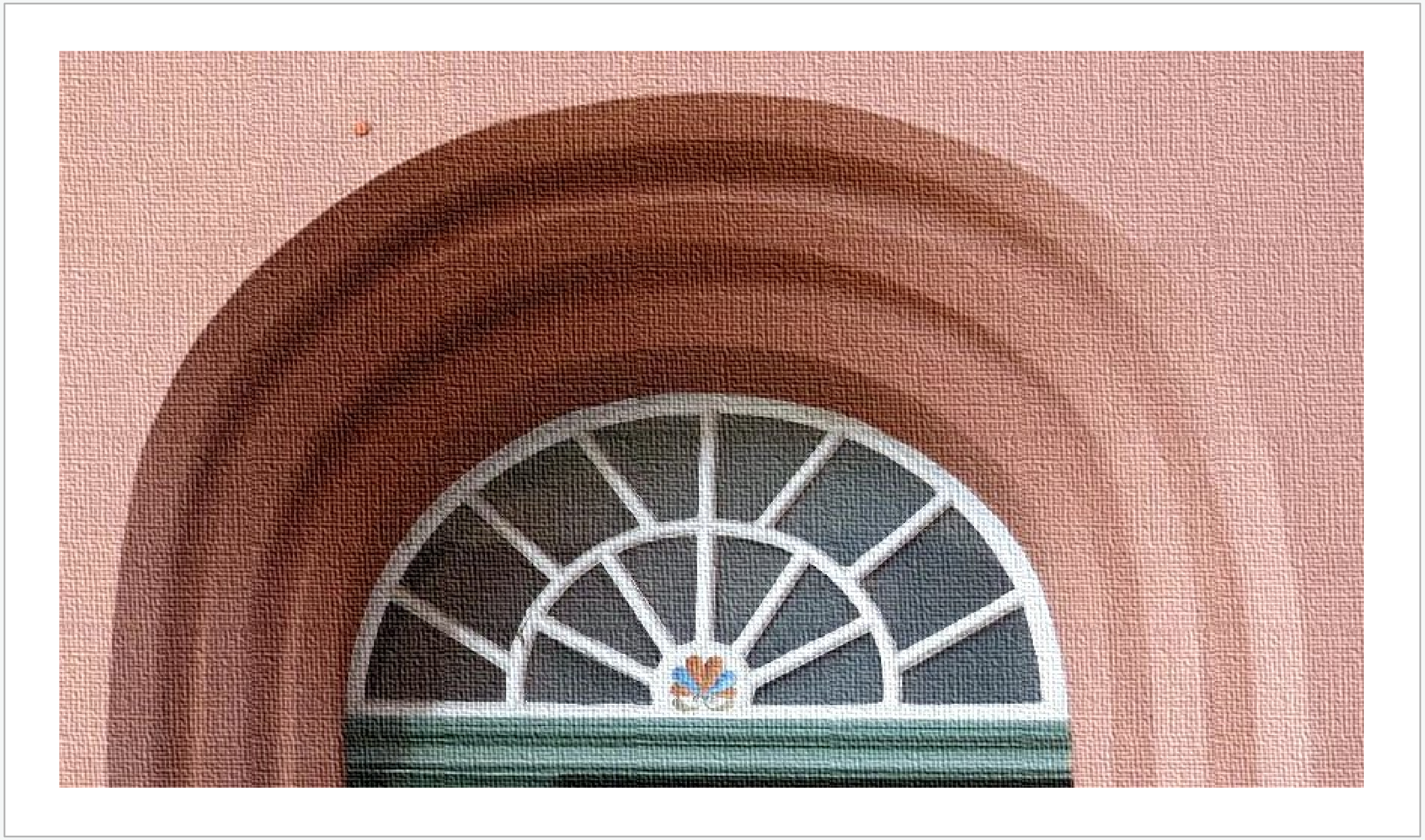

Doppelintegral in Polarkoordinaten: *Aufgaben 7-11*

Doppelintegral in Polarkoordinaten: Aufgaben 7-11

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale und zeichnen Sie den Integrationsbereich

