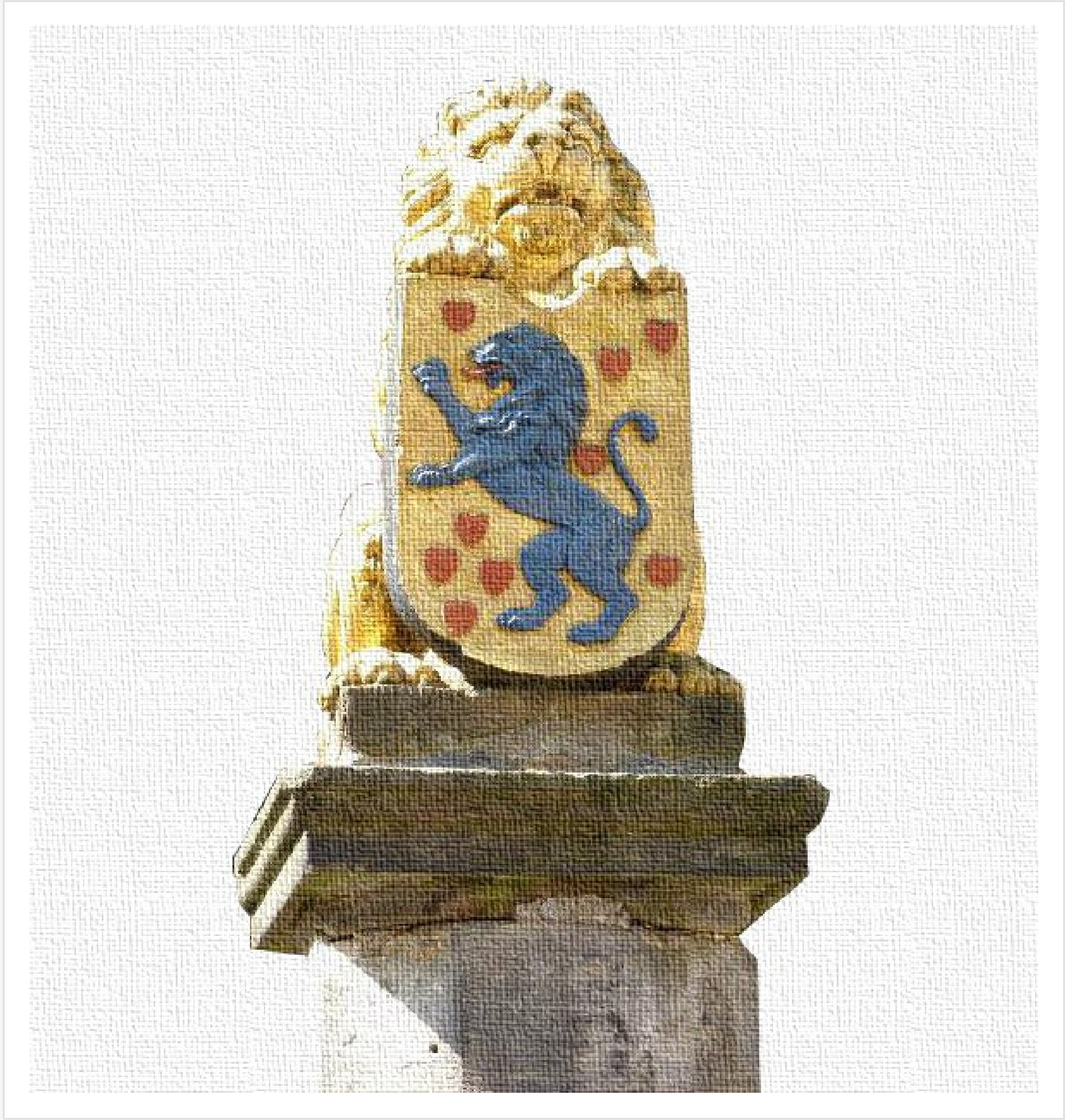

Fragment, Celle

Schwerpunkt homogener ebenen Flächen: Teil 1

Ma 2 – Lubov Vassilevskaya

Die Koordinaten des Schwerpunktes lassen sich mit Hilfe der folgenden Doppelintegrale berechnen:

$$x_S = \frac{1}{A} \iint_A x \; dA \, , \qquad y_S = \frac{1}{A} \iint_A y \; dA$$

A ist der Flächeninhalt

in kartesischen Koordinaten:

$$x_S = \frac{1}{A} \int_{x=a}^{b} \int_{y=g(x)}^{f(x)} x \, dy \, dx \, , \qquad y_S = \frac{1}{A} \int_{x=a}^{b} \int_{y=g(x)}^{f(x)} y \, dy \, dx$$

Schwerpunkt in Polarkoordinaten:

$$x_S = \frac{1}{A} \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=f_1(\varphi)}^{f_2(\varphi)} r^2 \cos\varphi \, dr \, d\varphi$$

$$y_S = \frac{1}{A} \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=f_1(\varphi)}^{f_2(\varphi)} r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi$$

Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche: Aufgaben 1-4

Berechnen Sie den Schwerpunkt einer Fläche, die von den Funktionen begrenzt wird

Aufgabe 1: $a)\ x = y^2, \qquad x = 1$

$b)\ x = y^4, \qquad x = 1$

Aufgabe 2: $y = 4 - x^2, \qquad y = x + 2$

Aufgabe 3: $y = 5 - \dfrac{5}{\pi^2}\, x^2, \qquad y = 4 \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Aufgabe 4: $y = 5 - \dfrac{5}{\pi^2}\, x^2, \qquad y = 4 \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Aufgabe 5:

$$f(x) = 2 + 2x - \frac{x^2}{4}, \qquad g(x) = 1, \qquad x \in [0,\ 6]$$

Aufgabe 6:

$$f(x) = 5 - \frac{x^2}{2}, \qquad g(x) = 2 - \frac{x^2}{4}, \qquad -2 \leqslant x \leqslant 2$$

