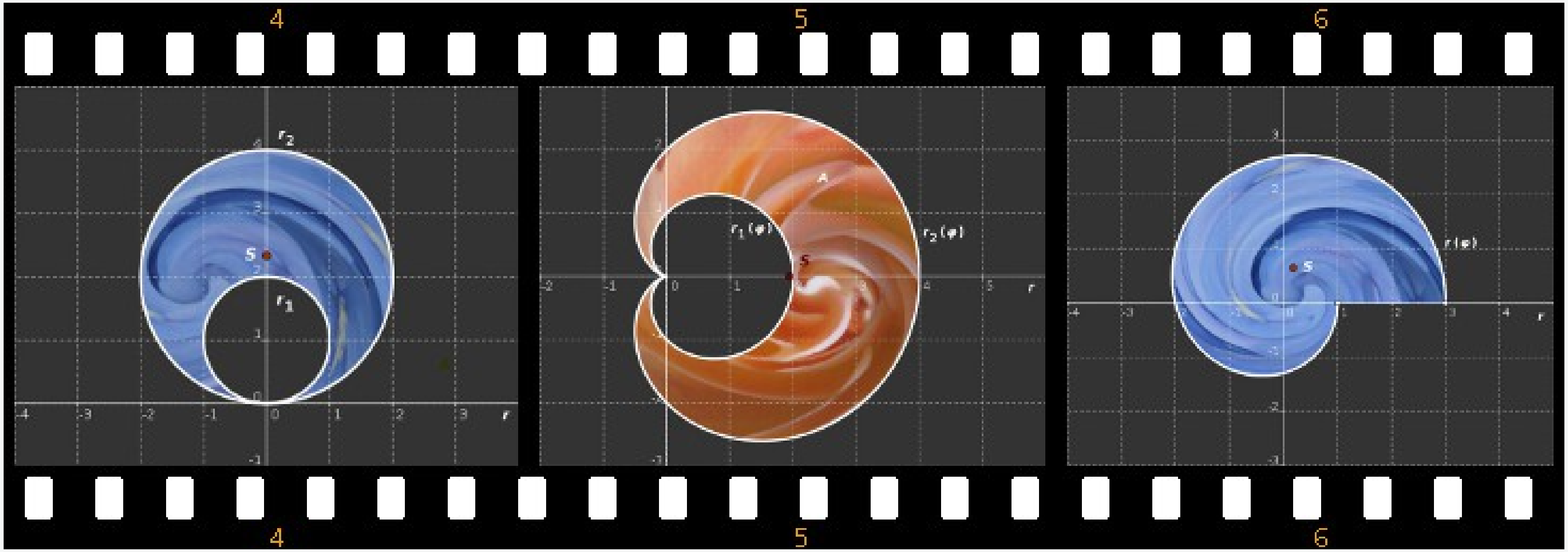
Celle, Stadtkirche St. Marien, Fragment

Schwerpunkt homogener ebener Flächen: Teil 2

"Flächeninhalt"



Aufgabe 7:

Gesucht ist der Schwerpunkt

a) eines Viertelkreises mit Radius R,

b) eines Halbkreises mit Radius R,

c) einer Fläche, die von der Funktion $y = g(x)$ und der x-Achse begrenzt wird

Aufgabe 8:

Berechnen Sie den Schwerpunkt der von der Kardioide begrenzten Fläche

$$r = 1 + \cos\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

Aufgabe 9:

Berechnen Sie den Schwerpunkt der von den Kurven

$$r_1(\varphi) = 2\sin\varphi, \qquad r_2(\varphi) = 4\sin\varphi$$

begrenzten Fläche

Aufgabe 10:

Berechnen Sie den Schwerpunkt der von zwei Kardioiden begrenzten Fläche

$$r_1(\varphi) = a\,(1 + \cos\varphi)\,, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

$$r_2(\varphi) = b\,(1 + \cos\varphi)\,, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

$$a < b$$

Aufgabe 11:

Berechnen Sie den Schwerpunkt der Fläche, die von der Kurve $r = r(\varphi)$ und der x-Achse begrenzt wird

$$r(\varphi) = 2 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

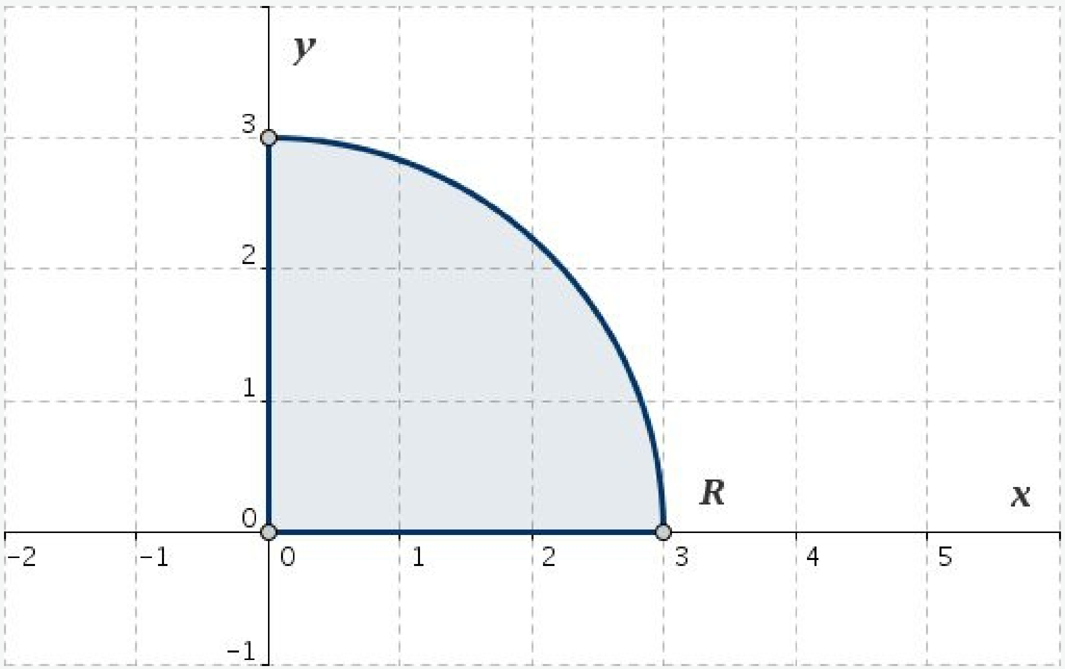


Abb. L7-1: Viertelkreis mit Radius R

$$0 \leqslant r \leqslant R\,, \qquad 0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}\,, \qquad A = \frac{\pi\, R^2}{4}$$

Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt S auf der Geraden $y = x$.

$$x_S = \frac{1}{A} \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{r=0}^{R} r^2 \cos\varphi \; dr\; d\varphi = \frac{4}{\pi\, R^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \;\; d\varphi \int\limits_0^{R} r^2\, dr = \frac{4\, R}{3\,\pi} \simeq 0.42\, R$$