Aufgabe 7:

$$I = \iint_A (3\,x + 4\,y^2)\;dx\,dy\,, \qquad A:\;\; y \geqslant 0, \quad 1 \leqslant\; x^2 + y^2 \leqslant\; 4$$

Aufgabe 8:

$$I = \iint_A \sqrt{4 - x^2 - y^2}\;dx\,dy\,, \qquad A:\;\; x^2 + y^2 \leqslant\; 4, \quad x\,,\,y \geqslant 0$$

Aufgabe 9:

$$I = \iint_A x^2\,\sqrt{4 - x^2 - y^2}\;dx\,dy\,, \qquad A:\;\; x^2 + y^2 \leqslant\; 4, \quad y \geqslant 0$$

Aufgabe 10:

$$I = \iint_A (x^2 + y^2)\;dx\,dy\,, \qquad A:\;\; x^2 + y^2 \leqslant\; 4, \quad y \geqslant |\,x\,|$$

Aufgabe 11:

$$I = \iint_A e^{-(x^2 + y^2)}\;dx\,dy\,, \qquad A:\;\; x^2 + y^2 \leqslant\; 1, \quad x\,,\,y \leqslant 0$$

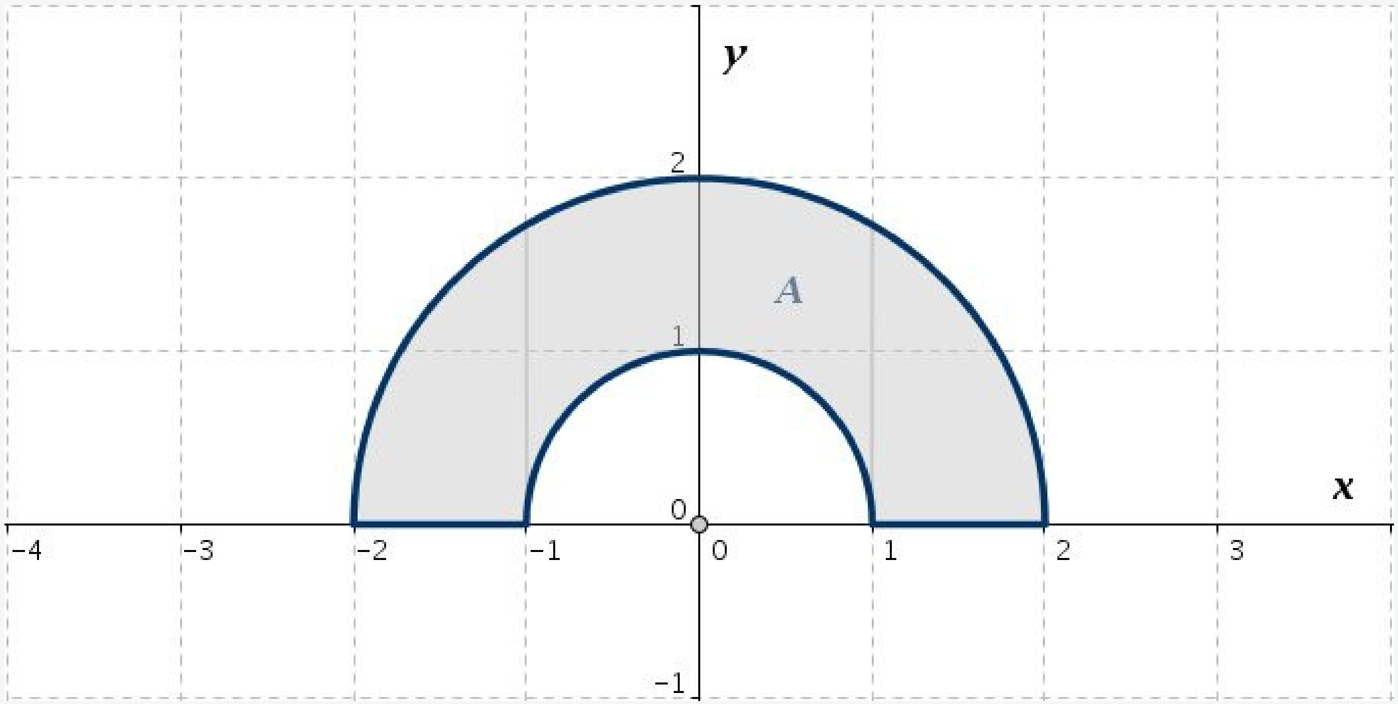

Abb. L7: Darstellung des Integrationsbereiches A

$$I = \int_A (3\,x + 4\,y^2)\ dx\,dy = 3 \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos\varphi\, d\,\varphi \int_{r=1}^{2} r^2\,dr + 4 \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^2\varphi\, d\,\varphi \int_{r=1}^{2} r^3\,dr =$$

$$= 7 \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos\varphi\, d\,\varphi + 15 \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^2\varphi\, d\,\varphi = \frac{15\,\pi}{2}$$

