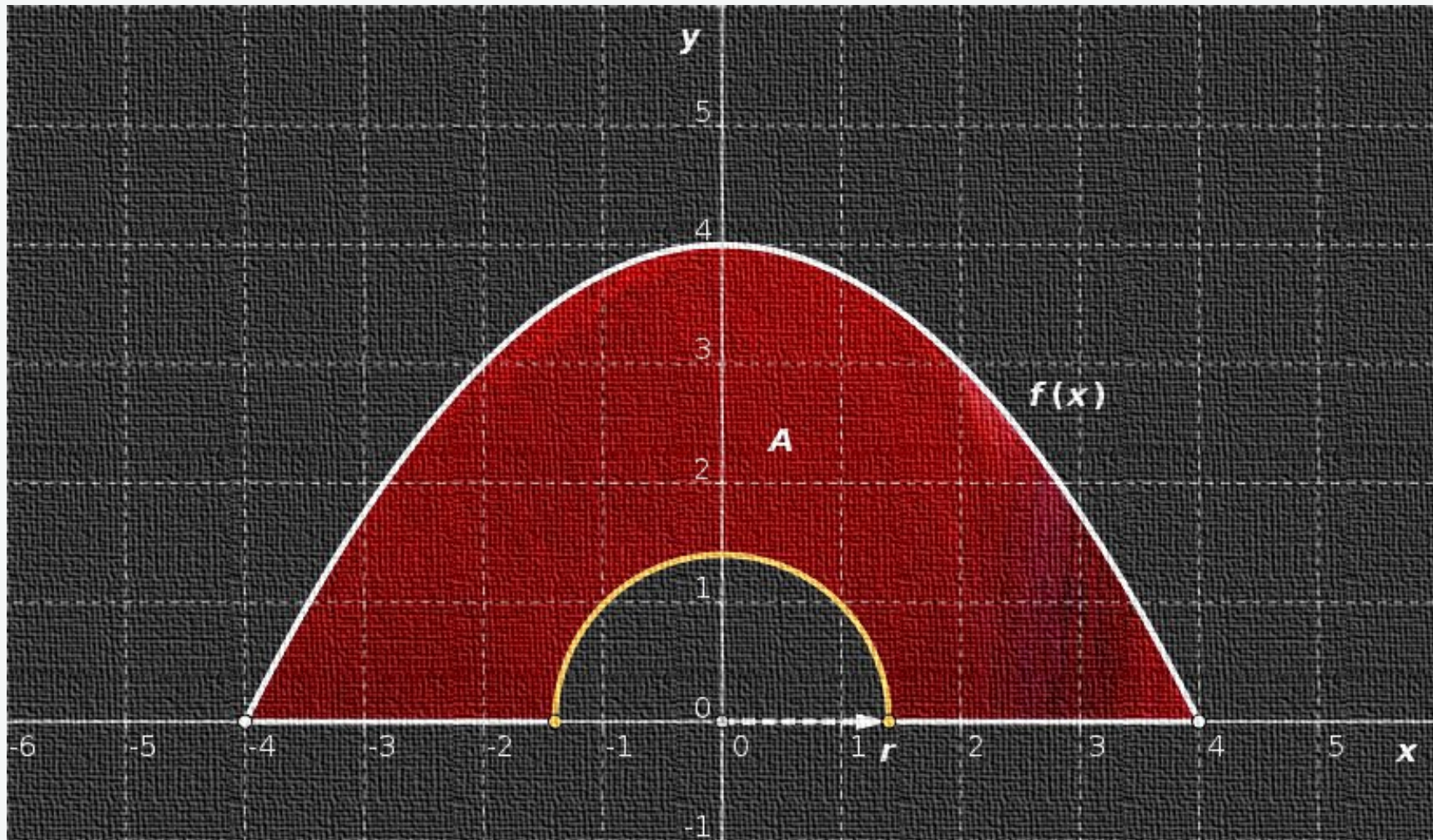


Abb. L1-1: Die Fläche A der Aufgabe

Berechnen Sie den Schwerpunkt der Fläche A, die durch die Funktion $y = f(x)$ und die x -Achse begrenzt wird, aus der ein Halbkreis mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und Radius r herausgeschnitten wird ($0 < r \leq 3.4$)