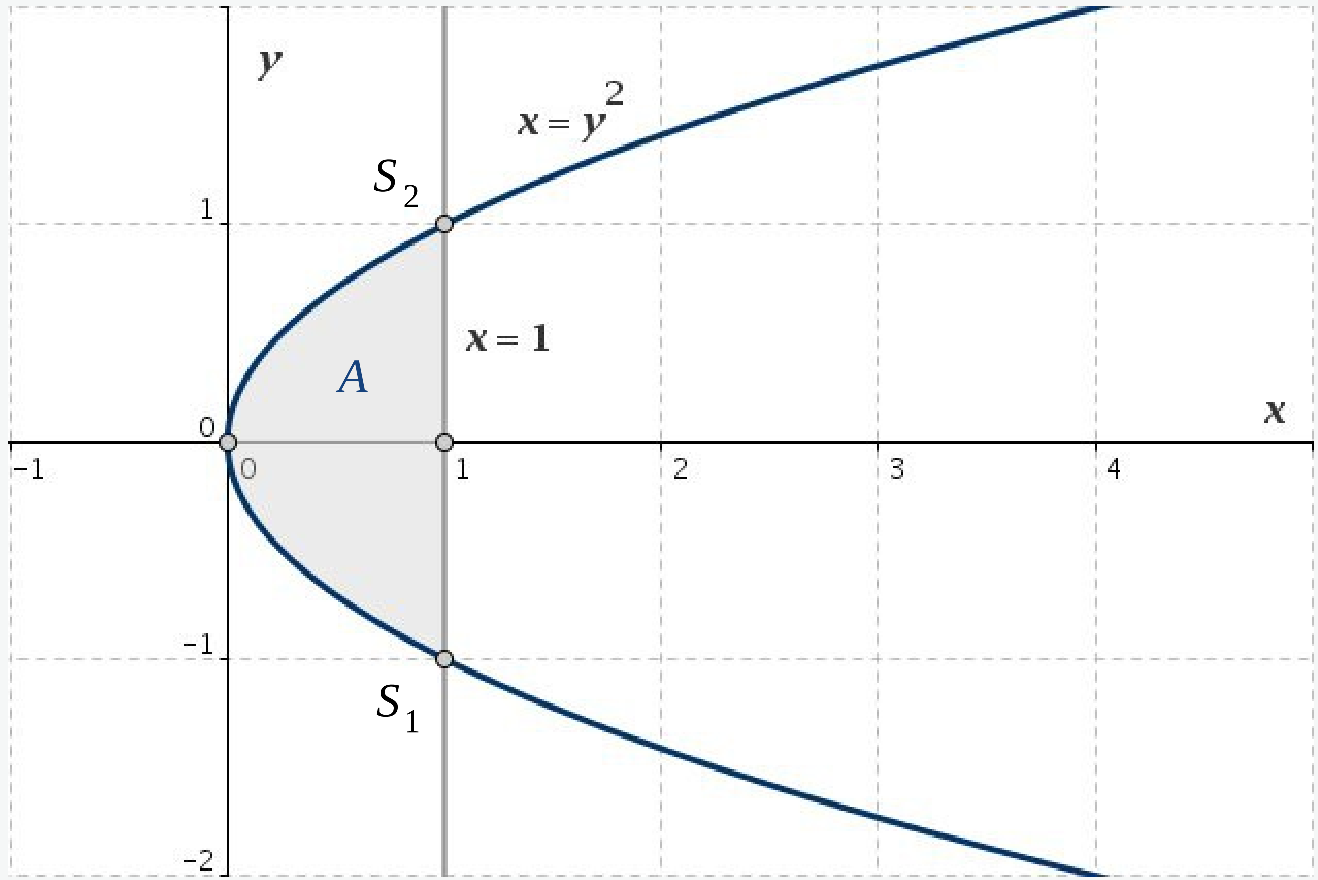

Abb. L1-1: Die Fläche zwischen der Parabel $x = y^2$ und der Geraden $x = 1$

$$A: \quad x = 1, \qquad x = y^2, \qquad S_1 = (1, -1), \qquad S_2 = (1, 1)$$

$$A = \frac{4}{3} \ \text{(FE)}$$

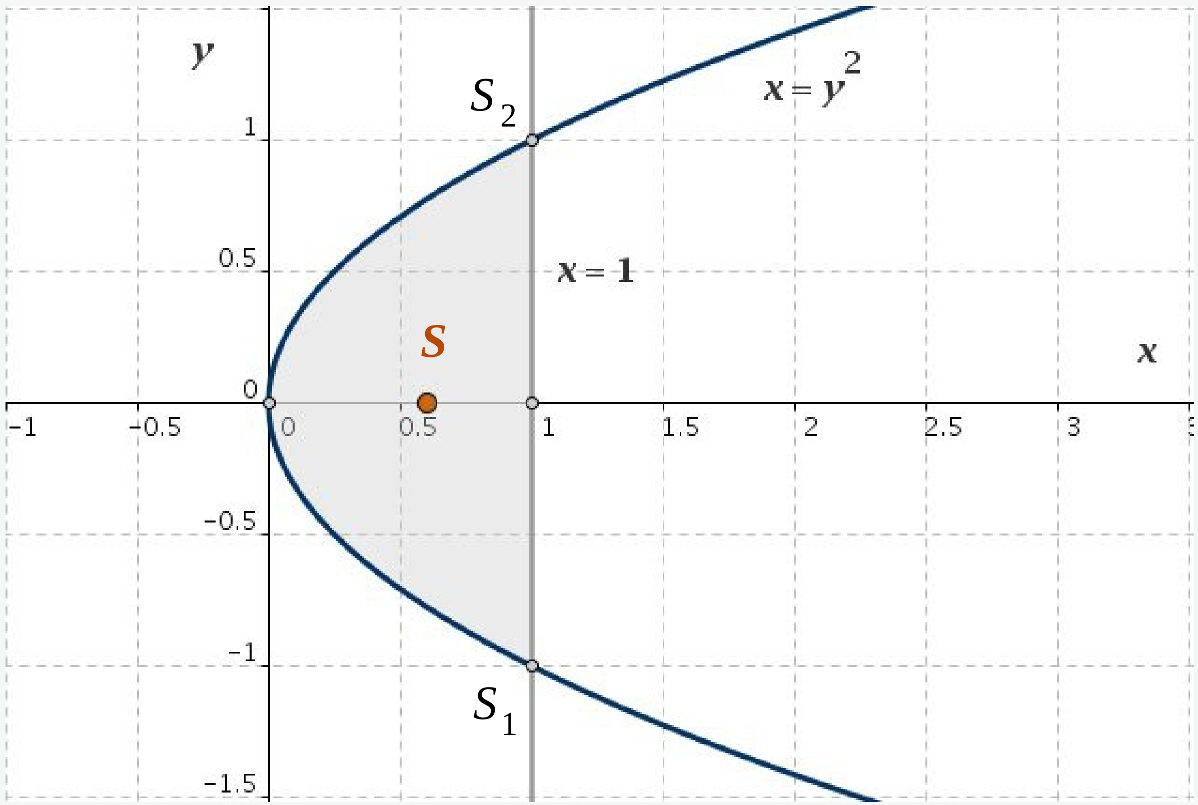

Abb. L1-2: Die Fläche der Aufgabe mit dem eingezeichneten Schwerpunkt S

$$x_S = \frac{1}{A} \iint\limits_A x \; dA = \frac{3}{4} \int\limits_{x=0}^{1} x \left(\int\limits_{y=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy \right) dx = \frac{3}{2} \int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{3}{5}$$

Aufgrund der Symmetrie ist $y_s = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \left(\frac{3}{5}, \; 0 \right)$

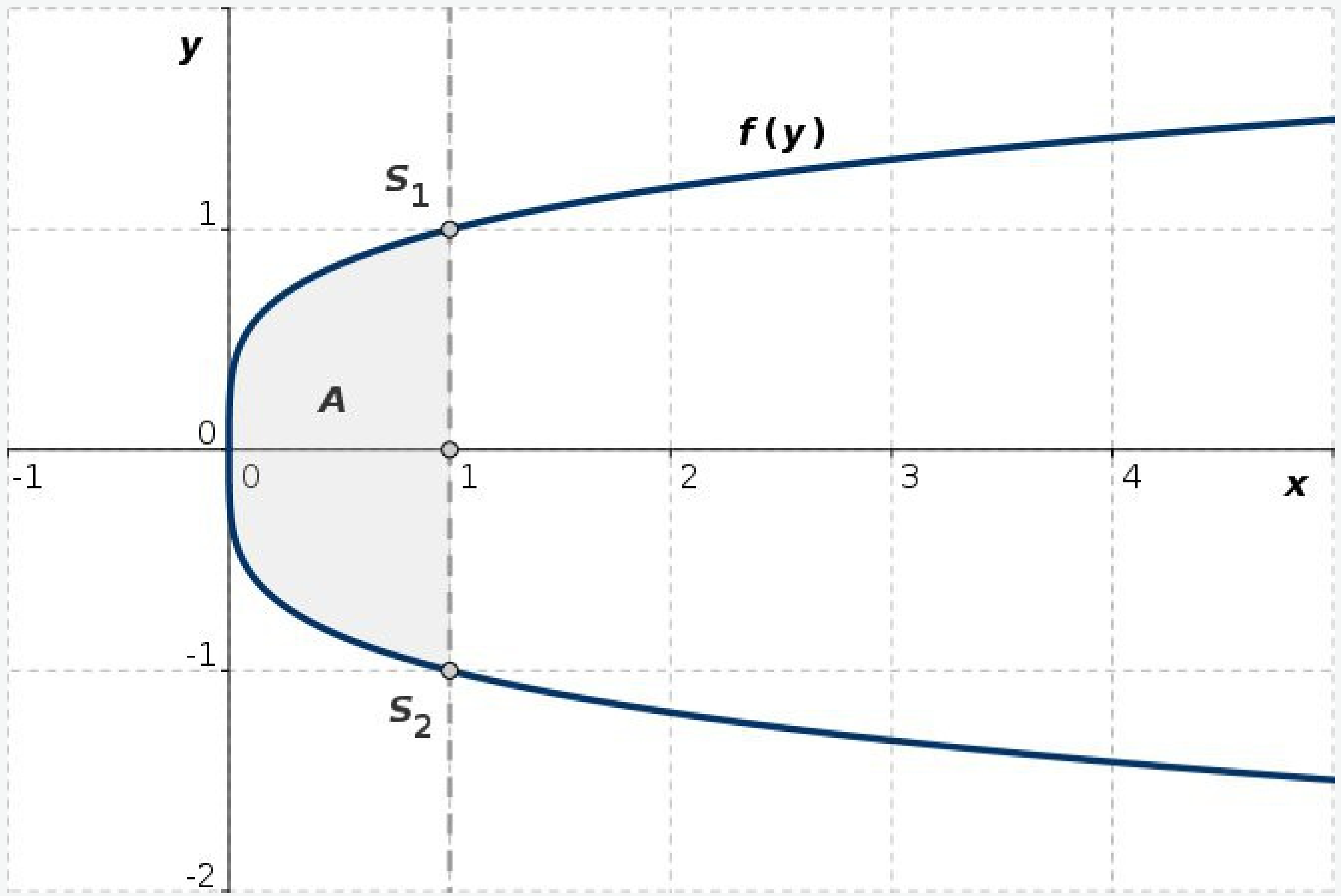

Abb. L1-3: Graphische Darstellung der gesuchten Fläche zwischen der Funktion $x = f(y)$ und der Geraden $x = 1$

$$x = y^4, \qquad x = 1$$

Möglichkeit 1:

$$A = \int_{x=0}^{1} \int_{y=-\sqrt[4]{x}}^{\sqrt[4]{x}} dy\, dx = 2 \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt[4]{x}} dy\, dx = 4 \int_{x=0}^{1} \sqrt[4]{x}\; dx =$$

$$= \frac{8}{5} \left[x^{\frac{5}{4}} \right]_0^1 = \frac{8}{5} \text{ (FE)}$$

Möglichkeit 2:

$$A = \int_{y=-1}^{1} \int_{x=y^4}^{1} dy\, dx = 2 \int_{y=0}^{1} \int_{x=y^4}^{1} dy\, dx = 2 \int_0^1 (1 - y^4)\; dy =$$

$$= 2 \left[y - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{8}{5} \text{ (FE)}$$

$$x_S = \frac{1}{A} \iint_A x\;\, dA = \frac{5}{8} \iint_A x\;\, dA = \frac{5}{8} \int_{y=-1}^{1} dy \int_{x=y^4}^{1} x\, dx =$$

$$= \frac{5}{16} \int_{-1}^{1} \left(1 - y^8 \right) dy = \frac{5}{16} \left[y - \frac{y^9}{9} \right]_{-1}^{1} = \frac{5}{9} \text{ (LE)}$$