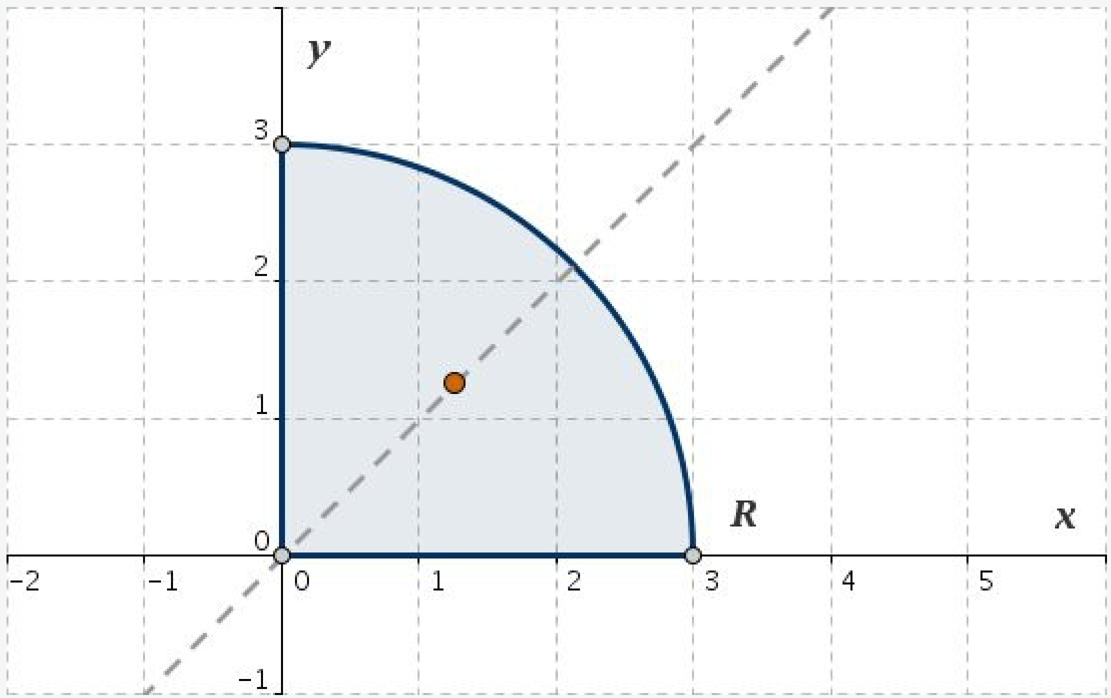


Abb. L7-2: Viertelkreis mit Radius R mit eingezeichnetem Schwerpunkt S

$$S = (0.42\,R\,, \quad 0.42\,R)$$

Abb. L7-3: Der Flächentyp der Aufgabe; Celle, Stadtkirche St. Marien, Fragment

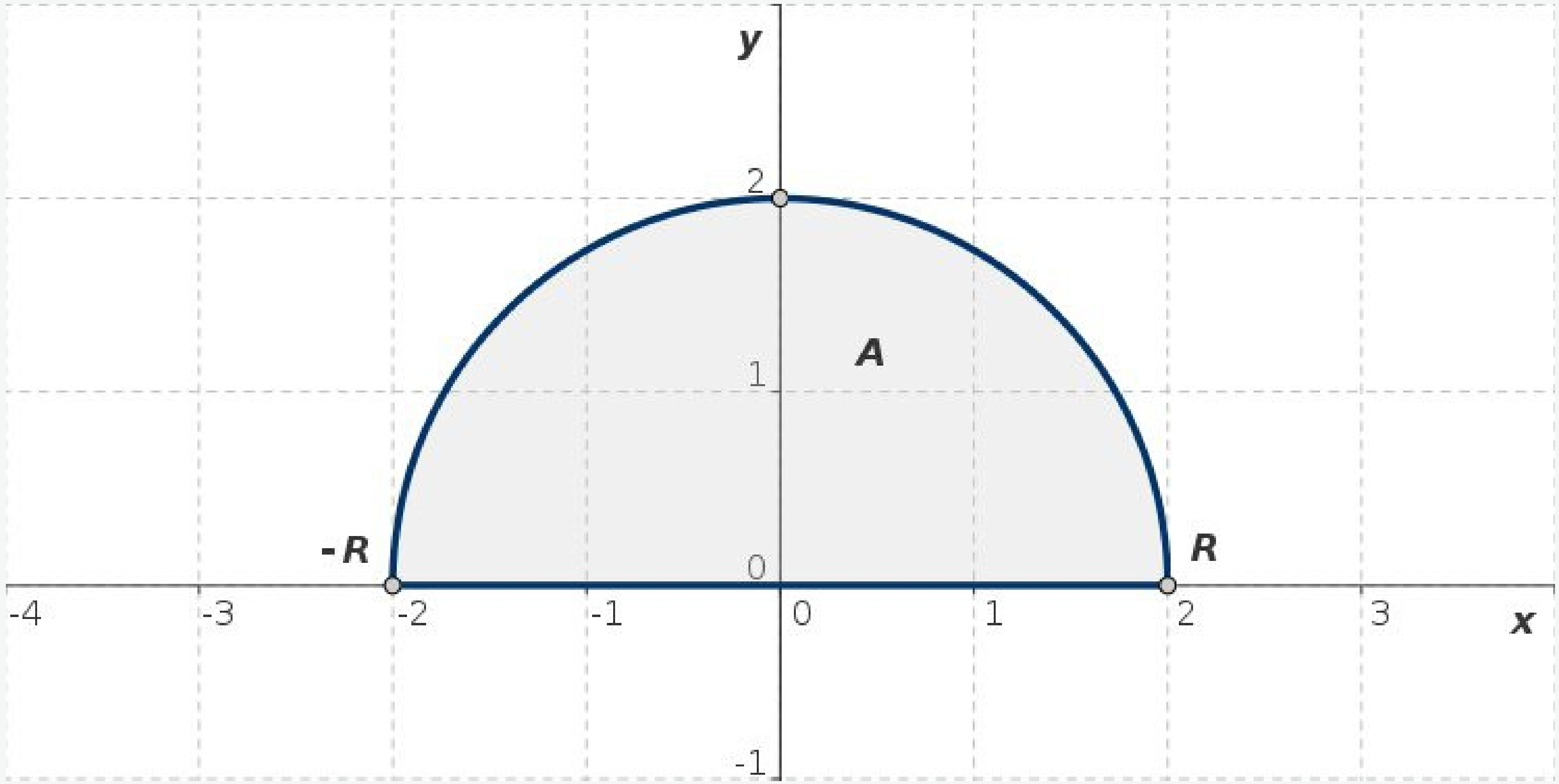


Abb. L7-4: Die Fläche der Aufgabe: Halbkreis mit Radius R (hier ist R = 2)

$$0 \leqslant r \leqslant R\,, \qquad 0 \leqslant \varphi < \pi\,, \qquad A = \frac{\pi R^2}{2}$$

Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt S auf der y-Achse.

$$y_S = \frac{1}{A} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{R} r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi = \frac{2}{\pi R^2} \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi \; d\varphi \int\limits_0^R r^2 \, dr = \frac{4\,R}{3\,\pi} \simeq 0.42\,R$$