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + 4$$

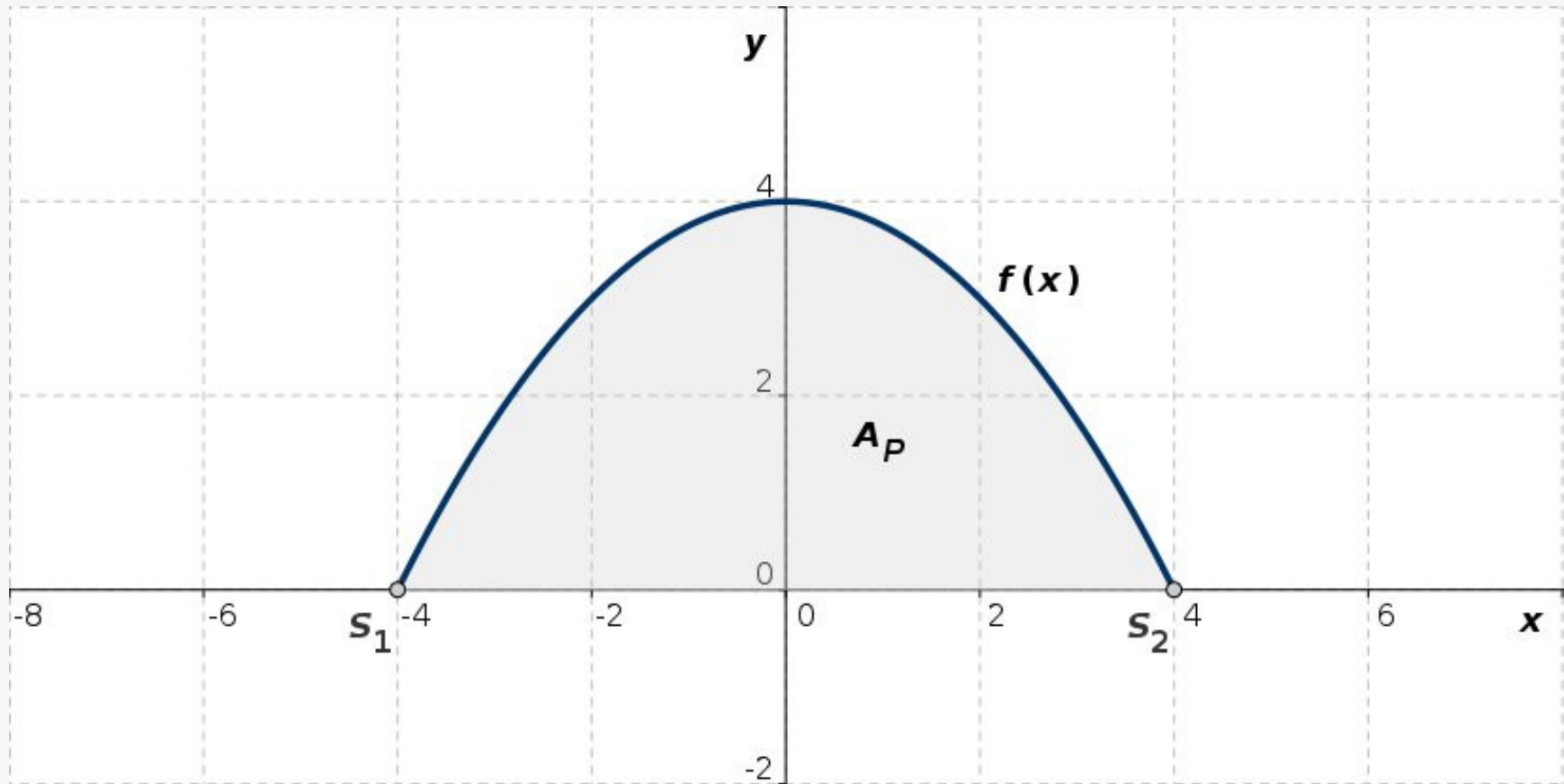


Abb. L1-2: Die Fläche A zwischen der Funktion $y=f(x)$ und der x -Achse

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + 4, \quad S_1 = (-4, 0), \quad S_2 = (4, 0)$$

$$A_P = \int_{x=-4}^4 \int_{y=0}^{f(x)} dy \, dx = 2 \int_{x=0}^4 \int_{y=0}^{-\frac{x^2}{4} + 4} dy \, dx = 2 \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{4} + 4 \right) dx = \frac{64}{3} \text{ (FE)}$$

$$\begin{aligned}x_{S_P} &= \frac{1}{A} \int_{x=-4}^4 \int_{y=0}^{-\frac{x^2}{4} + 4} x \, dy \, dx = \frac{3}{64} \int_{x=-4}^4 x \, dx \int_{y=0}^{-\frac{x^2}{4} + 4} dy = \\&= \frac{3}{64} \int_{-4}^4 x \left(4 - \frac{x^2}{4} \right) dx = 0 \text{ (LE)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{S_P} &= \frac{1}{A} \int_{x=-4}^4 \int_{y=0}^{-\frac{x^2}{4} + 4} y \, dy \, dx = \frac{3}{64} \int_{x=-4}^4 \int_{y=0}^{-\frac{x^2}{4} + 4} y \, dy \, dx = \\&= \frac{3}{128} \int_{-4}^4 \left(4 - \frac{x^2}{4} \right)^2 dx = \frac{8}{5} \text{ (LE)}\end{aligned}$$