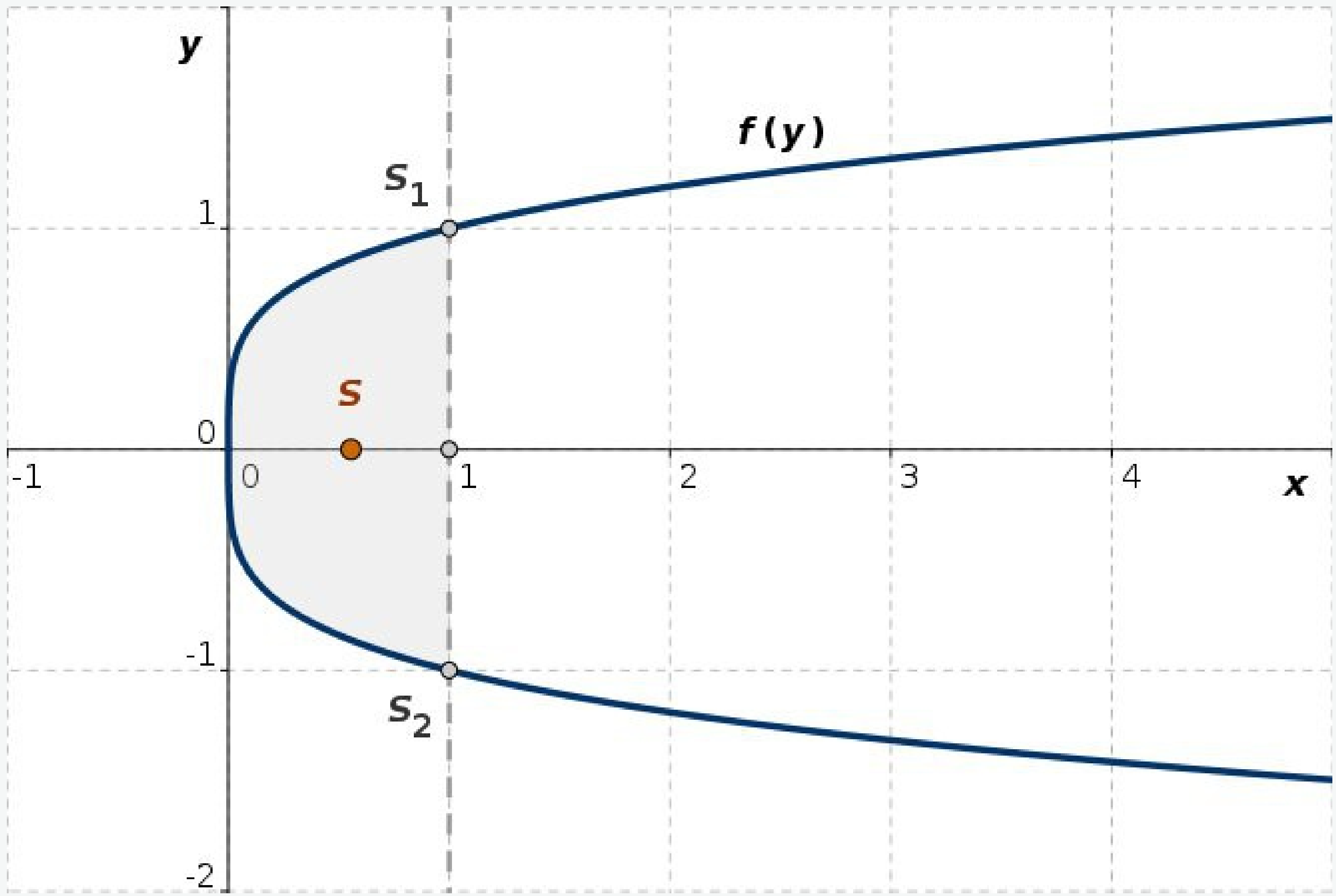

Abb. L1-4: Die Fläche der Aufgabe mit dem eingezeichneten Schwerpunkt S

Aufgrund der Symmetrie ist $y_s = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \left(\frac{5}{9}, \ 0 \right)$

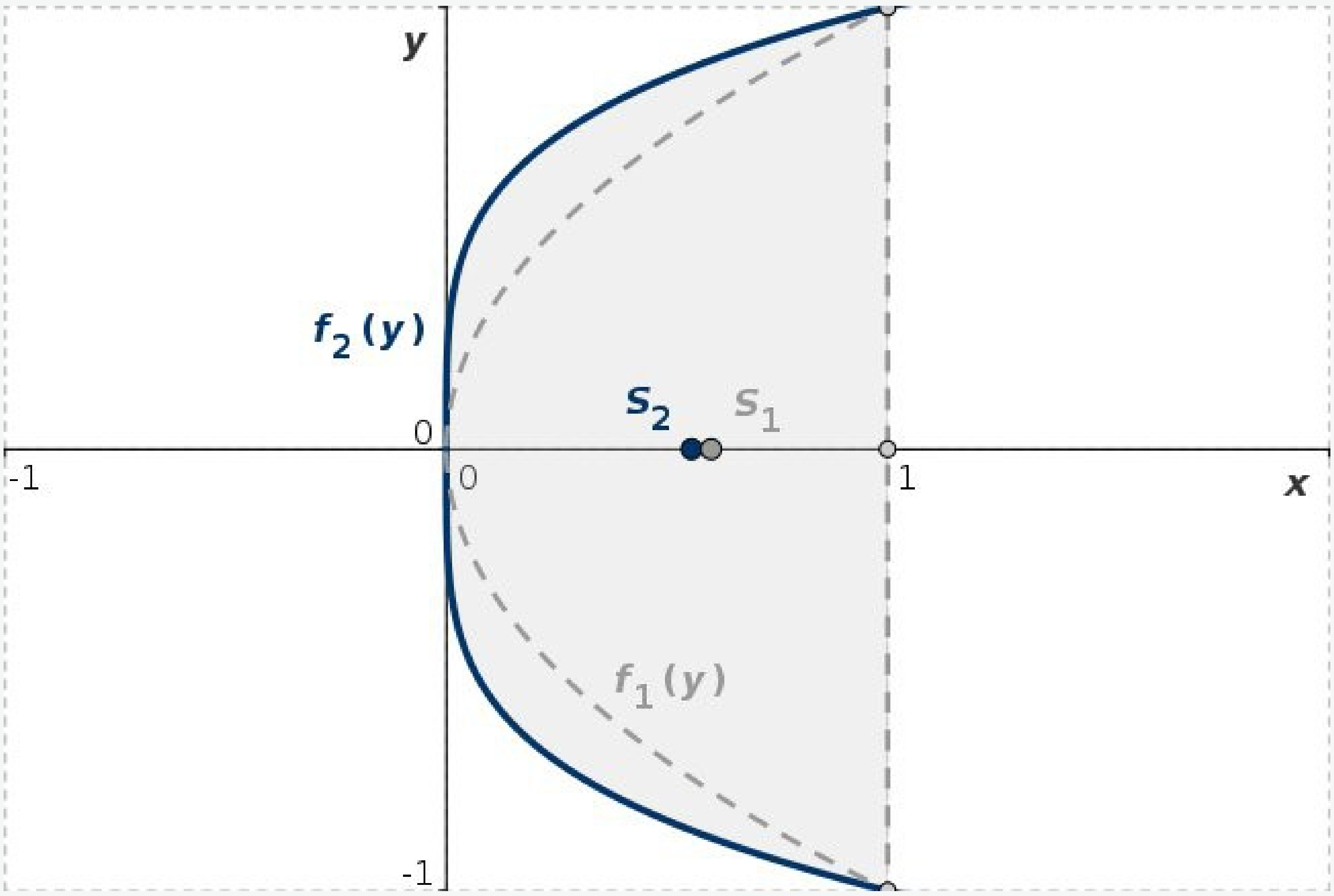

Abb. L1-4: Die Schwerpunkte der Aufgabe, a) – grau gezeichnet, b) – blau gezeichnet

$$f_1(y) = y^2, \quad S_1 = \left(\frac{3}{5},\ 0\right), \qquad f_2(y) = y^4, \quad S_2 = \left(\frac{5}{9},\ 0\right)$$