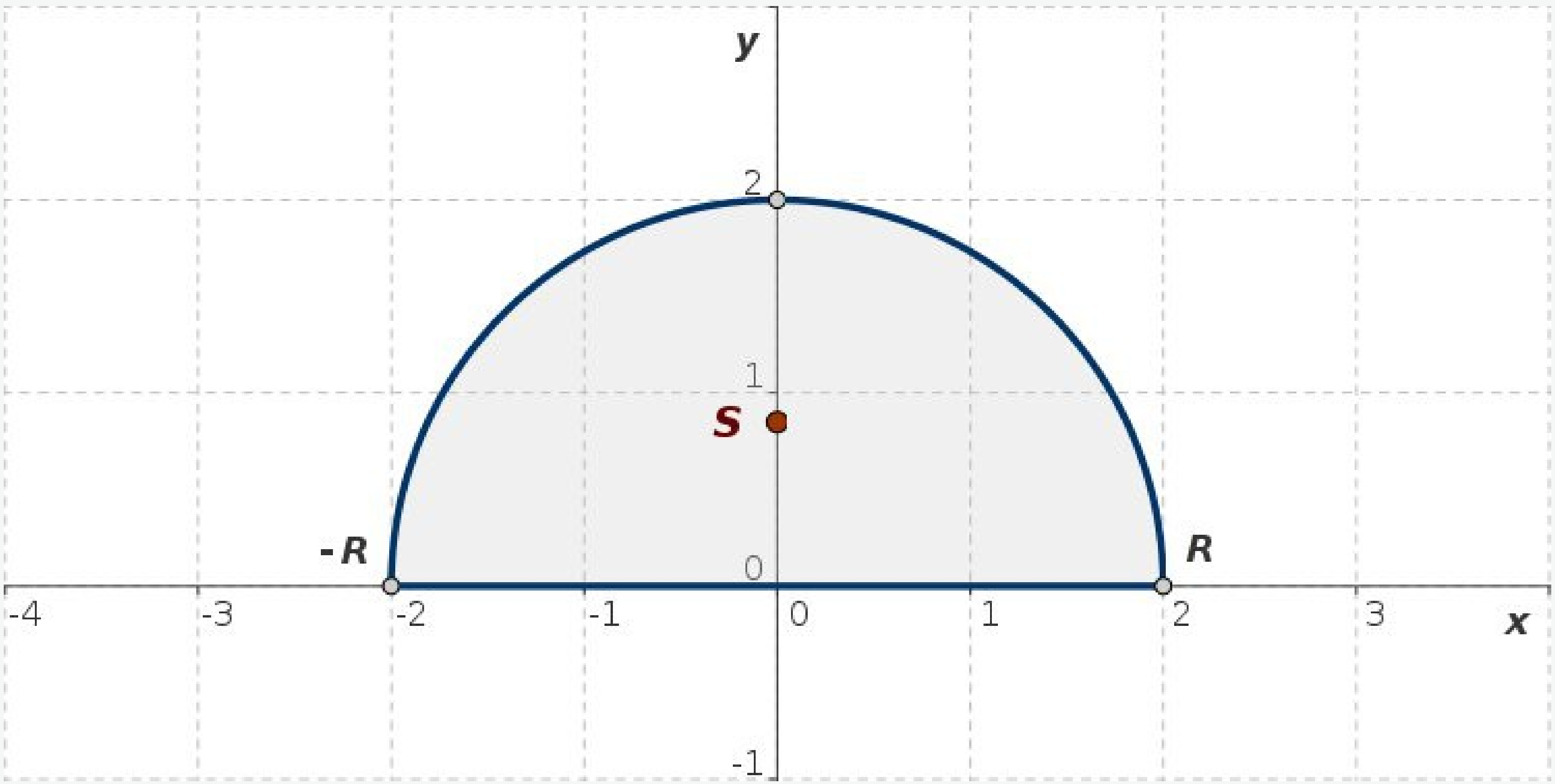


Abb. L7-5: Halbkreis mit Radius R (hier ist R = 2) und eingezeichnetem Schwerpunkt

$$A = \frac{1}{2}\,\pi\,R^2\,, \qquad S = \left(0,\ \frac{4\,R}{3\,\pi}\right)$$

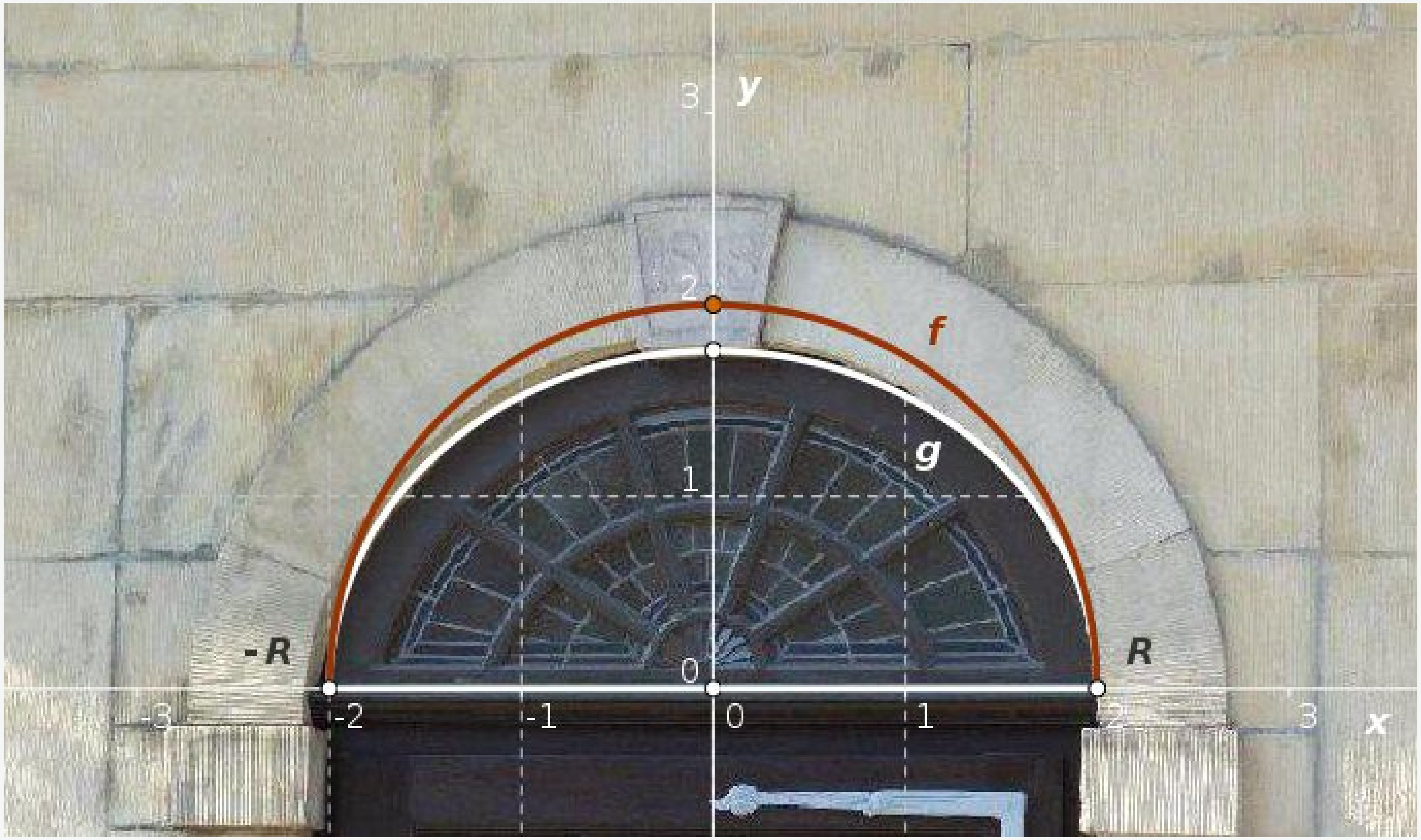


Abb. L7-6: Der Flächentyp der Aufgabe

$$f\,(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\,, \qquad g\,(x) = a\,\sqrt{R^2 - x^2}\,, \qquad 0 \leqslant a \leqslant 1$$

Die Funktion $y = f\,(x)$, die den oberen Teil des Kreises beschreibt, unterscheidet sich von der Funktion $y = g\,(x)$.

$$A = \int\limits_{x=-R}^{R} \int\limits_{y=0}^{a\sqrt{R^2 - x^2}} dy\, dx = 2 \int\limits_{x=0}^{R} \int\limits_{y=0}^{a\sqrt{R^2 - x^2}} dy\, dx = 2\, a \int\limits_{0}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\, \pi\, a\, R^2 \quad (\mathrm{FE})$$

$$x_S = \frac{1}{A} \int\limits_{x=-R}^{R} \int\limits_{y=0}^{a\sqrt{R^2 - x^2}} x\, dy\, dx = \frac{2}{\pi\, a\, R^2} \int\limits_{x=-R}^{R} \int\limits_{y=0}^{a\sqrt{R^2 - x^2}} x\, dy\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi\, R^2} \int\limits_{x=-R}^{R} x \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = -\, \frac{2}{3\, \pi\, R^2} \left[\left(R^2 - x^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right]_{-R}^{R} = 0 \quad (\mathrm{LE})$$

$$y_S = \frac{1}{A} \int\limits_{x=-R}^{R} \int\limits_{y=0}^{a\sqrt{R^2 - x^2}} y\, dy\, dx = \frac{2}{\pi\, a\, R^2} \int\limits_{x=-R}^{R} \int\limits_{y=0}^{a\sqrt{R^2 - x^2}} y\, dy\, dx =$$

$$= \frac{a}{\pi R^2} \int\limits_{x=-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \frac{4}{3} \frac{a\, R}{\pi} \quad (\mathrm{LE})$$

$$R = 2, \qquad a = 0.88, \qquad y_S \simeq 0.747 \quad (\mathrm{LE})$$

Abb. L7-7: Die von den Funktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ und der x-Achse begrenzten Flächen und entsprechende Schwerpunkte

Die Berechnung des Schwerpunktes der Fläche unter der Kurve $y = g(x)$ ist einfacher in kartesischen als in Polarkoordinaten durchzuführen.