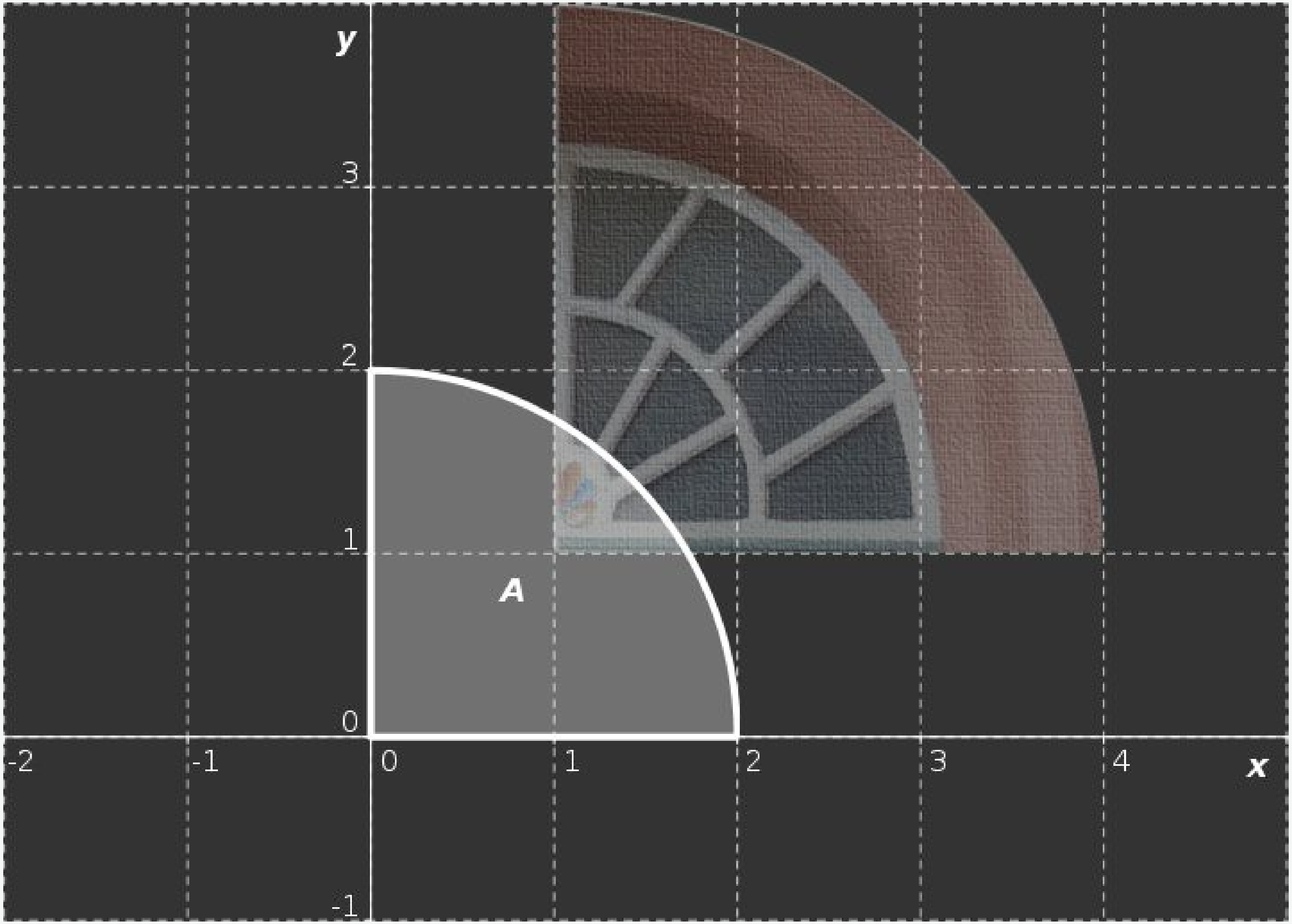

Abb. L8: Darstellung des Integrationsbereiches A

$$A: \qquad x^2 + y^2 \leqslant 4, \qquad x\,,\; y \geqslant 0$$

$$A: \quad x^2 + y^2 \leqslant 4, \quad x\,,\, y \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad r \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$I = \iint\limits_A \sqrt{4 - x^2 - y^2}\; dx\, dy = \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} d\,\varphi \int\limits_{r=0}^{2} \sqrt{4 - r^2}\; r\; dr = \frac{8}{3} \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} d\,\varphi = \frac{4}{3}\,\pi$$

$$u = 4 - r^2, \quad r\, dr = -\frac{du}{2}, \quad \sqrt{4 - r^2}\; r\, dr = -\frac{1}{2}\sqrt{u}\; du$$