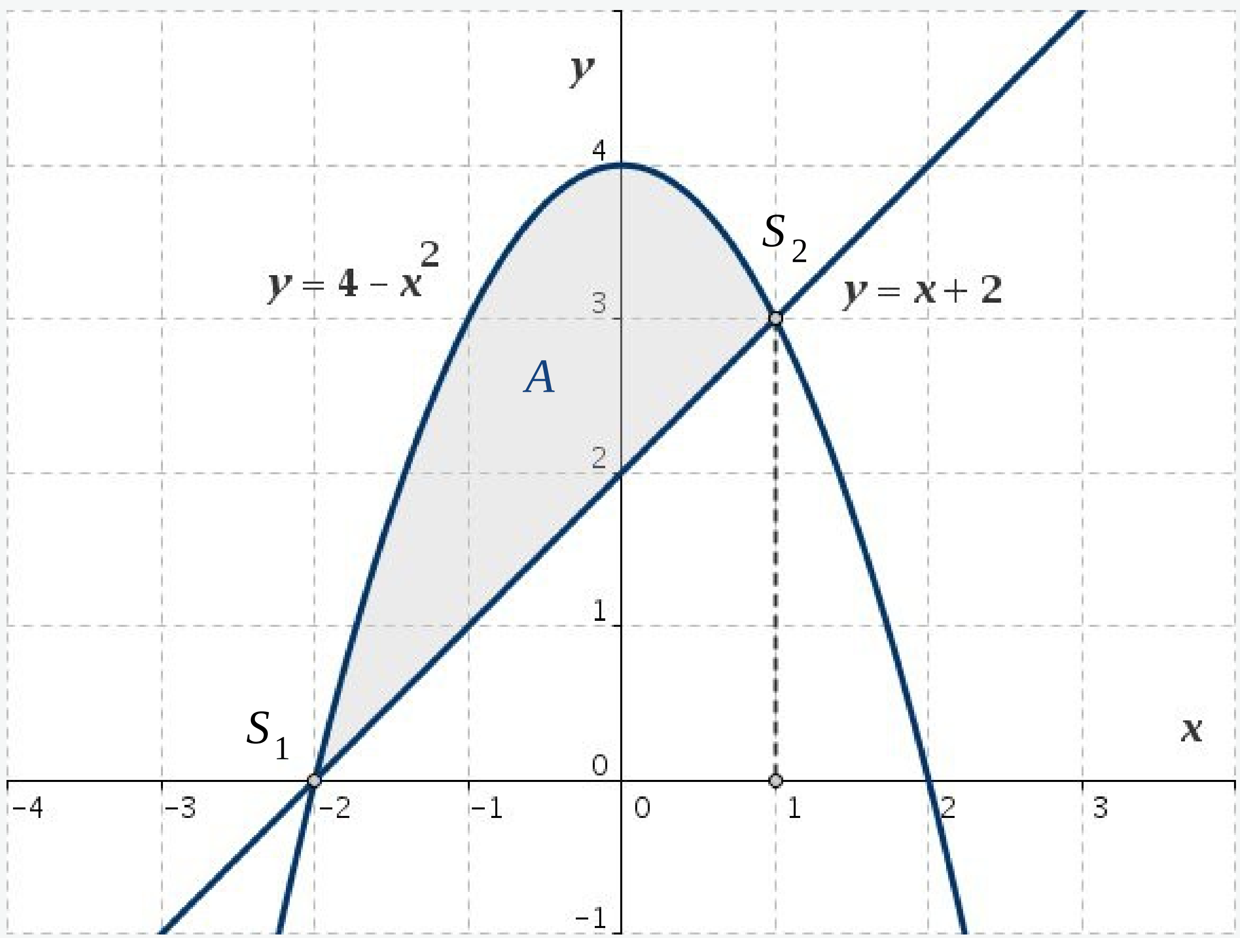

Abb. L2-1: Die zwischen der Parabel y = 4 - x² und der Geraden y = x + 2 eingeschlossene Fläche

$$A : \quad y = x + 2, \quad y = 4 - x^2, \quad S_1 = (-2, 0), \quad S_2 = (1, 3)$$

$$A = \frac{9}{2} \ \text{(FE)}$$

$$x_S = \frac{1}{A} \int\limits_{x=-2}^{1} \int\limits_{y=x+2}^{4-x^2} x \, dy \, dx \, , \qquad y_S = \frac{1}{A} \int\limits_{x=-2}^{1} \int\limits_{y=x+2}^{4-x^2} y \, dy \, dx \, , \qquad A = \frac{9}{2}$$

$$x_S = \frac{1}{A} \int\limits_{x=-2}^{1} x \; dx \int\limits_{y=x+2}^{4-x^2} dy = \frac{1}{A} \int\limits_{-2}^{1} x \, \left(2 - x^2 - x\right) \, dx = -\frac{1}{2}$$

$$y_S = \frac{1}{A} \int\limits_{x=-2}^{1} dx \int\limits_{y=x+2}^{4-x^2} y \, dy = \frac{1}{2\,A} \int\limits_{-2}^{1} \left(x^4 - 9\,x^2 - 4\,x + 12\right) \, dx = \frac{12}{5}$$

$S = \left(-0.5, \; 2.4\right)$ − der Flächenschwerpunkt

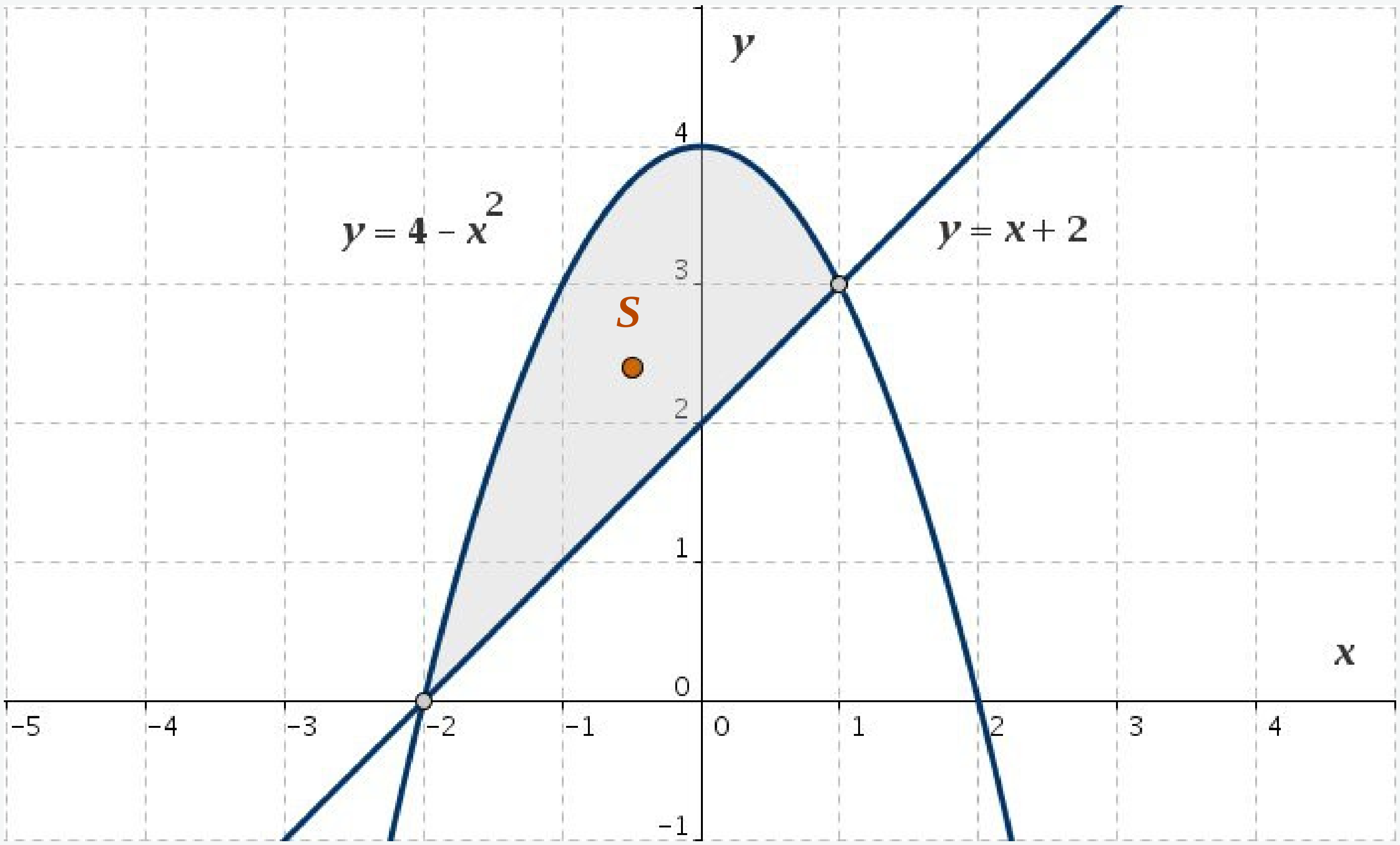

Abb. L2-2: Die Fläche zwischen der Parabel $y = 4 - x^2$ und der Geraden $y = x + 2$ mit dem eingezeichneten Schwerpunkt S