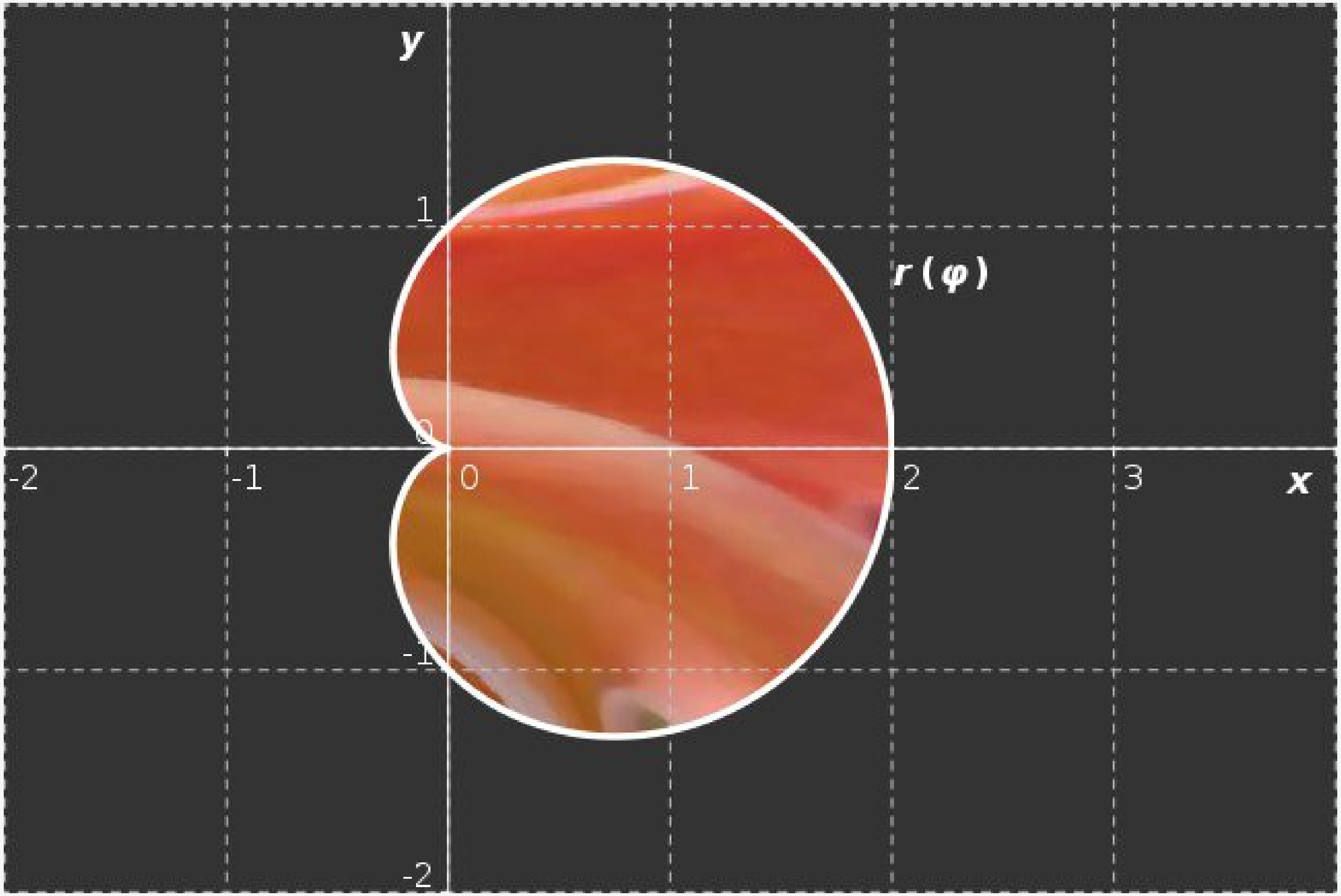


Abb. L8-1: Darstellung einer Kardioide mit der Parametergleichung $r(\varphi) = 1 + \cos\varphi$

$$r(\varphi) = 1 + \cos\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \qquad A = \frac{3\pi}{2} \quad \text{(FE)}$$

$$x_S = \frac{1}{A} \int\limits_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{r=r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^2 \cos\varphi \, dr \, d\varphi = \frac{2}{3\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \int\limits_{r=0}^{1+\cos\varphi} r^2 \, dr =$$

$$= \frac{2}{9\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \cos\varphi \, (1 + \cos\varphi)^3 \, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{9\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + \cos^4\varphi) \, d\varphi = \frac{5}{6} \quad (\text{LE})$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2\varphi)$$

$$\cos^3\varphi = \frac{1}{4}\,(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)$$

$$\cos^4\varphi = \frac{1}{8}\,(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3)$$

