Die Kirche am Niendorfer Markt (Fragment), Hamburg

Transformation in vereinfachende Koordinaten


1
2
1
2

Transformation in vereinfachende Koordinaten

Aufgabe 5:

Ein Bereich ist durch Funktionen in kartesischen Koordinaten bestimmt. Berechnen Sie den Bereich im neuen *(u, v)*-Koordinatensystemen

$$A: \quad x^2 + \frac{y^2}{36} = 1\,; \qquad x = \frac{u}{2}\,, \quad y = 3\,v$$

Aufgabe 6:

Zeigen Sie, wie Sie den von Geraden

$$y = -x + 4, \quad y = x + 1, \quad y = \frac{x}{3} - \frac{4}{3}$$

eingeschlossenen Bereich integrieren können. Zunächst in den *(x, y)*-Koordinaten, dann in den *(u, v)*-Koordinaten

$$x = \frac{1}{2}\,(u + v)\,, \qquad y = \frac{1}{2}\,(u - v)$$

Das Integral über I dem trapezförmigen Bereich mit den Eckpunkten *(1, 0)*, *(2, 0)*, *(0, -2)* und *(0, -1)* ist zu berechnen

$$I = \iint_A e^{\frac{(x+y)}{(x-y)}}\, dx\, dy$$

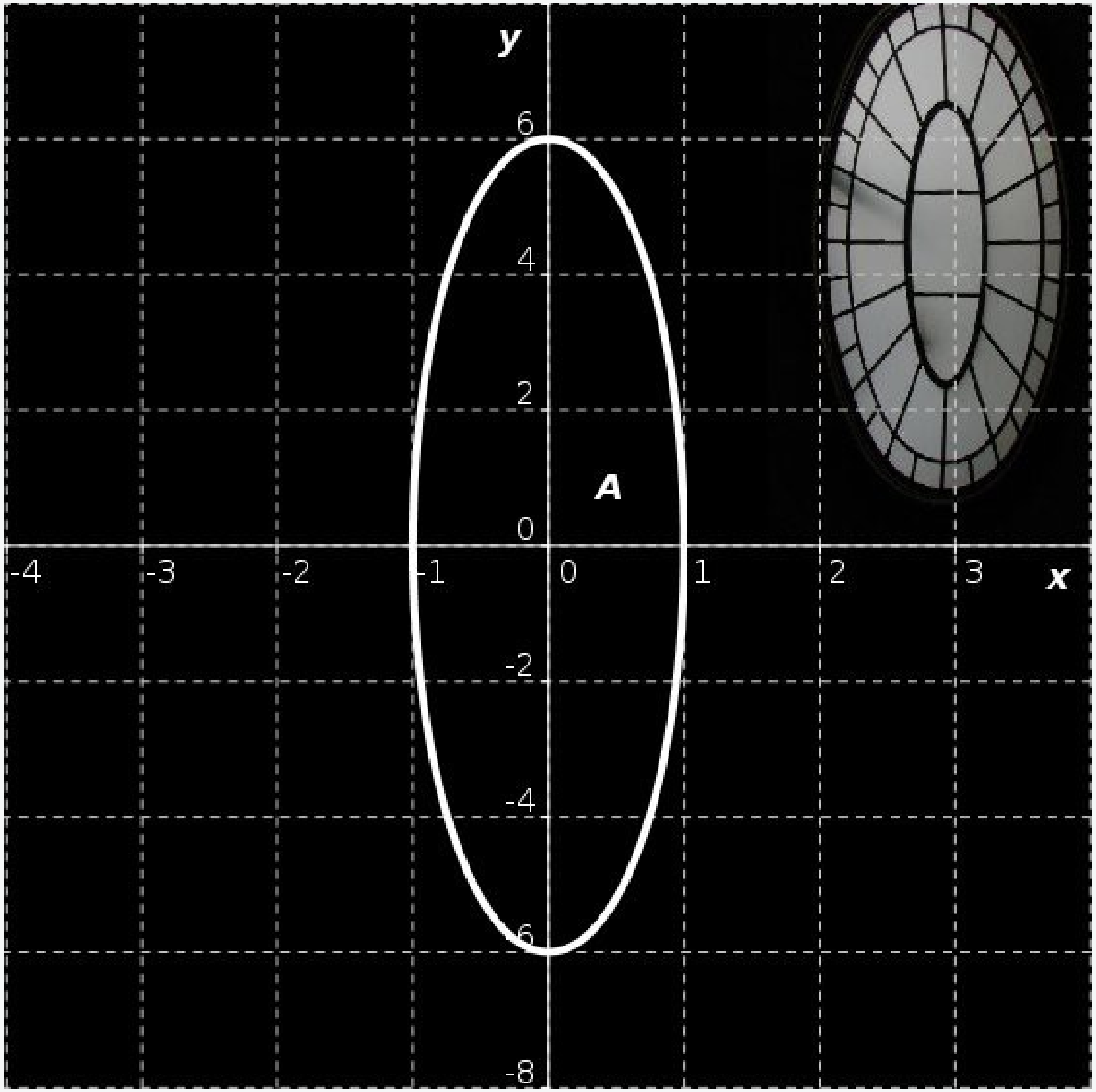