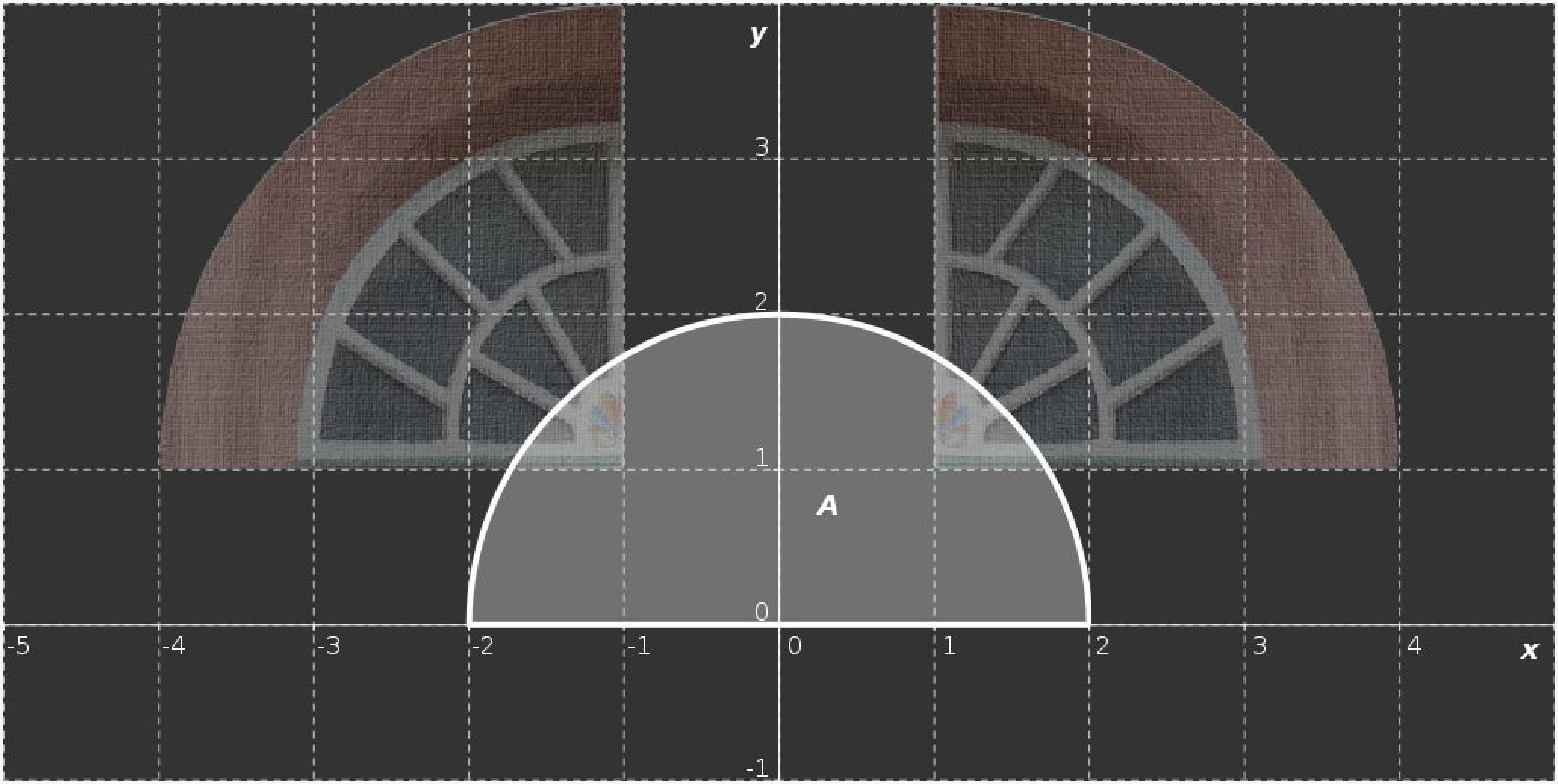

Abb. L9: Darstellung des Integrationsbereiches A

$$A: \qquad x^2 + y^2 \leqslant 4, \qquad y \geqslant 0$$

$$A: \quad x^2 + y^2 \leqslant 4, \quad y \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad r \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

$$I = \iint\limits_A x^2 \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int\limits_{r=0}^{2} r^3 \sqrt{4 - r^2}\, dr =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int\limits_{u=0}^{4} (4 - u) \sqrt{u}\, du = \frac{64}{15} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{32}{15} \pi \simeq 6.702$$

$$u = 4 - r^2, \quad r\, dr = -\frac{du}{2}, \quad r^3 \sqrt{4 - r^2}\, dr = -\frac{1}{2} (4 - u) \sqrt{u}\, du$$