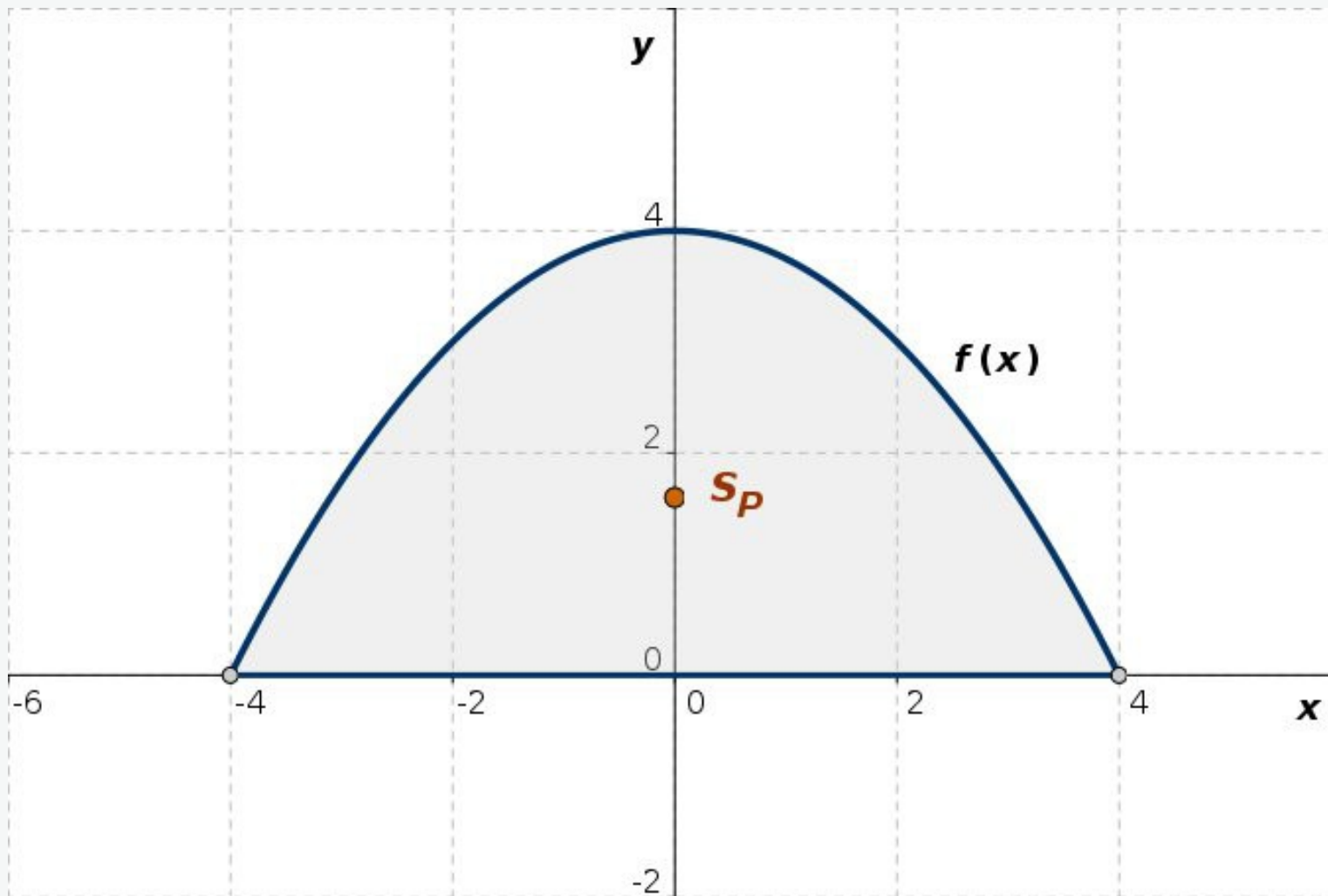


Abb. L1-3: Der Schwerpunkt der Fläche A zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x -Achse

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + 4, \quad S_P = \left(0, \frac{8}{5}\right)$$