$$S = \left(\frac{5}{6}, \ 0 \right)$$

y_S – aus Symmetriegründen

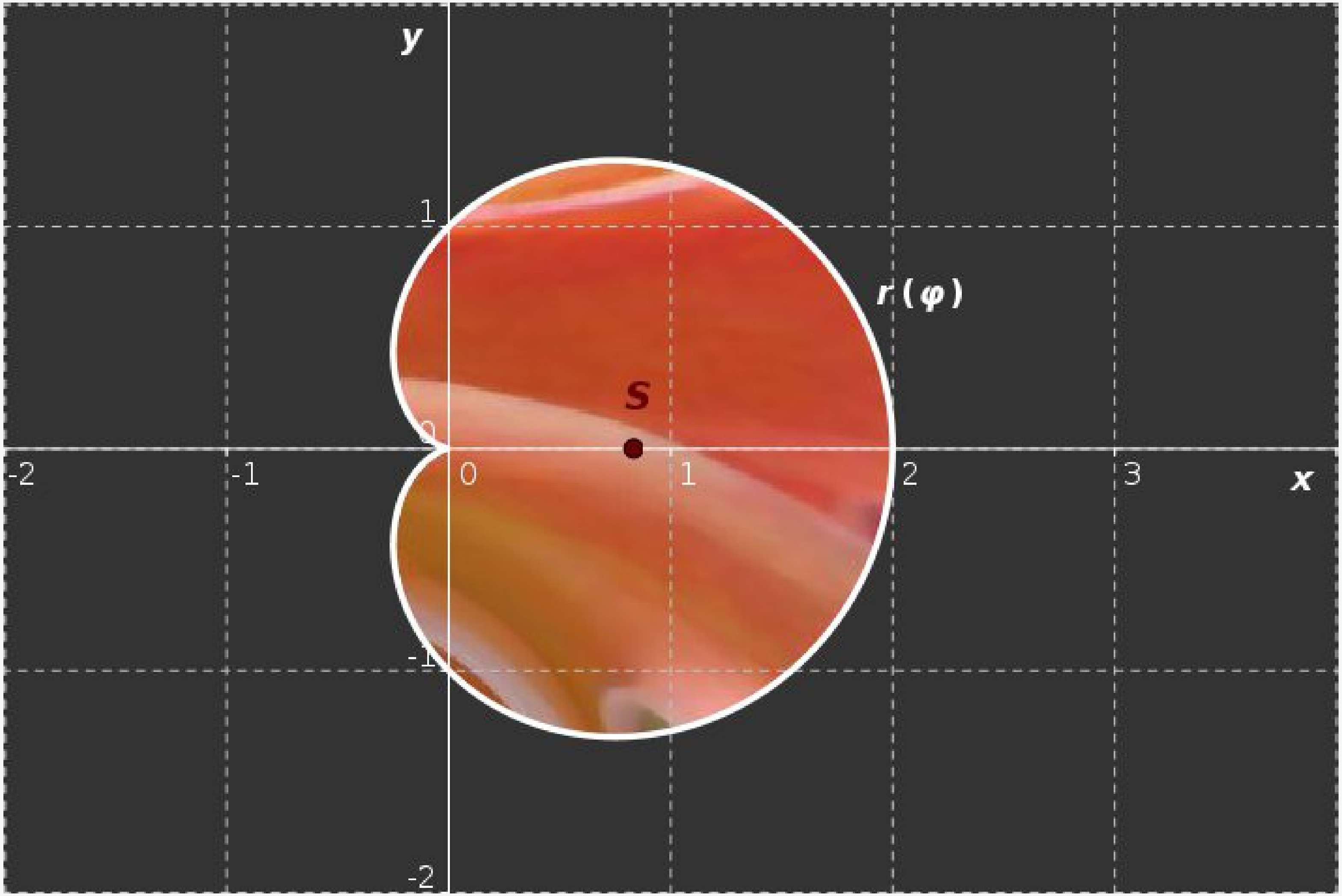


Abb. L8-2: Kardioide mit eingezeichnetem Schwerpunkt S

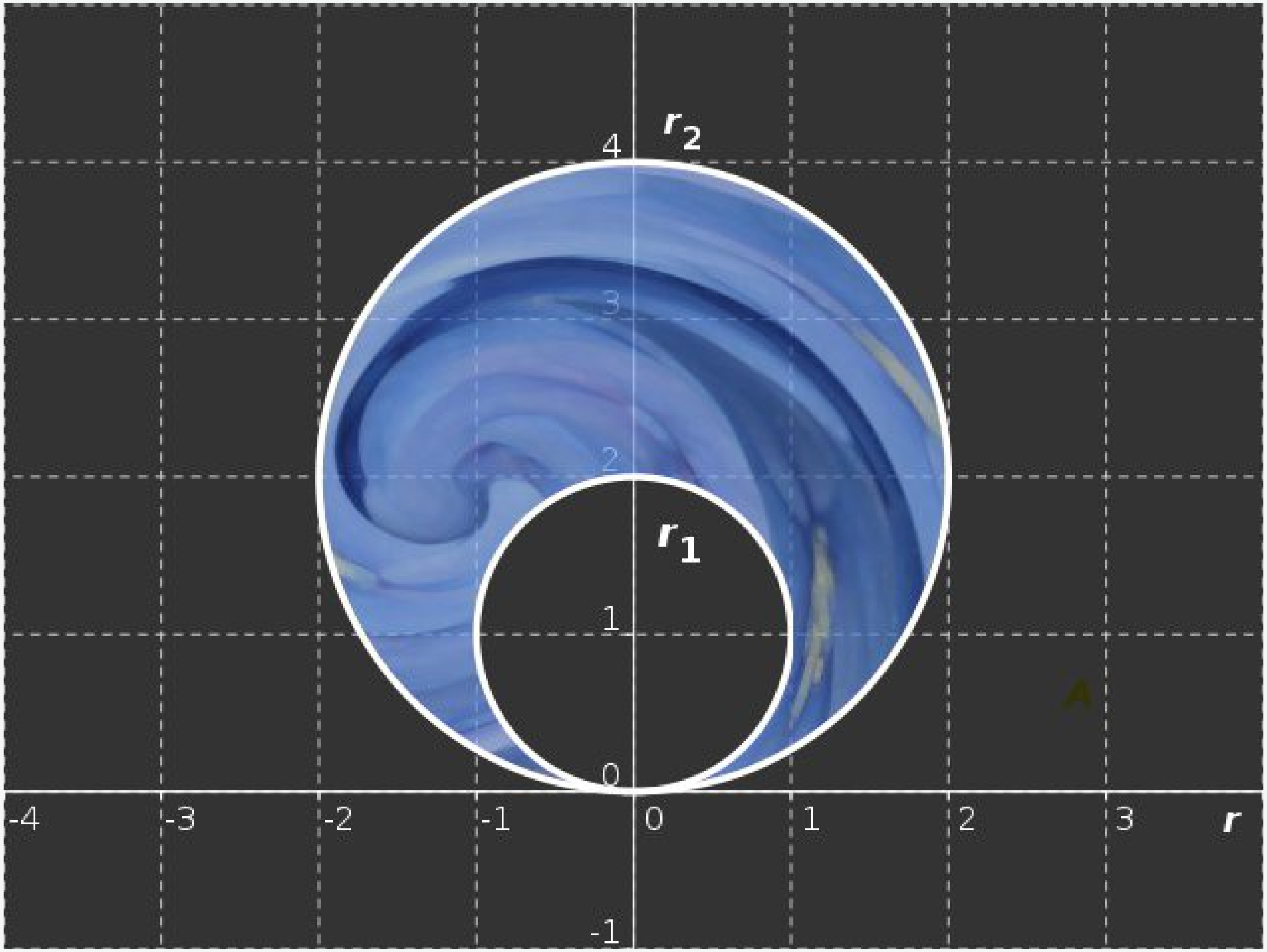


Abb. L9-1: Die Fläche der Aufgabe

Die Fläche A wird durch die Kurven begrenzt

$$r_1(\varphi) = 2\,\sin\varphi\,, \qquad r_2(\varphi) = 4\,\sin\varphi$$

$$r_1(\varphi) = 2\,\sin\varphi\,, \qquad r_2(\varphi) = 4\,\sin\varphi\,, \qquad A = 3\,\pi \quad (\mathrm{FE})$$

$$x_S = \frac{1}{A}\int\limits_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2}\ \int\limits_{r=r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^2\,\cos\varphi\,dr\,d\,\varphi =$$

$$= \frac{1}{3\,\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{\pi}\cos\varphi\,d\,\varphi\int\limits_{r=2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r^2\,dr =$$

$$= \frac{56}{9\,\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{\pi}\cos\varphi\,\sin^3\varphi\;d\,\varphi = \left[\frac{14}{9\,\pi}\,\sin^4\varphi\right]_0^{\pi} = 0 \quad (\mathrm{LE})$$

$$y_S = \frac{1}{A} \int\limits_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{r=r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int\limits_{r=2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r^2 \, dr = \frac{56}{9\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \sin^4\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{56}{9\pi} \left[\frac{3}{8}\varphi - \frac{3}{8}\cos\varphi \sin\varphi - \frac{1}{4}\cos\varphi \sin^3\varphi \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{7}{3} \ (\text{LE})$$