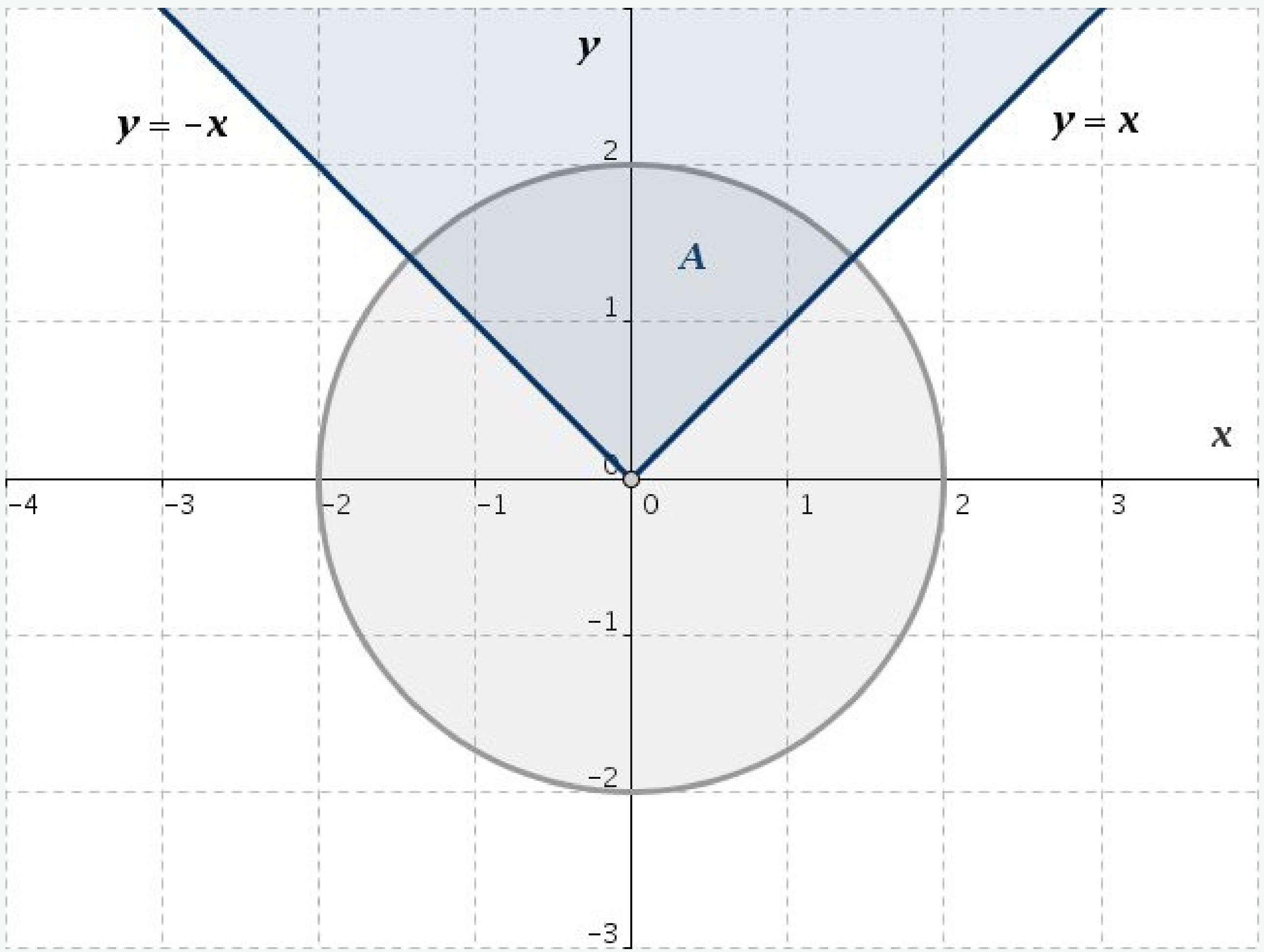

Abb. L10: Zur Bestimmung des Integrationsbereiches A

$$A: \qquad x^2 + y^2 \leqslant 4, \qquad y \geqslant |\, x \,|$$

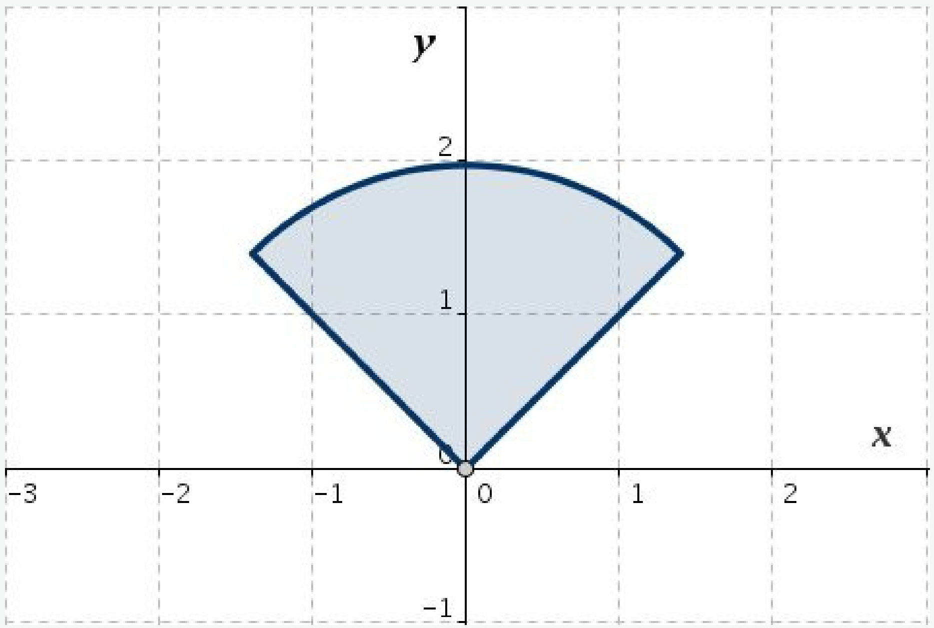

Abb. L10: Darstellung des Integrationsbereiches A

$$A: \quad x^2 + y^2 \leqslant 4, \qquad y \geqslant |x|$$