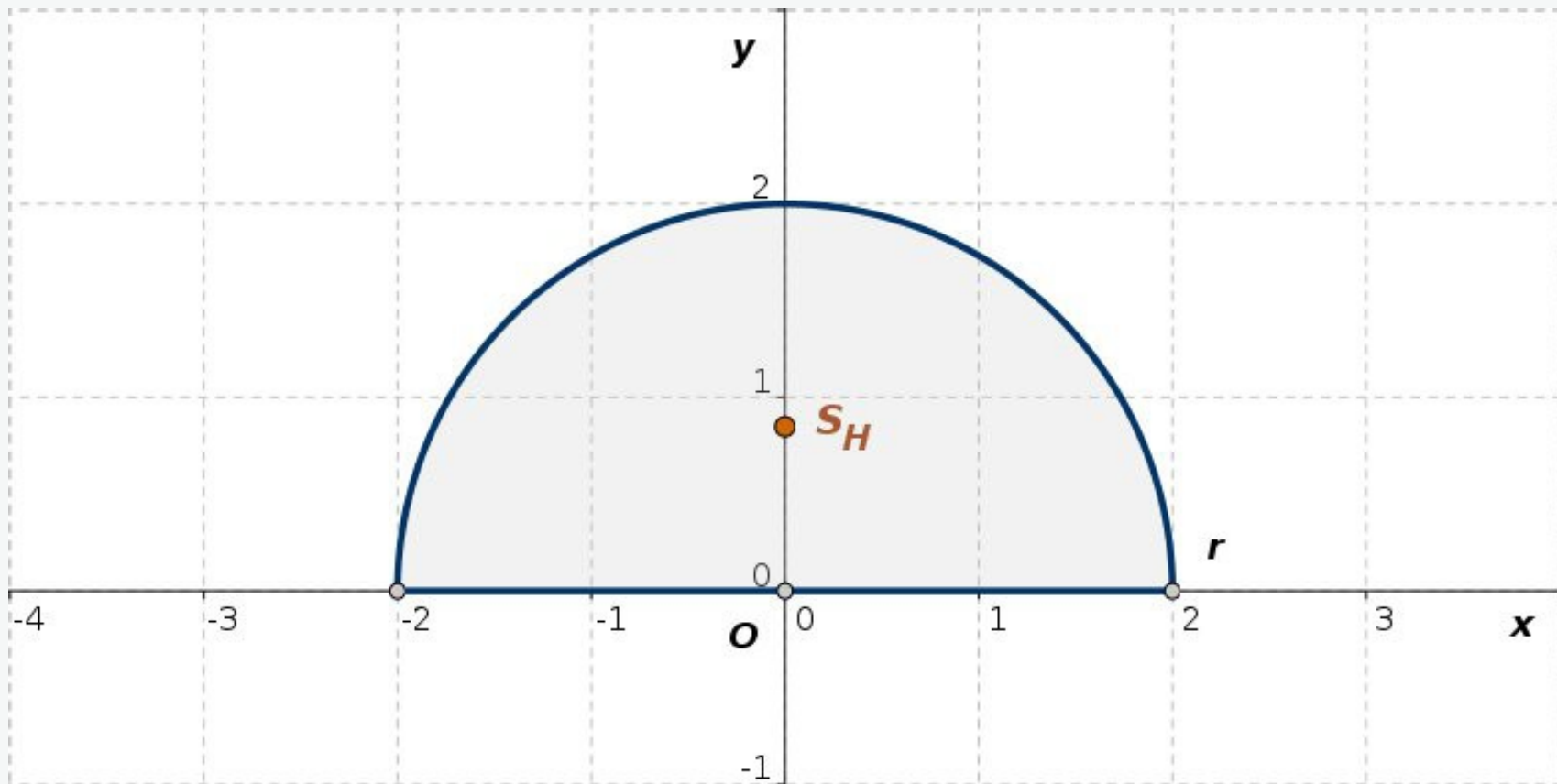


Abb. L1-4: Halbkreis und Schwerpunkt

$$A_H = \frac{1}{2} \pi r^2, \quad S_H = \left(0, \frac{4r}{3\pi}\right)$$

$$A_P = \frac{64}{3}, \quad S_P = \left(0, \frac{8}{5}\right)$$

$$A_H = \frac{1}{2} \pi r^2, \quad S_H = \left(0, \frac{4r}{3\pi}\right)$$

Aus Symmetriegründen ist $x_S = 0$

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{A_P - A_H} (y_{S_P} A_P - y_{S_H} A_H) = \\ &= \frac{1}{\left(\frac{64}{3} - \frac{\pi r^2}{2}\right)} \left(\frac{8}{5} \cdot \frac{64}{3} - \frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{2}\right) = \frac{204.8 - 4r^3}{128 - 3\pi r^2} \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt der Fläche A ist