Abb. L5-1: Der Bereich A (Ellipse) in den kartesischen Koordinaten

$$A: \quad x^2 + \frac{y^2}{36} = 1$$

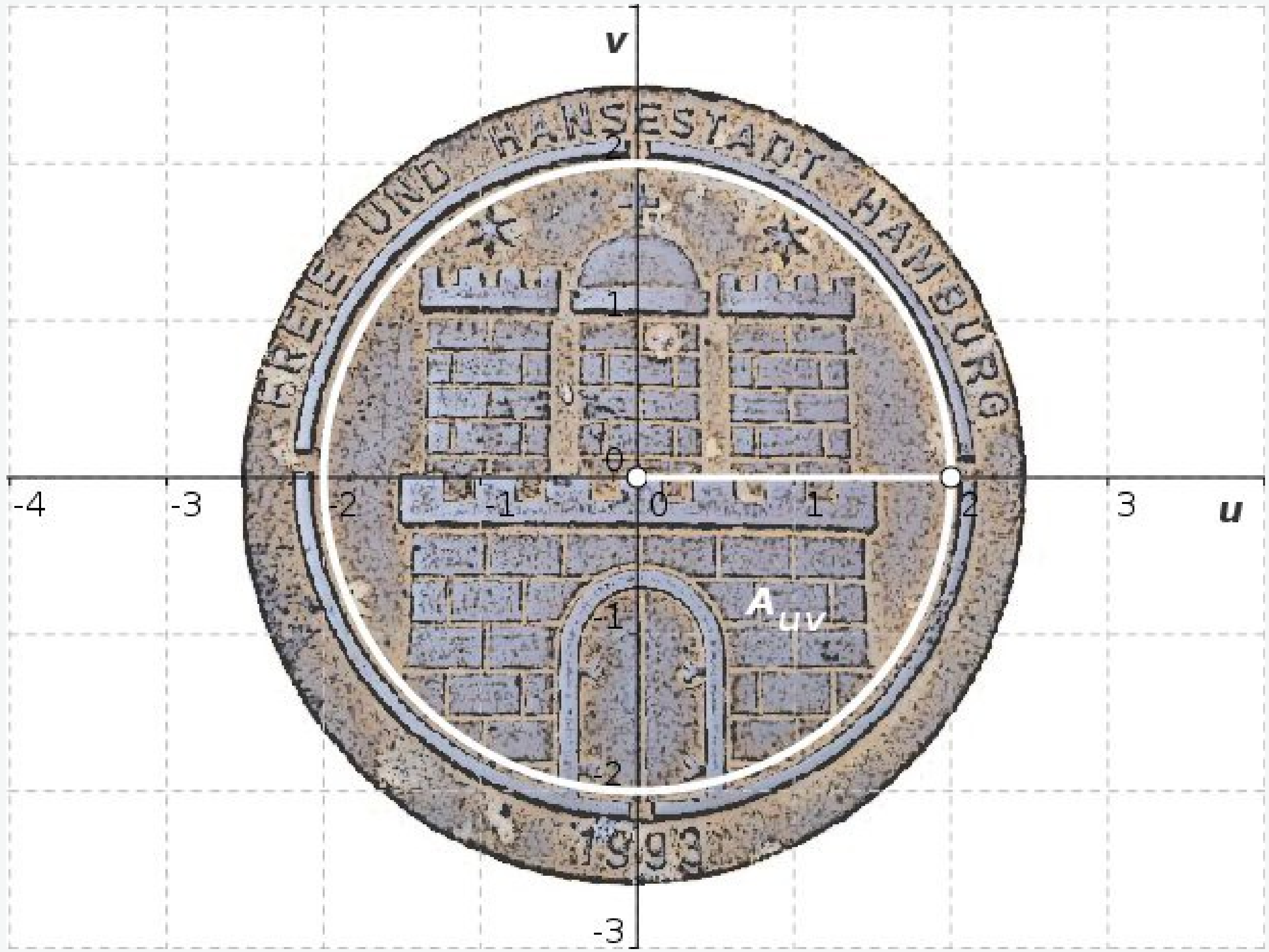

Abb. L5-2: Der Bereich A (Kreis) in den (u, v)-Koordinaten

$$x^2 + \frac{y^2}{36} = 1, \qquad \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{(3\,v)^2}{36} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u^2}{4} + \frac{9\,v^2}{36} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$u^2 + v^2 = 4$$