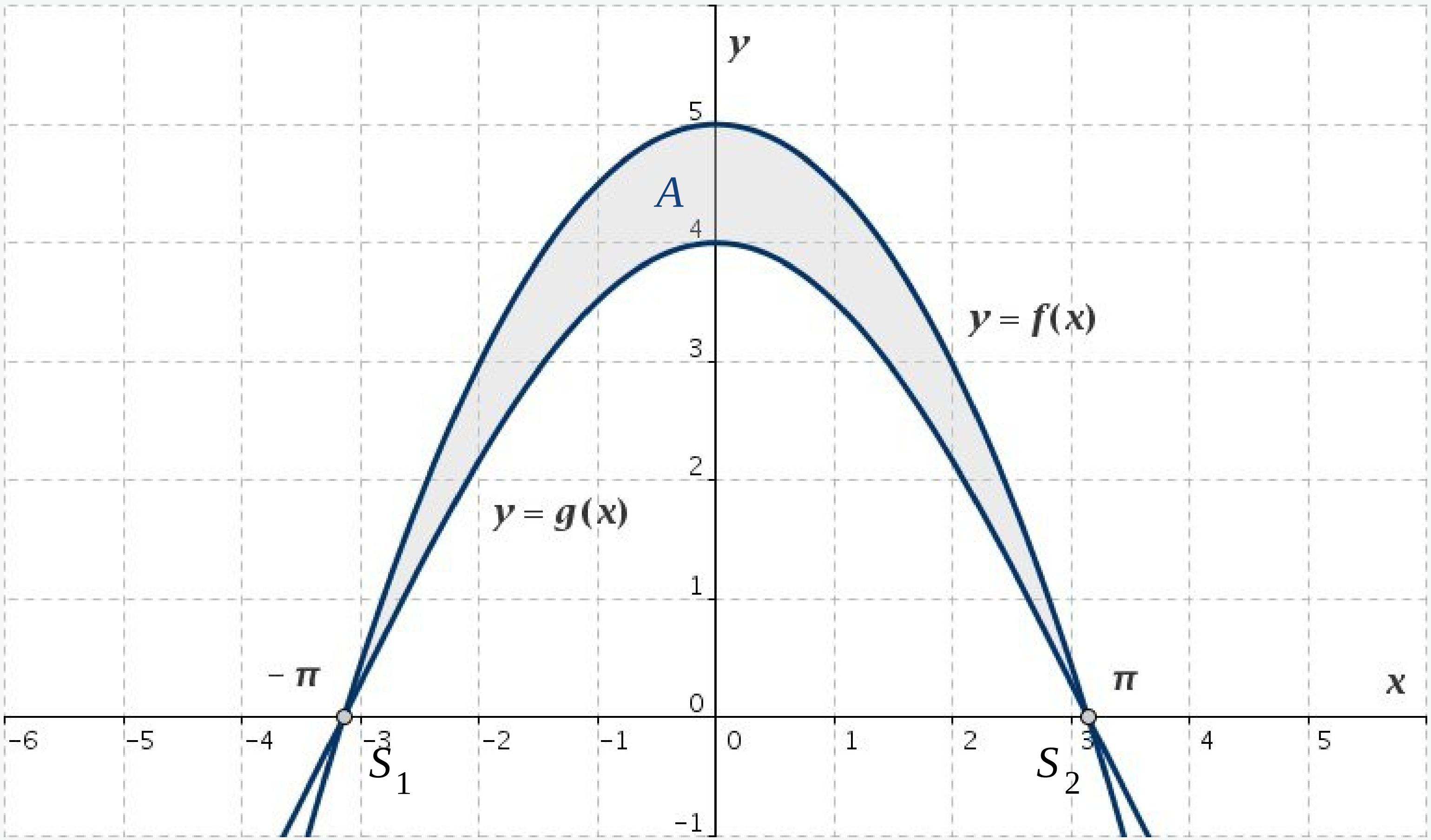

Abb. L3-1: Die zwischen den Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ eingeschlossene Fläche

$$f(x) = 5 - \frac{5}{\pi^2}\, x^2, \qquad g(x) = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$S_1(-\pi, 0), \qquad S_2(\pi, 0)$$

$$A = \int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=4\cos(x/2)}^{5-5x^2/\pi^2} dx\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} \left(5 - \frac{5x^2}{\pi^2} - 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = \frac{20}{3}\pi - 16 \simeq 4.94 \quad (\mathrm{FE})$$

Aus Symmetriegründen ist die x-Koordinate des Schwerpunktes gleich Null

$$x_S = \frac{1}{A} \int_{x=-\pi}^{\pi} x\, dx \int_{y=4\cos(x/2)}^{5-5x^2/\pi^2} dy = \frac{1}{\frac{20}{3}\pi - 16} \int_{-\pi}^{\pi} x \left(5 - \frac{5x^2}{\pi^2} - 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = 0$$

$$y_S = \frac{1}{A} \int_{x=-\pi}^{\pi} dx \int_{y=4\cos(x/2)}^{5-5x^2/\pi^2} y\, dy = \frac{1}{2\left(\frac{20}{3}\pi - 16\right)} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(5 - \frac{5x^2}{\pi^2}\right)^2 - 16\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx =$$

$$= \frac{4\pi}{5\pi - 12} \simeq 3.39$$

$S = (0,\ 3.39)$ – der Flächenschwerpunkt

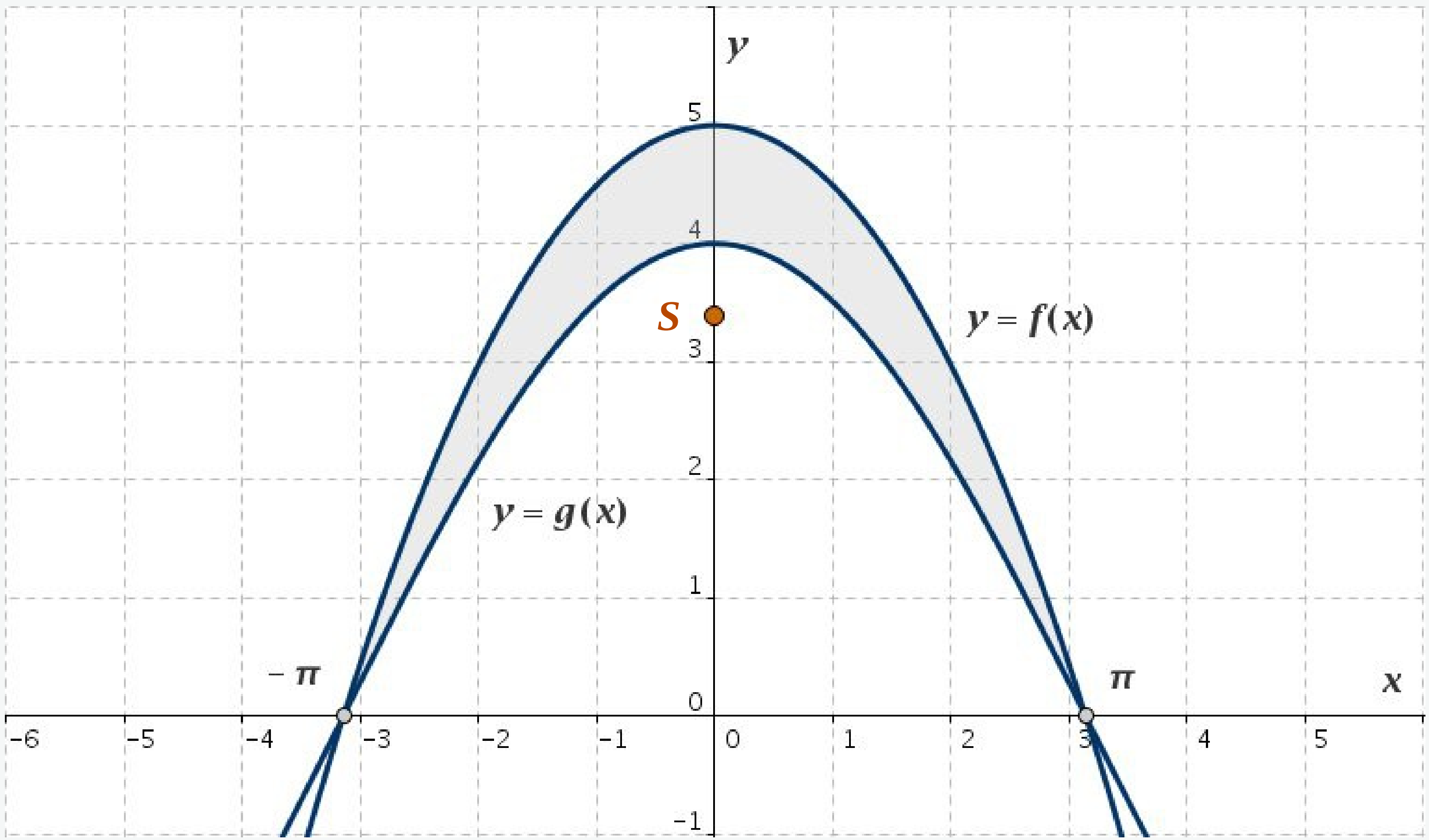

Abb. L3-2: Die Fläche zwischen den Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ mit dem eingezeichneten Schwerpunkt S