$$S = \left(0, \frac{204.8 - 4r^3}{128 - 3\pi r^2}\right)$$

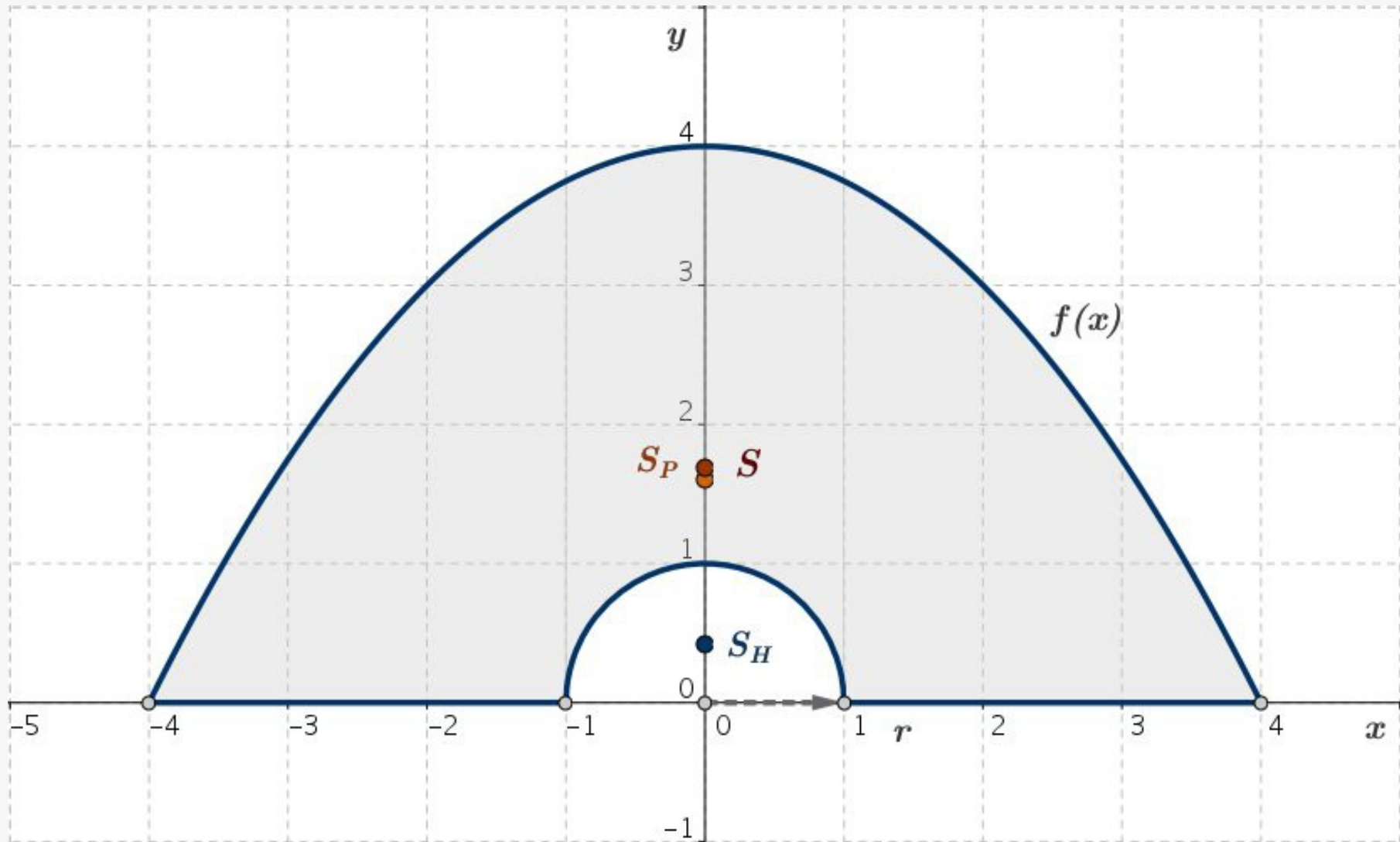


Abb. L1-5: Schwerpunkt S der Fläche mit herausgeschnittenem Halbkreis mit Radius $r = 1$

$$S_P = \left(0, \frac{8}{5}\right), \quad S_H = \left(0, \frac{4r}{3\pi}\right), \quad S = \left(0, \frac{204.8 - 4r^3}{128 - 3\pi r^2}\right)$$

$$r = 1 : \quad S \simeq (0, 1.69)$$

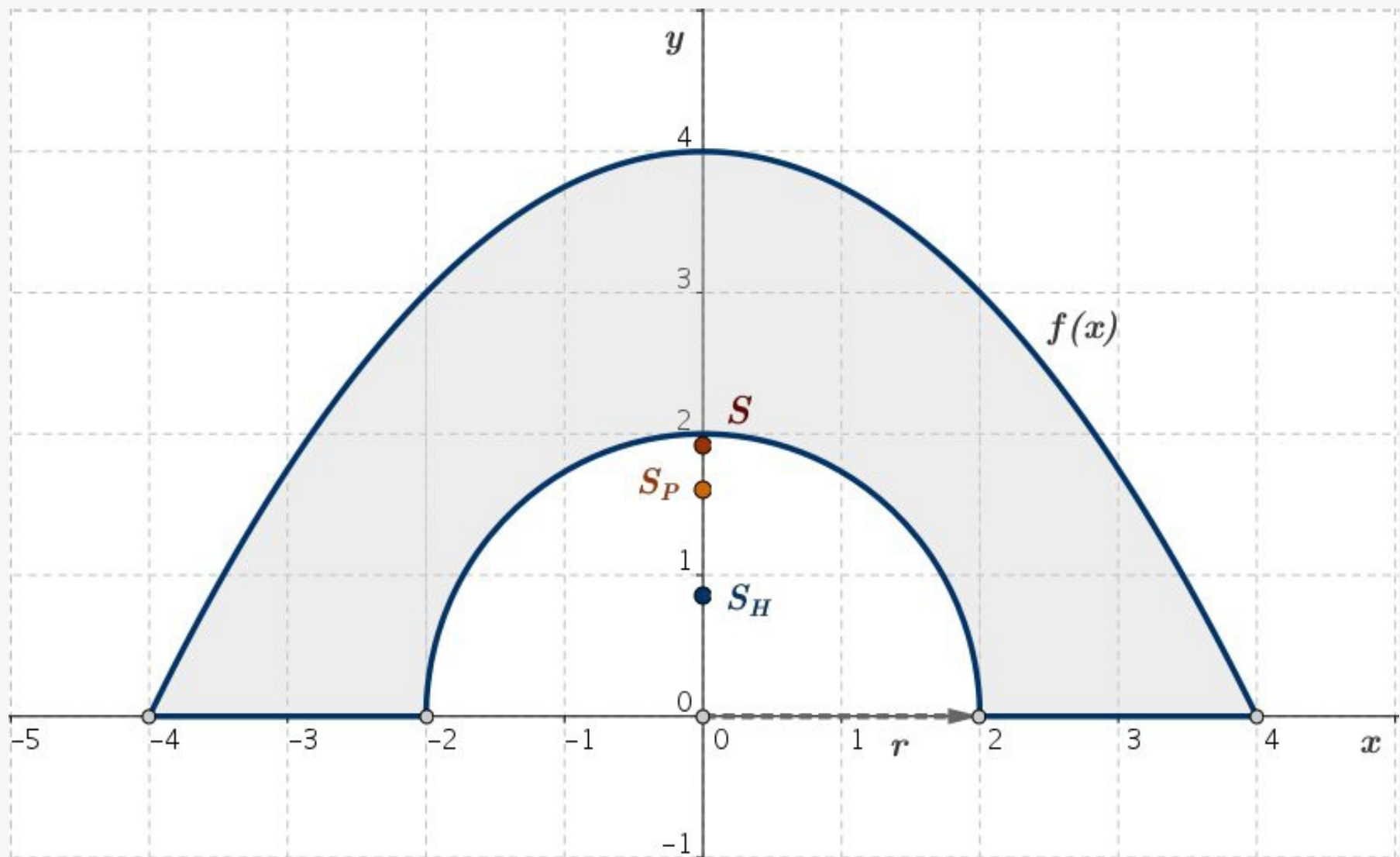


Abb. L1-6: Schwerpunkt S der Fläche mit herausgeschnittenem Halbkreis mit Radius $r = 2$