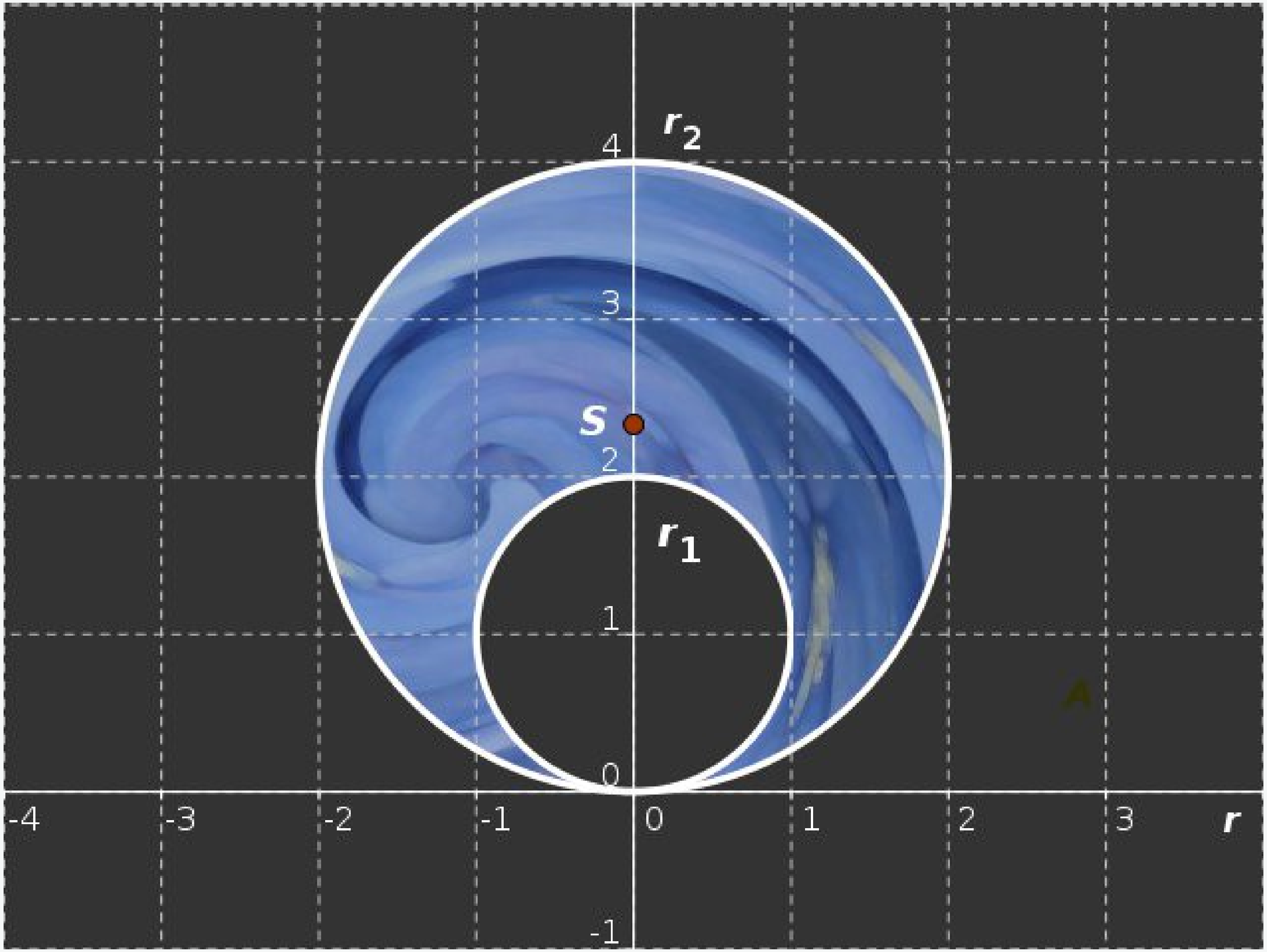


Abb. L9-2: Die Fläche der Aufgabe mit eingezeichnetem Schwerpunkt S

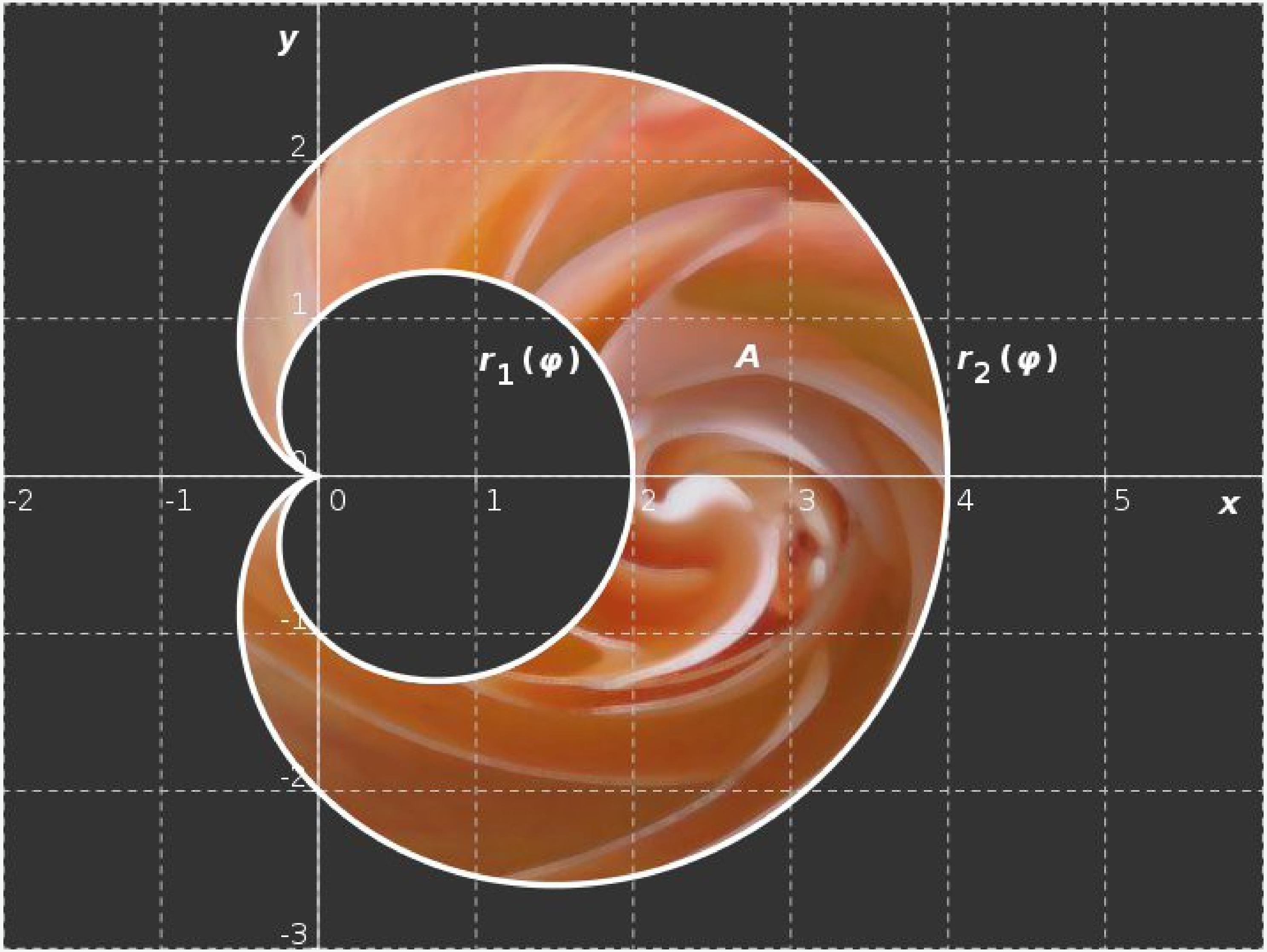


Abb. L10-1: Die von zwei Kardioiden begrenzte Fläche, a = 1, b = 2

$$r_1(\varphi) = a\,(1 + \cos\varphi)\,, \qquad r_2(\varphi) = b\,(1 + \cos\varphi)$$

Die Kardioide $r = r(\varphi)$ umrandet das dargestellte Flächenstück, dessen Flächeninhalt ist

$$r_1(\varphi) = a\,(1 + \cos\varphi), \qquad A_1 = \frac{3}{2}\,\pi\,a^2 \quad (\text{FE})$$

$$r_2(\varphi) = b\,(1 + \cos\varphi), \qquad A_2 = \frac{3}{2}\,\pi\,b^2 \quad (\text{FE}) \qquad (b > a)$$

$$A = A_2 - A_1 = \frac{3}{2}\,\pi\,(b^2 - a^2)$$

$$x_S = \frac{1}{A} \int\limits_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{r=r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^2 \cos\varphi\, dr\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3\,\pi\,(b^2 - a^2)} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=a(1+\cos\varphi)}^{r=b(1+\cos\varphi)} r^2 \cos\varphi\, dr\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3\,\pi\,(b^2 - a^2)} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_{r=a(1+\cos\varphi)}^{r=b(1+\cos\varphi)} r^2\, dr =$$

$$= \frac{2}{9\pi(b^2 - a^2)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \left[b^3 (1+\cos\varphi)^3 - a^3 (1+\cos\varphi)^3 \right]$$

$$= \frac{2\,(b^3 - a^3)}{9\pi(b^2 - a^2)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1+\cos\varphi)^3 \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{2\,(a^2 + a\,b + b^2)}{9\pi(a + b)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1+\cos\varphi)^3 \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{a^2 + a\,b + b^2}{a + b} \quad \text{(LE)}$$

$$a = 1, \quad b = 2, \qquad A = \frac{9\pi}{2}, \qquad x_S = \frac{35}{18} \quad \text{(LE)}$$

$$y_S = \frac{2}{3\pi(b^2 - a^2)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=a(1+\cos\varphi)}^{r=b(1+\cos\varphi)} r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi = 0 \quad \text{(LE)}$$