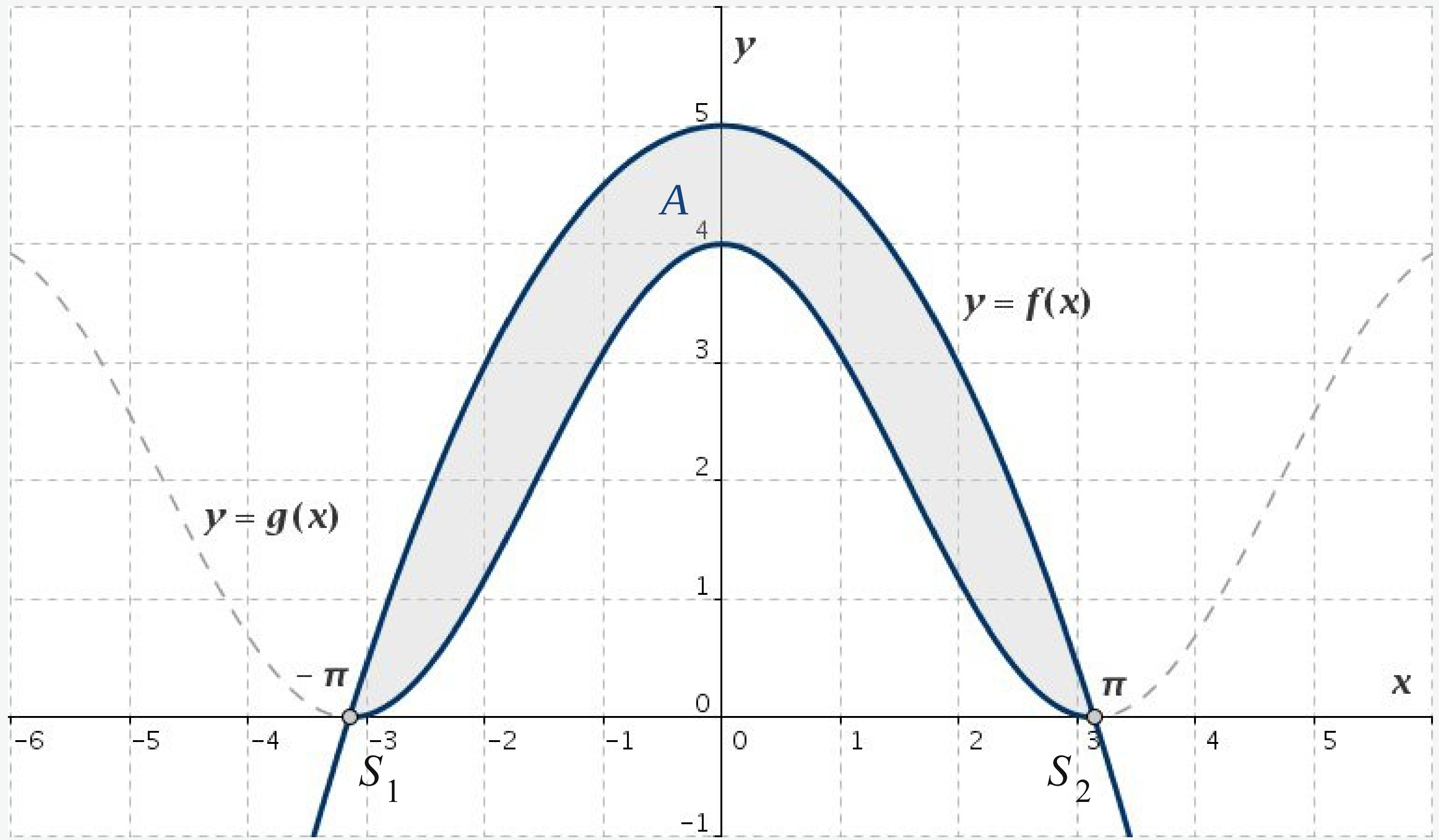

Abb. L4-1: Die zwischen den Funktionen y = f (x) und y = g (x) eingeschlossene Fläche

$$f(x) = 5 - \frac{5}{\pi^2}\, x^2, \qquad g(x) = 4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$S_1(-\pi, 0), \qquad S_2(\pi, 0)$$

$$A = \int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}^{5-5\frac{x^2}{\pi^2}} dx\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} \left(5 - \frac{5x^2}{\pi^2} - 4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = \frac{8}{3}\pi \simeq 8.38 \ \ (\mathrm{FE})$$

Aus Symmetriegründen ist die x-Koordinate des Schwerpunktes gleich Null

$$x_S = 0$$

$$y_S = \frac{1}{A} \int_{x=-\pi}^{\pi} dx \int_{y=4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}^{5-5\frac{x^2}{\pi^2}} y\, dy = \frac{3}{16\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(5 - \frac{5x^2}{\pi^2}\right)^2 - 16\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx =$$

$$= \frac{11}{4} = 2.75$$

$S = (0,\ 2.75)$ – der Flächenschwerpunkt

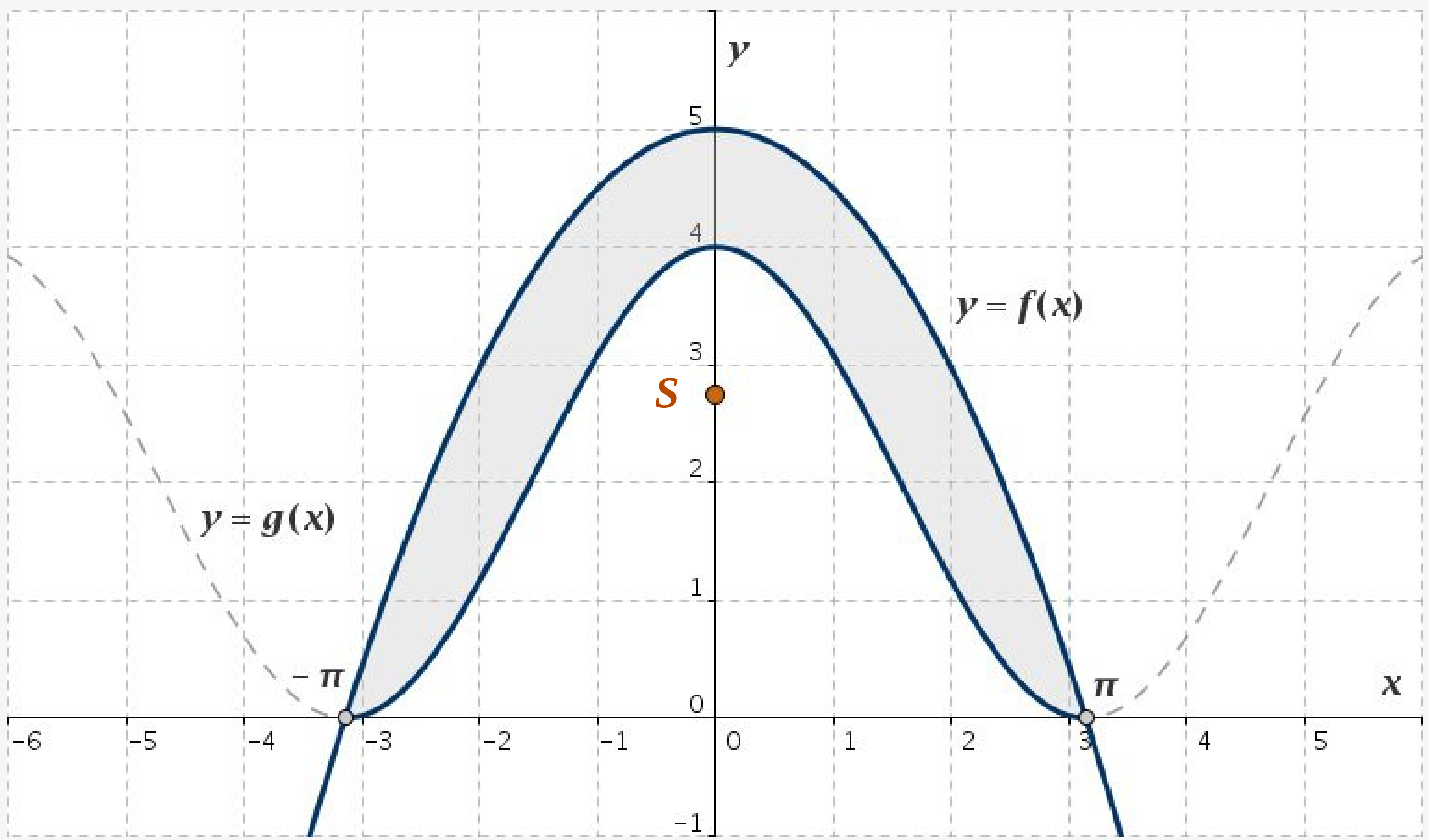

Abb. L4-2: Die Fläche zwischen den Funktionen $y = f(x)$ *und* $y = g(x)$ *mit dem eingezeichneten Schwerpunkt S*