$$r = 2 : \quad S \simeq (0, 1.91)$$

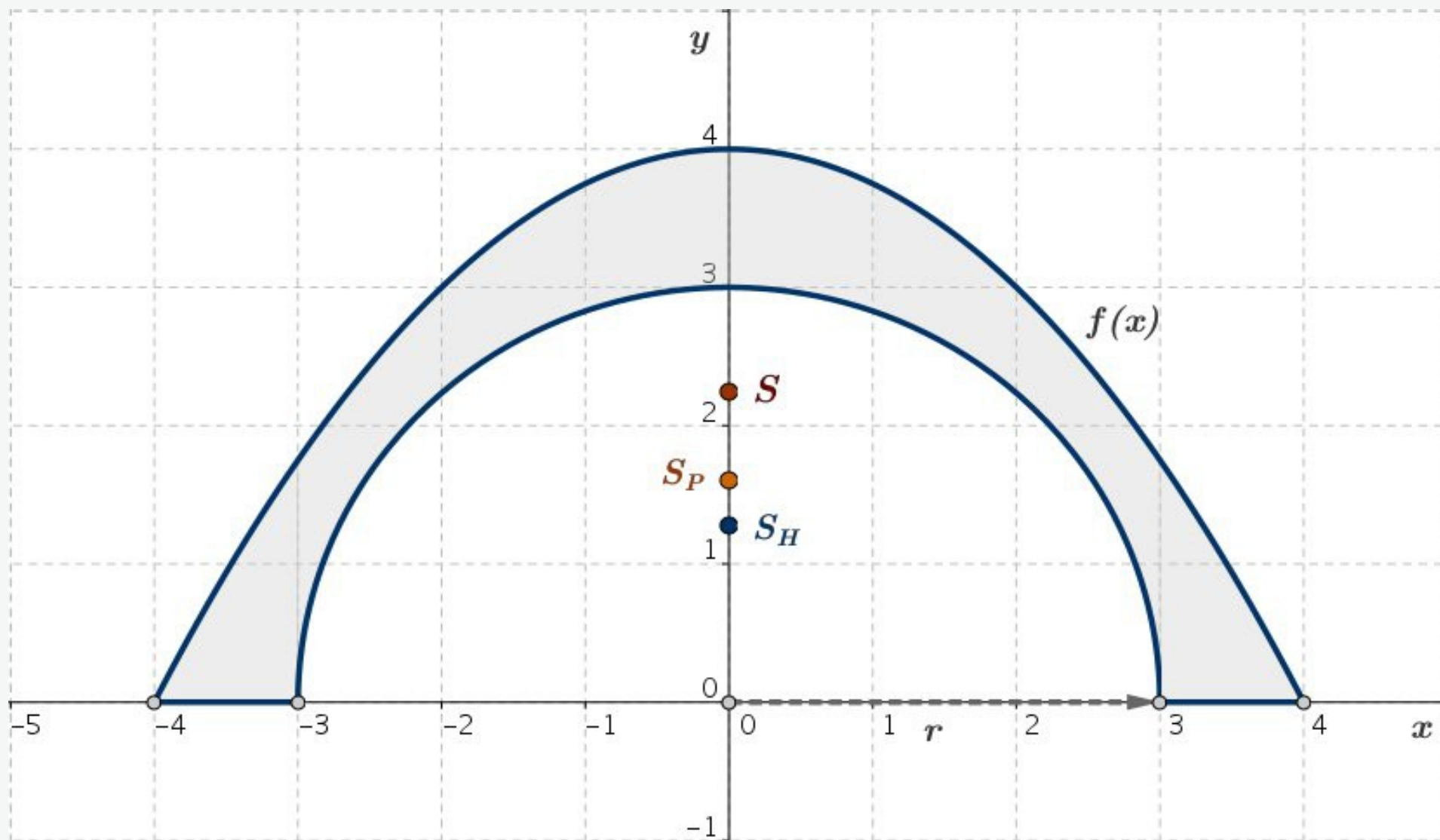


Abb. L1-7: Schwerpunkt S der Fläche mit herausgeschnittenem Halbkreis mit Radius $r = 3$