$$I = \iint\limits_A (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int\limits_{\varphi = \frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi \int\limits_{r=0}^{2} r^3\, dr = 4 \int\limits_{\varphi = \frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi = 2\pi$$

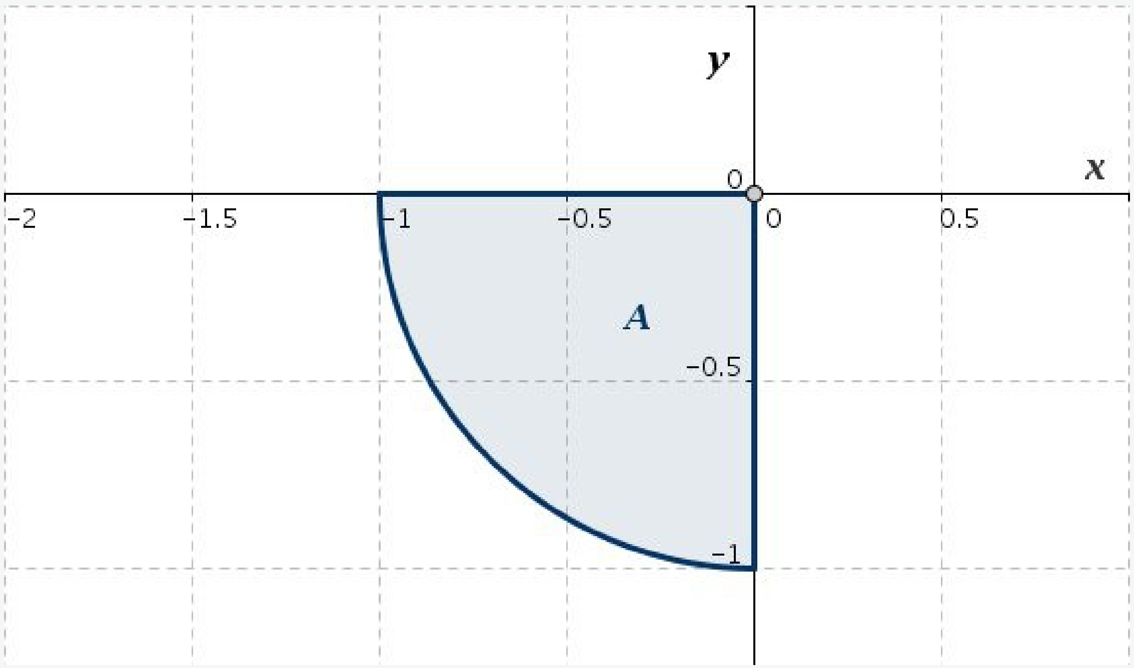

Abb. L11: Darstellung des Integrationsbereiches A

$$A: \quad x^2 + y^2 \leqslant 1, \qquad x\,,\, y \leqslant 0$$

$$I = \iint\limits_A e^{-(x^2 + y^2)}\, dx\, dy = \int\limits_{\varphi = \pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{r=0}^{1} r\, e^{-r^2}\, dr = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-1}\right) \simeq 0.496$$