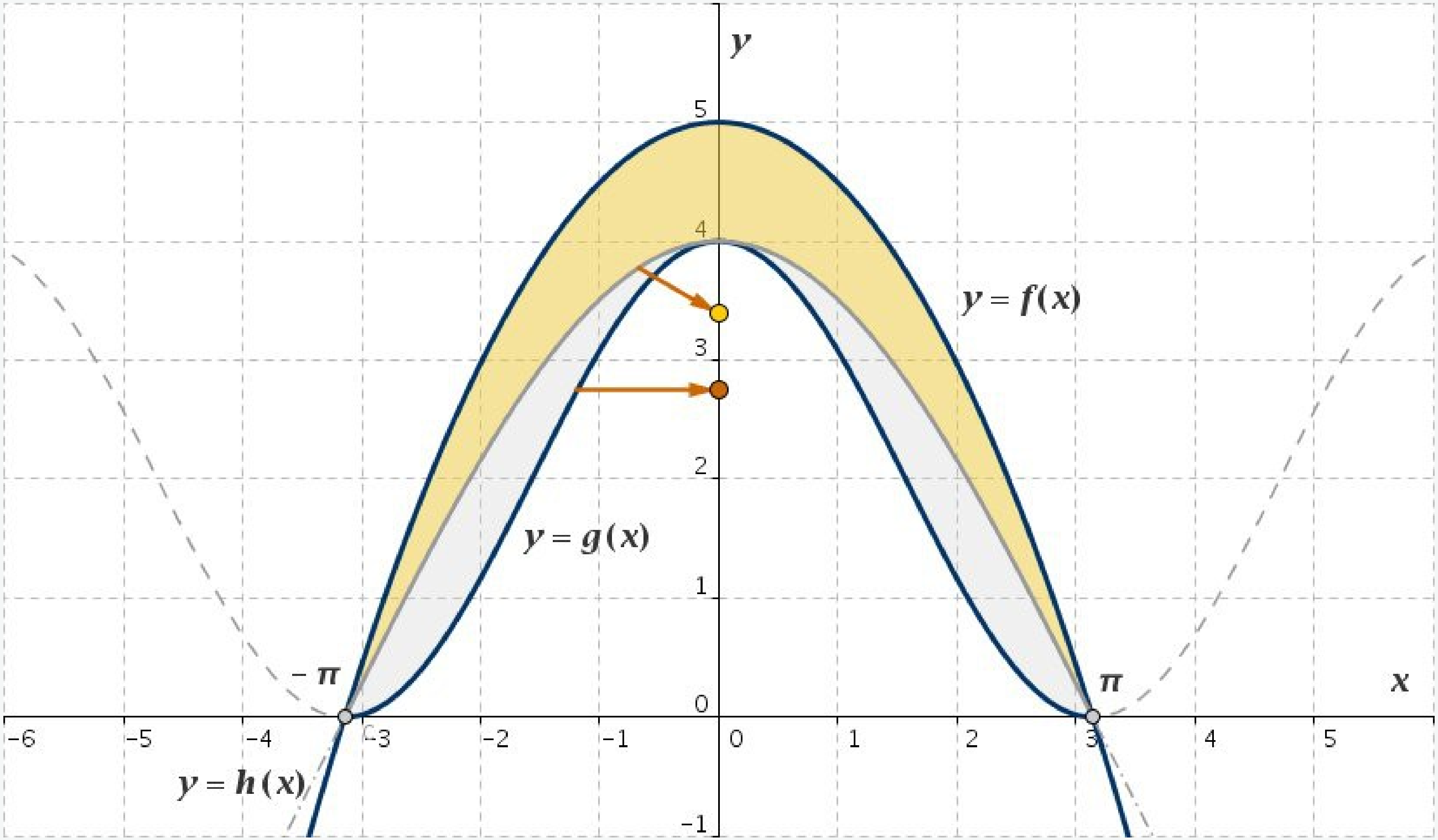

Abb. L4-3: Die Flächen zwischen den Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ und den Funktionen $y = f(x)$ und $y = h(x)$ mit den eingezeichneten Schwerpunkten

$$f(x) = 5 - \frac{5}{\pi^2}\, x^2, \qquad g(x) = 4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right), \qquad h(x) = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

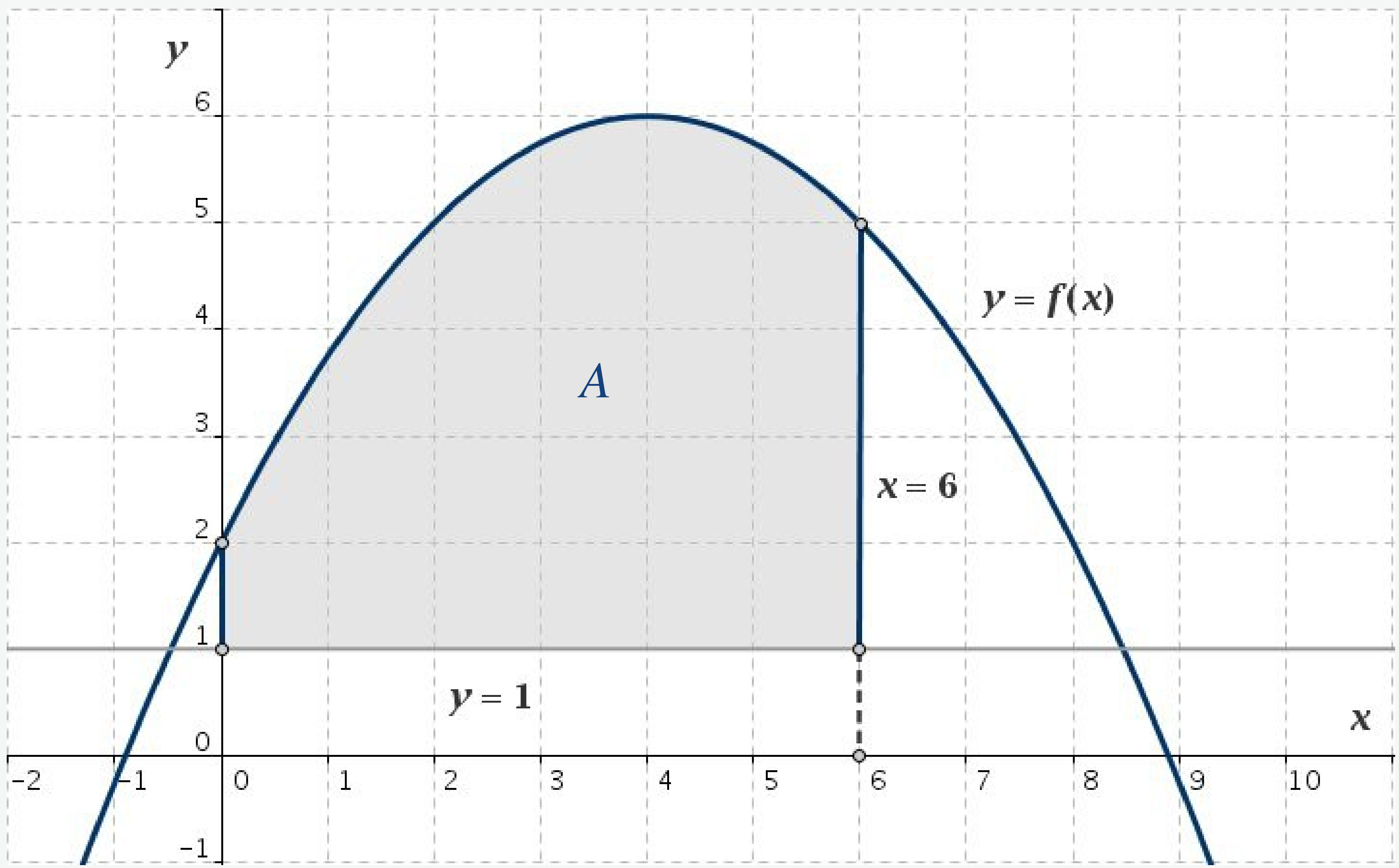

Abb. L5-1: Graphische Darstellung der Fläche A zwischen der Funktion y = f (x) und der Geraden y = 1, x = [0, 6]

$$A = \int\limits_{x=0}^{6} \int\limits_{y=1}^{2+2x-\frac{x^2}{4}} dy\ dx = \int\limits_{0}^{6} \left(1 + 2x - \frac{x^2}{4} \right) dx = 24 \quad (\text{FE})$$

$$A = 24 \quad (\text{FE})$$

$$x_s = \frac{1}{A} \int\limits_{x=0}^{6} x\, dx \int\limits_{y=1}^{2+2x-\frac{x^2}{4}} dy = \frac{1}{24} \int\limits_{0}^{6} x \left(1 + 2x - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{27}{8} \quad (\text{LE})$$

$$y_s = \frac{1}{A} \int\limits_{x=0}^{6} dx \int\limits_{y=1}^{2+2x-\frac{x^2}{4}} y\, dy = \frac{1}{48} \int\limits_{0}^{6} \left[\left(2 + 2x - \frac{x^2}{4}\right)^2 - 1\right] dx = \frac{63}{20} \quad (\text{LE})$$