$$S = \left(\frac{35}{18}, \ 0 \right)$$

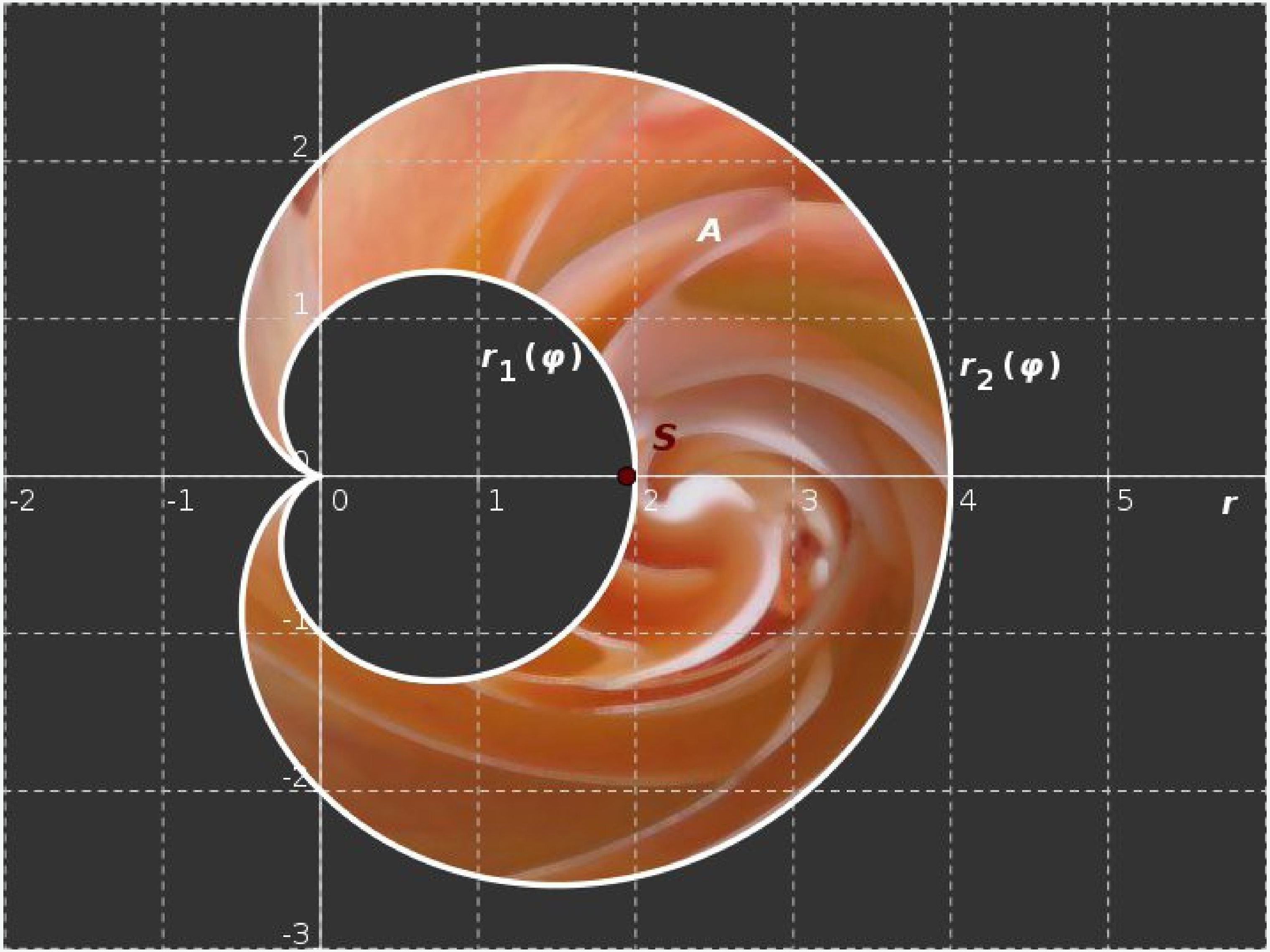


Abb. L10-2: Die von zwei Kardioiden begrenzte Fläche mit eingezeichnetem Schwerpunkt ($a = 1$, $b = 2$)

$$S = \left(\frac{35}{18}, \ 0 \right)$$

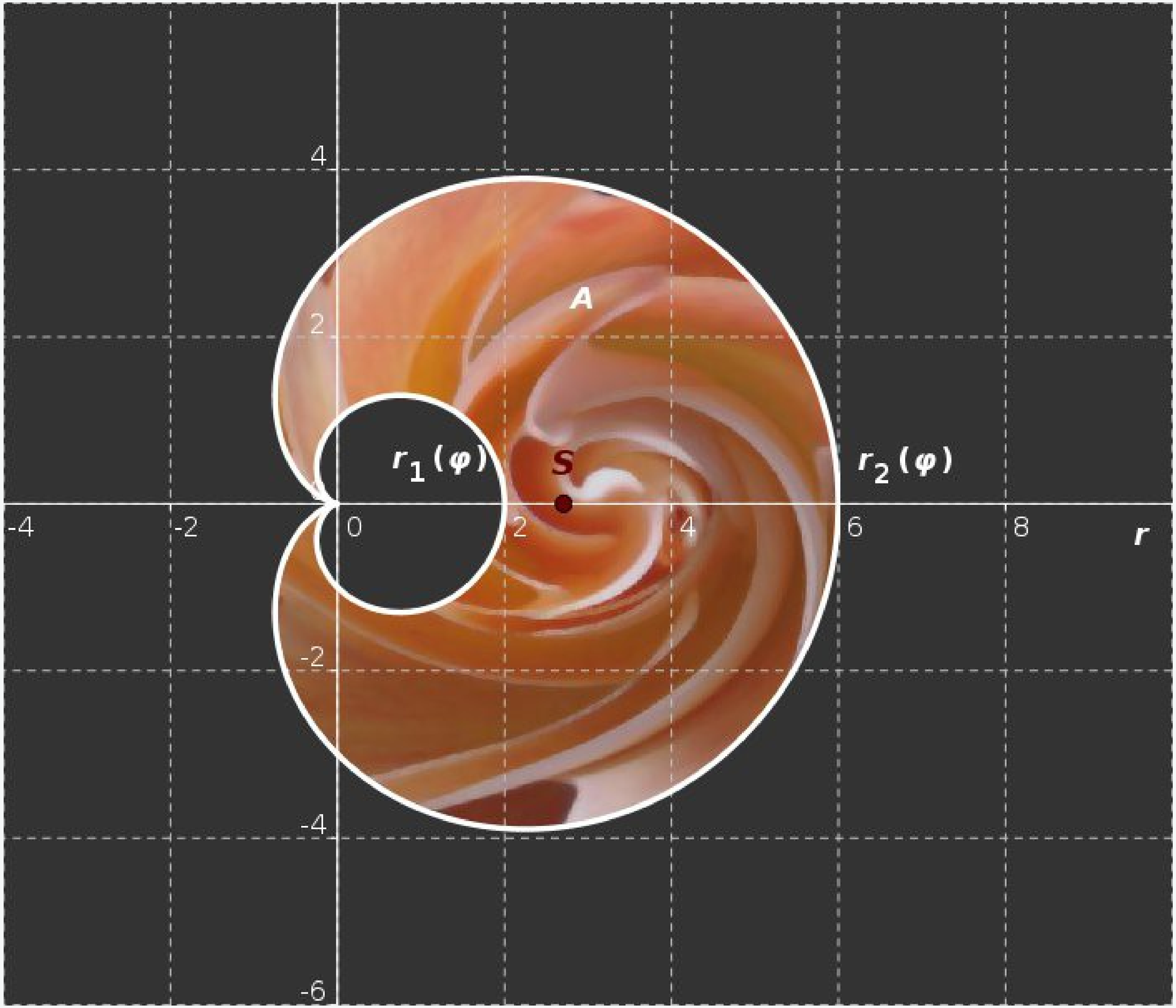


Abb. L10-3: Die von zwei Kardioiden begrenzte Fläche mit eingezeichnetem Schwerpunkt (a = 1, b = 3)