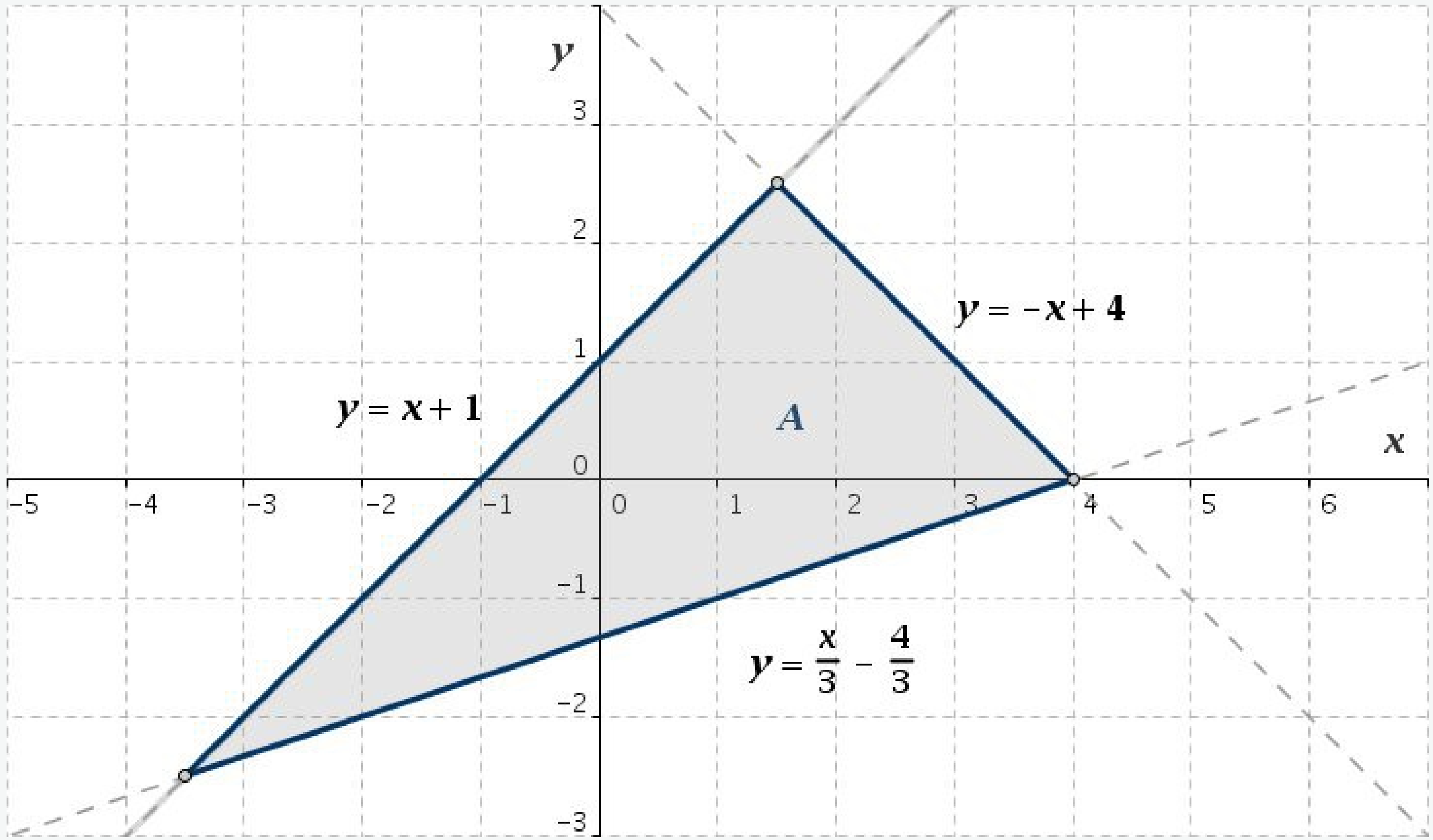

Abb. 5-1: Der Bereich A (Treieck) in den kartesischen Koordinaten

$$A: \quad y = -x + 4, \quad y = x + 1, \quad y = \frac{x}{3} - \frac{4}{3}$$

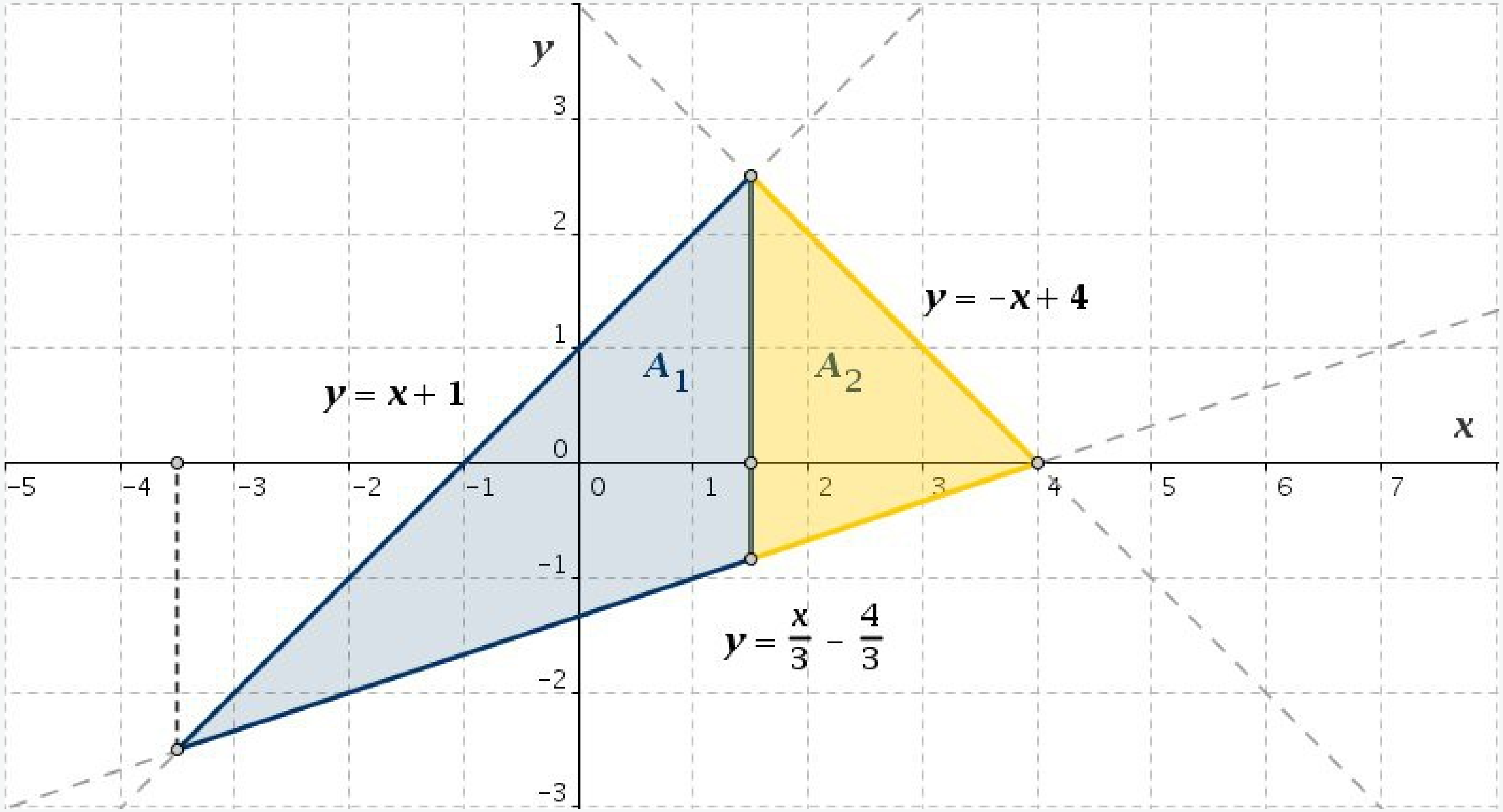

Abb. 4b: Die Darstellung des Bereiches A für die folgende Integration

$$A = \iint_A dx\,dy = \iint_{A_1} dx\,dy + \iint_{A_2} dx\,dy =$$

$$= \int_{x=-7/2}^{3/2} \int_{y=x/3-4/3}^{x+1} dx\,dy + \int_{x=3/2}^{4} \int_{y=x/3-4/3}^{-x+4} dx\,dy = 12.5 \ \ (\mathrm{FE})$$

$$y = -x + 4: \quad \frac{1}{2}(u - v) = -\frac{1}{2}(u + v) + 4 \quad \Rightarrow \quad u = 4$$

$$y = x + 1: \quad \frac{1}{2}(u - v) = \frac{1}{2}(u + v) + 1 \quad \Rightarrow \quad v = -1$$

$$y = \frac{x}{3} - \frac{4}{3}: \quad \frac{1}{2}(u - v) = \frac{1}{6}(u + v) - \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{u}{2} + 2$$