$$r = 3 : \quad S \simeq (0, 2.24)$$

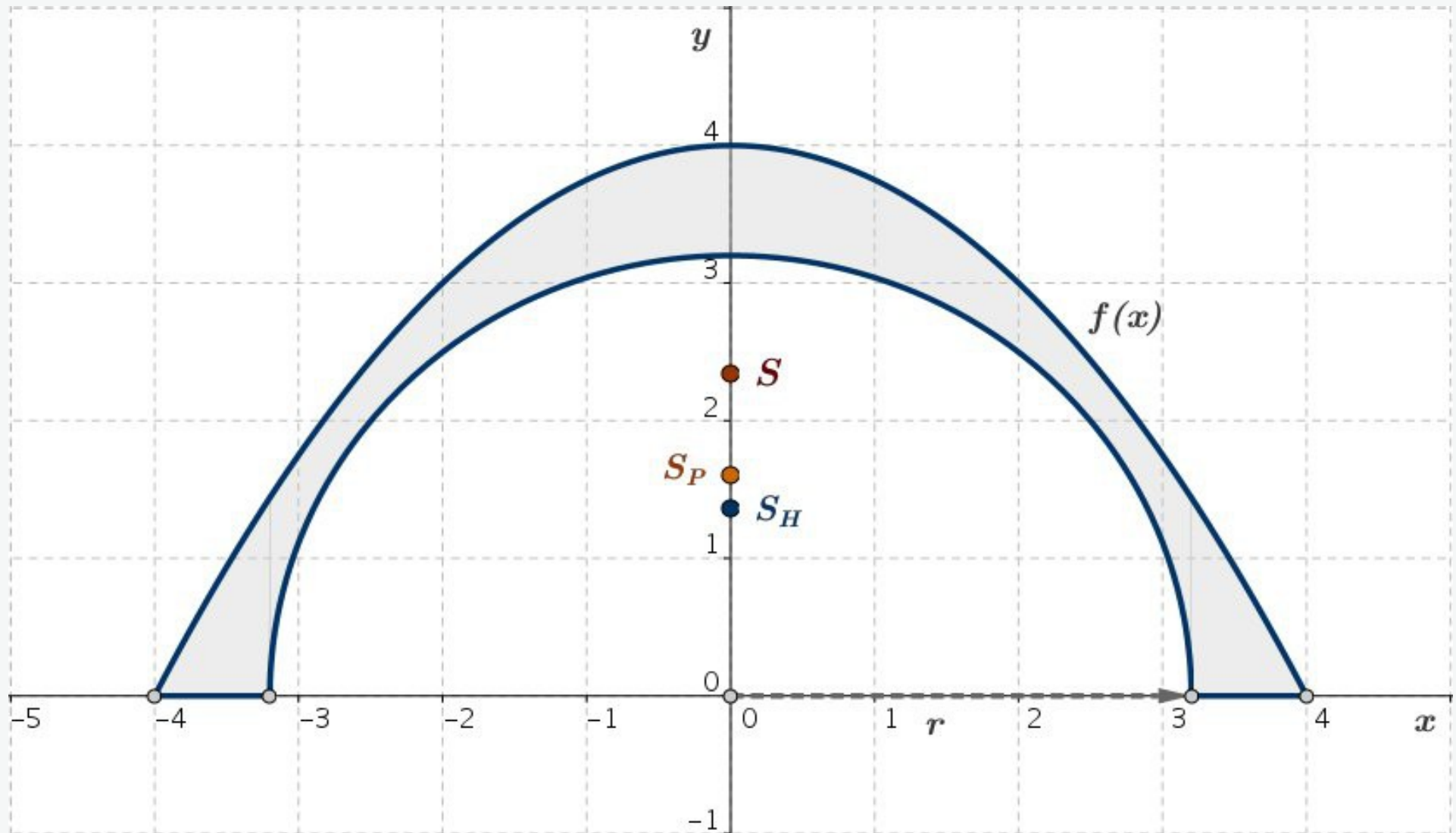


Abb. L1-8: Schwerpunkt S der Fläche mit herausgeschnittenem Halbkreis mit Radius $r = 3.2$