$$A = 12\,\pi\,, \qquad S = \left(\frac{65}{24}\,,\ \ 0 \right)$$

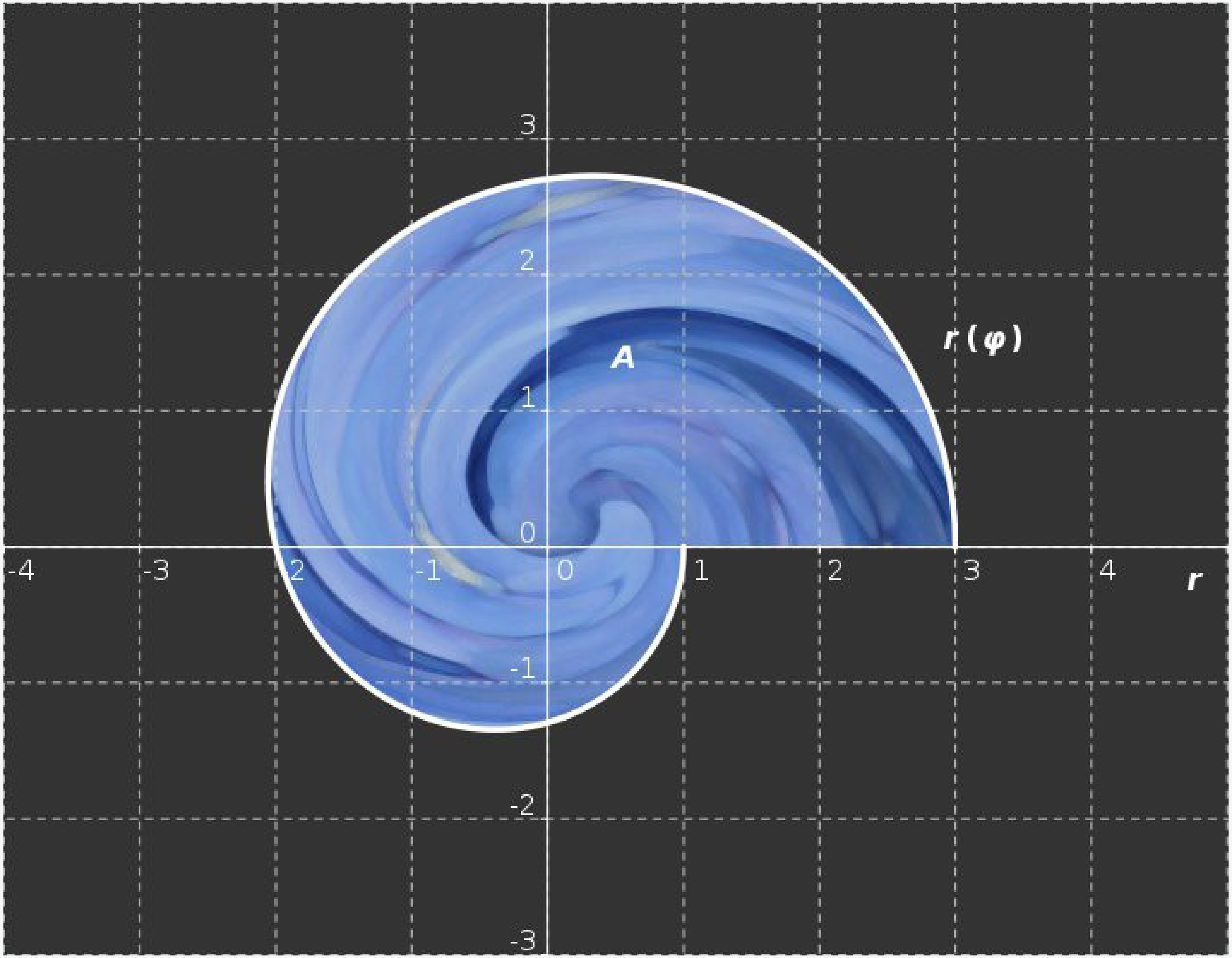


Abb. L11-1: Die Fläche der Aufgabe

$$r(\varphi) = 2 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$r(\varphi) = 2 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \qquad A = \frac{11}{2}\pi \ \text{FE}$$

$$x_S = \frac{1}{A} \int\limits_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{r=r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^2 \cos\varphi \, dr \, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{11\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{2+\cos(\varphi/2)} r^2 \cos\varphi \, dr \, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{11\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \int\limits_{r=0}^{2+\cos(\varphi/2)} r^2 \, dr =$$

$$= \frac{2}{33\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \cos\varphi \left(2 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^3 d\varphi =$$

$$= \frac{2}{33\pi} \left[11 \sin\varphi + 13 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{17}{4} \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) + \frac{3}{4} \sin(2\varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\varphi + \frac{1}{20} \sin\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \right]_0^{2\pi} = \frac{2}{11} \ \text{(LE)}$$

$$y_S = \frac{1}{A} \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{11\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_{r=0}^{2+\cos(\varphi/2)} r^2 \, dr =$$

$$= \frac{2}{33\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\varphi \left(2 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^3 d\varphi = \frac{112}{55\pi} \quad (\mathrm{LE})$$

$$S = \left(\frac{2}{11}, \ \frac{112}{55\pi} \right)$$

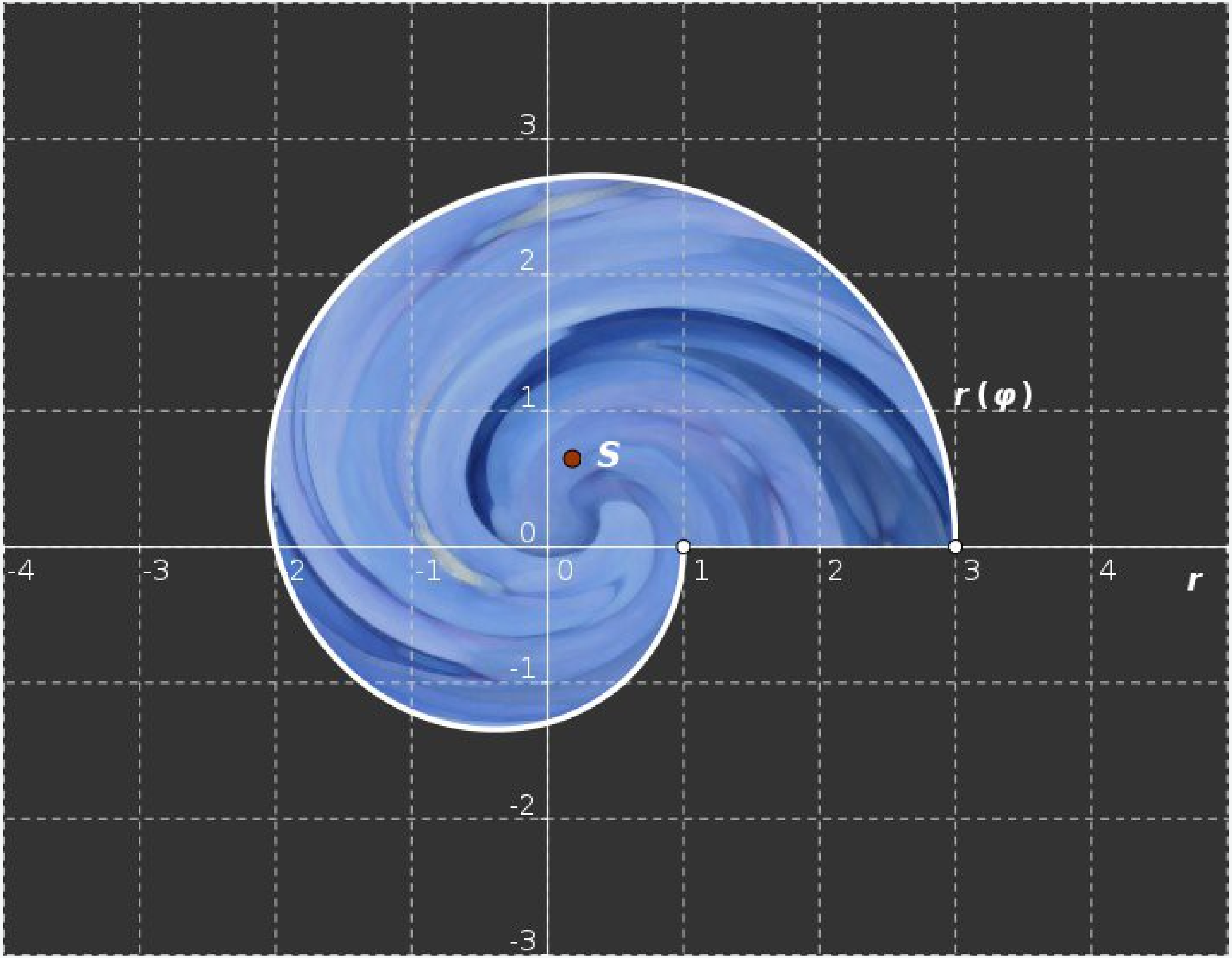


Abb. L11-2: Die Fläche mit eingezeichnetem Schwerpunkt