$$S = \left(\frac{27}{8},\ \frac{63}{20}\right) = (3.375,\ 3.15)$$

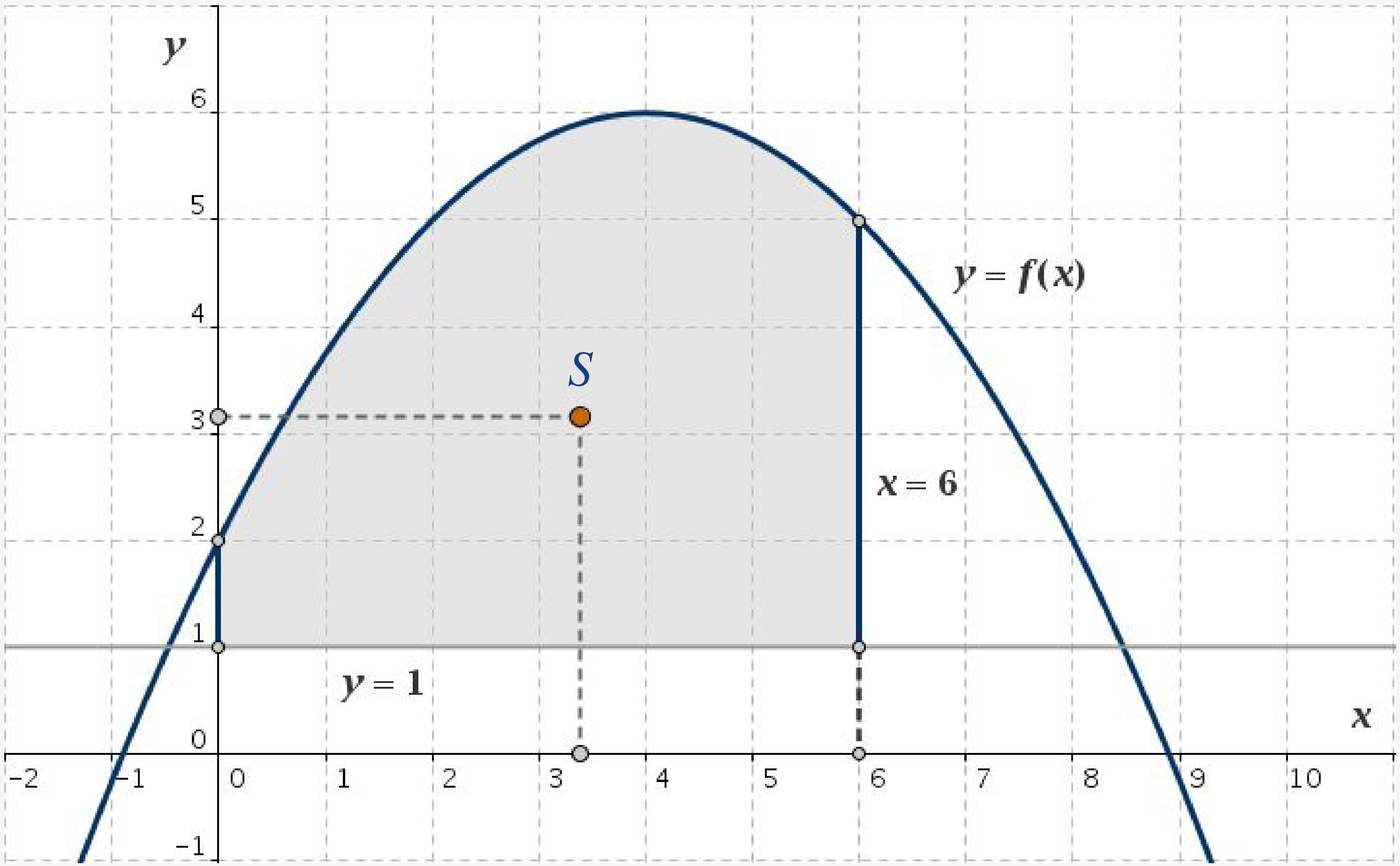

Abb. L5-2: Graphische Darstellung der Fläche A mit dem Schwerpunkt S

$$S = (3.375,\ 3.15)$$

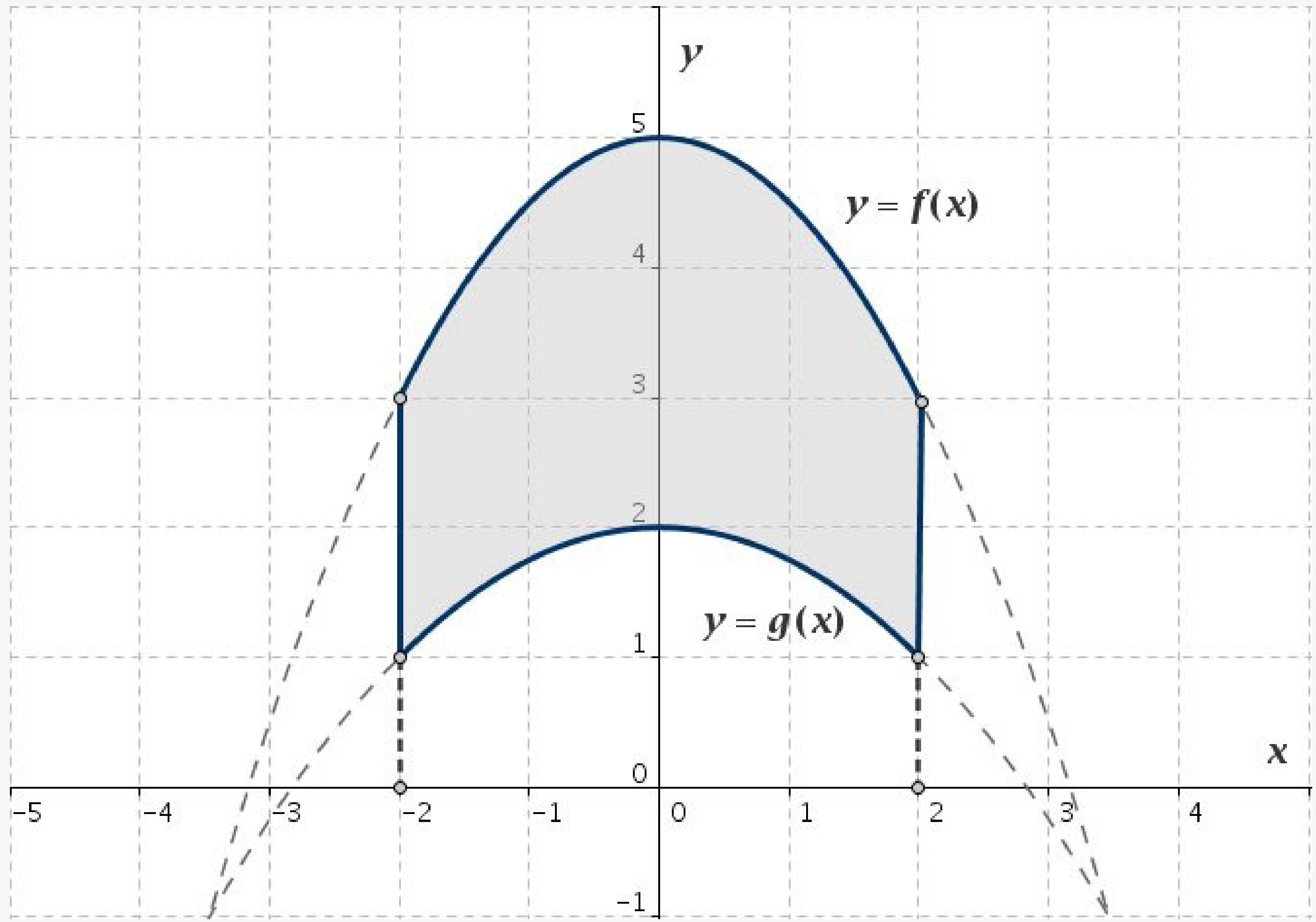

Abb. L6-1: Graphische Darstellung der Fläche A zwischen den Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

$$A = \int_{x=-2}^{2} \int_{y=g(x)}^{f(x)} dy\ dx = \int_{x=-2}^{2} \int_{y=2-\frac{x^2}{4}}^{5-\frac{x^2}{2}} dy\ dx = 2 \int_{x=0}^{2} \int_{y=2-\frac{x^2}{4}}^{5-\frac{x^2}{2}} dy\ dx = \frac{32}{3} \ \text{(FE)}$$

$$A = \frac{32}{3} \quad (\mathrm{FE})$$

$$x_S = \frac{1}{A} \int\limits_{x=-2}^{2} \int\limits_{y=2-\frac{x^2}{4}}^{5-\frac{x^2}{2}} x \ dy \ dx = \frac{3}{32} \int\limits_{x=-2}^{2} x \ dx \int\limits_{y=2-\frac{x^2}{4}}^{5-\frac{x^2}{2}} dy = 0$$

$$y_S = \frac{1}{A} \int\limits_{x=-2}^{2} \int\limits_{y=2-\frac{x^2}{4}}^{5-\frac{x^2}{2}} y \ dy \ dx = \frac{3}{32} \int\limits_{x=-2}^{2} dx \int\limits_{y=2-\frac{x^2}{4}}^{5-\frac{x^2}{2}} y \ dy = 3.05$$

$S = (0, \ 3.05)$ – der Flächenschwerpunkt