$$r = 3.2 : \quad S \simeq (0, 2.34)$$

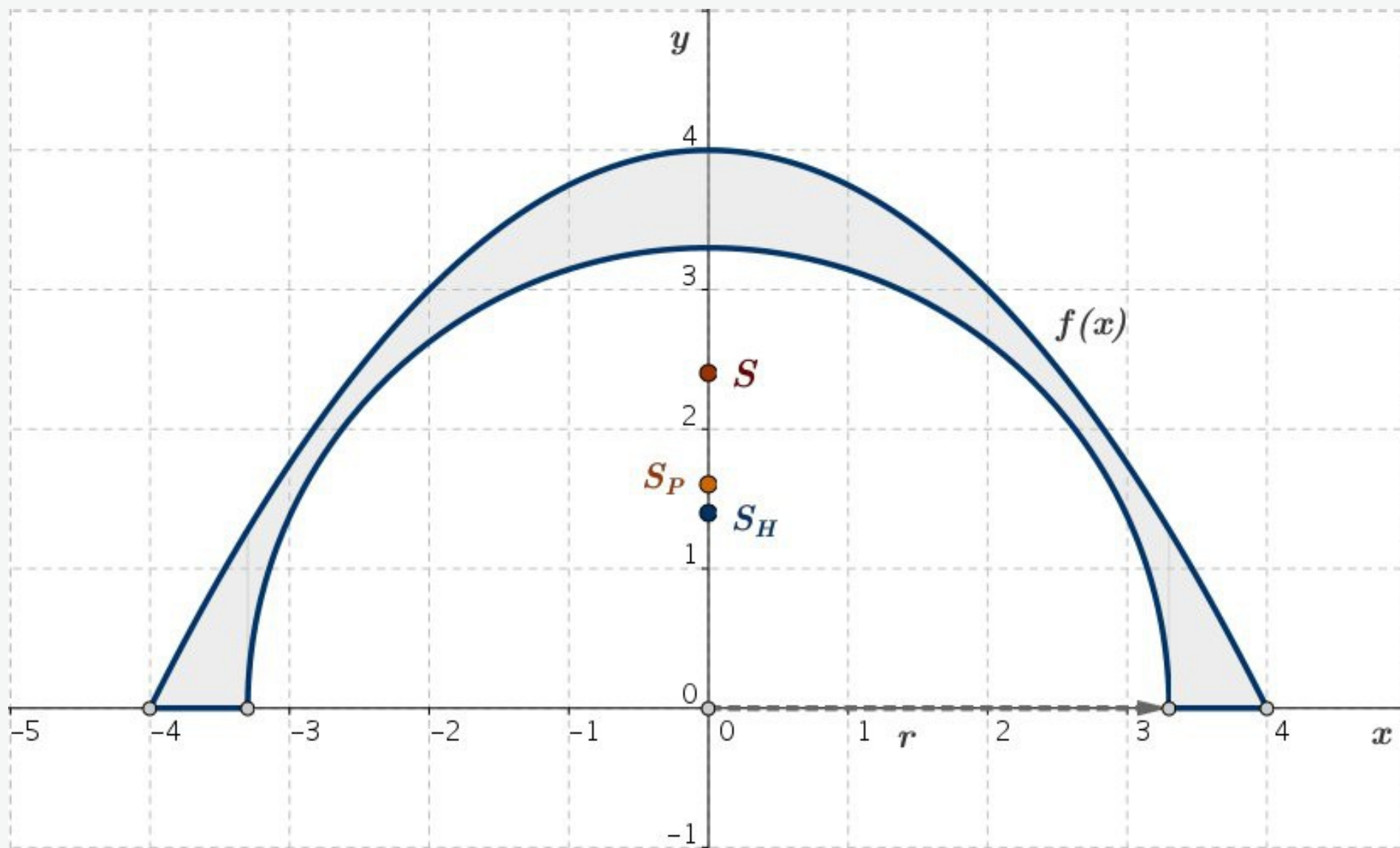


Abb. L1-9: Schwerpunkt S der Fläche mit herausgeschnittenem Halbkreis mit Radius $r = 3.3$

$$r = 3.3 : \quad S \simeq (0, 2.41)$$

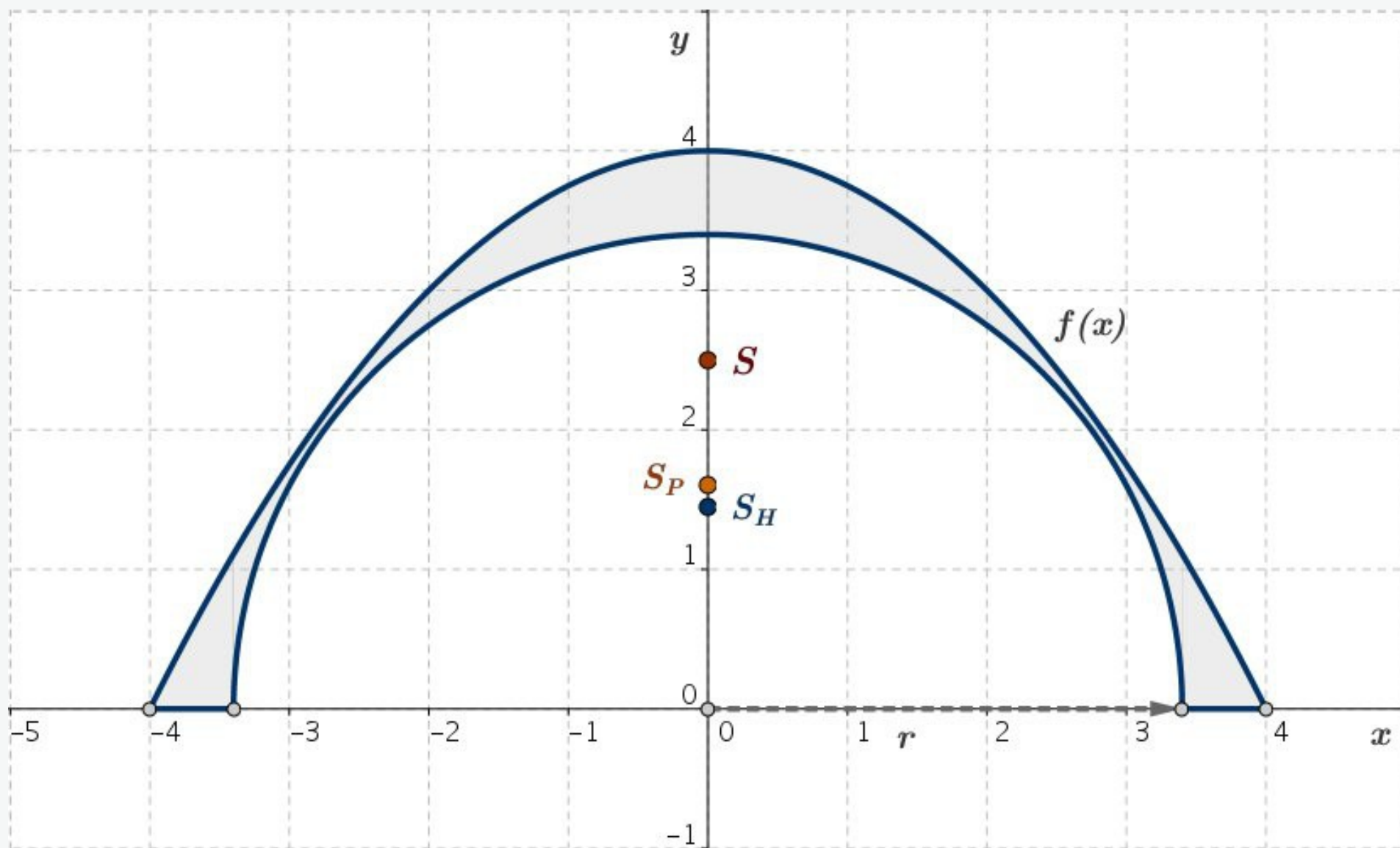


Abb. L1-10: Schwerpunkt S der Fläche mit herausgeschnittenem Halbkreis mit Radius $r = 3.4$

$$r = 3.4 : \quad S \simeq (0, 2.5)$$