$$x = \frac{1}{2}(u + v), \qquad y = \frac{1}{2}(u - v)$$

$$D = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

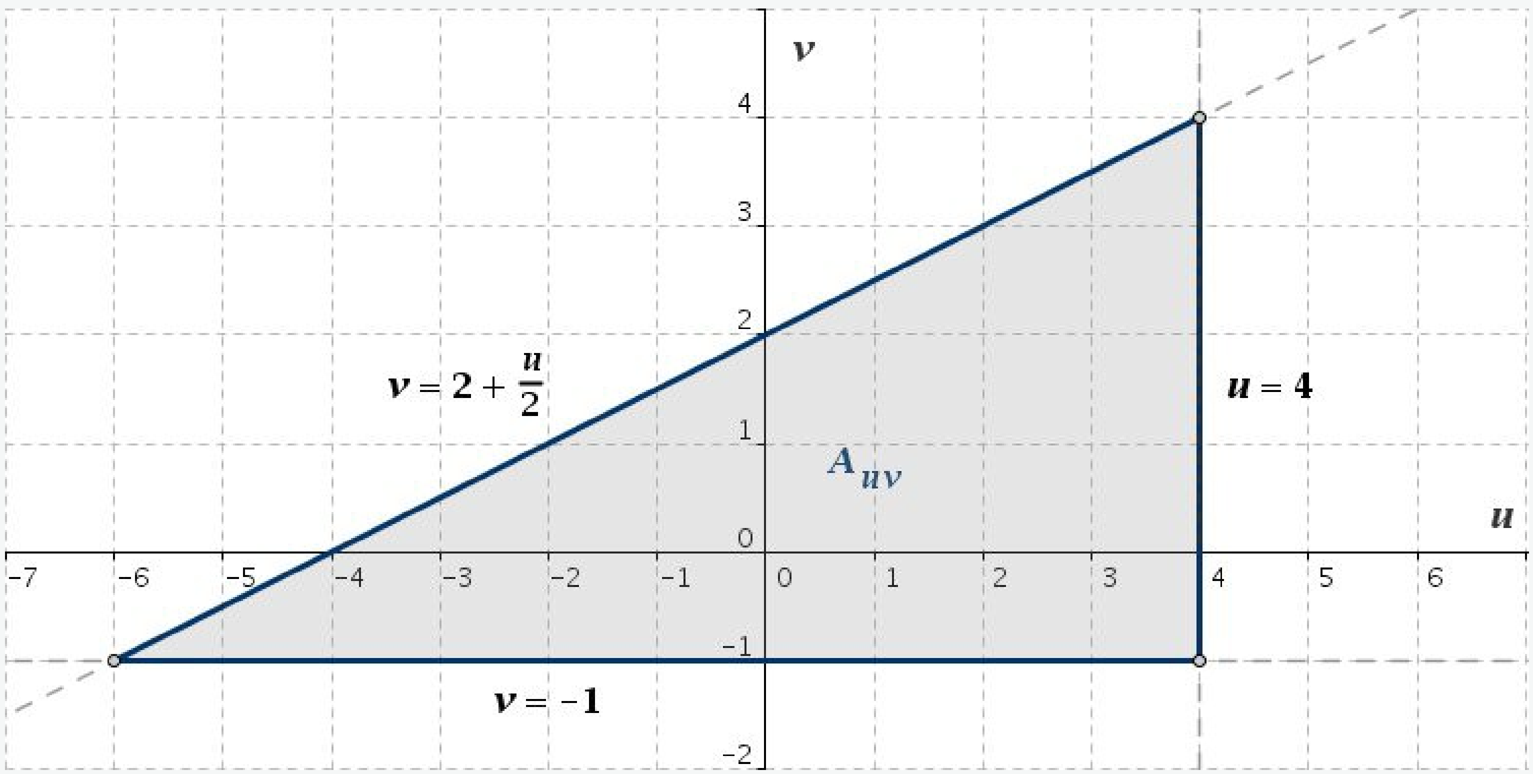

Abb. 4c: Der Bereich in den (u, v)-Koordinaten

$$A = \iint_{A_{uv}} |D| \, du \, dv = \frac{1}{2} \int_{u=-6}^{4} du \int_{v=-1}^{2+\frac{u}{2}} dv = \frac{1}{2} \int_{-6}^{4} \left(\frac{u}{2} + 3 \right) du = 12.5 \quad (\text{FE})$$

Durch geeignete Koordinatentransformation wird die geometrische Struktur und die Integration vereinfacht.

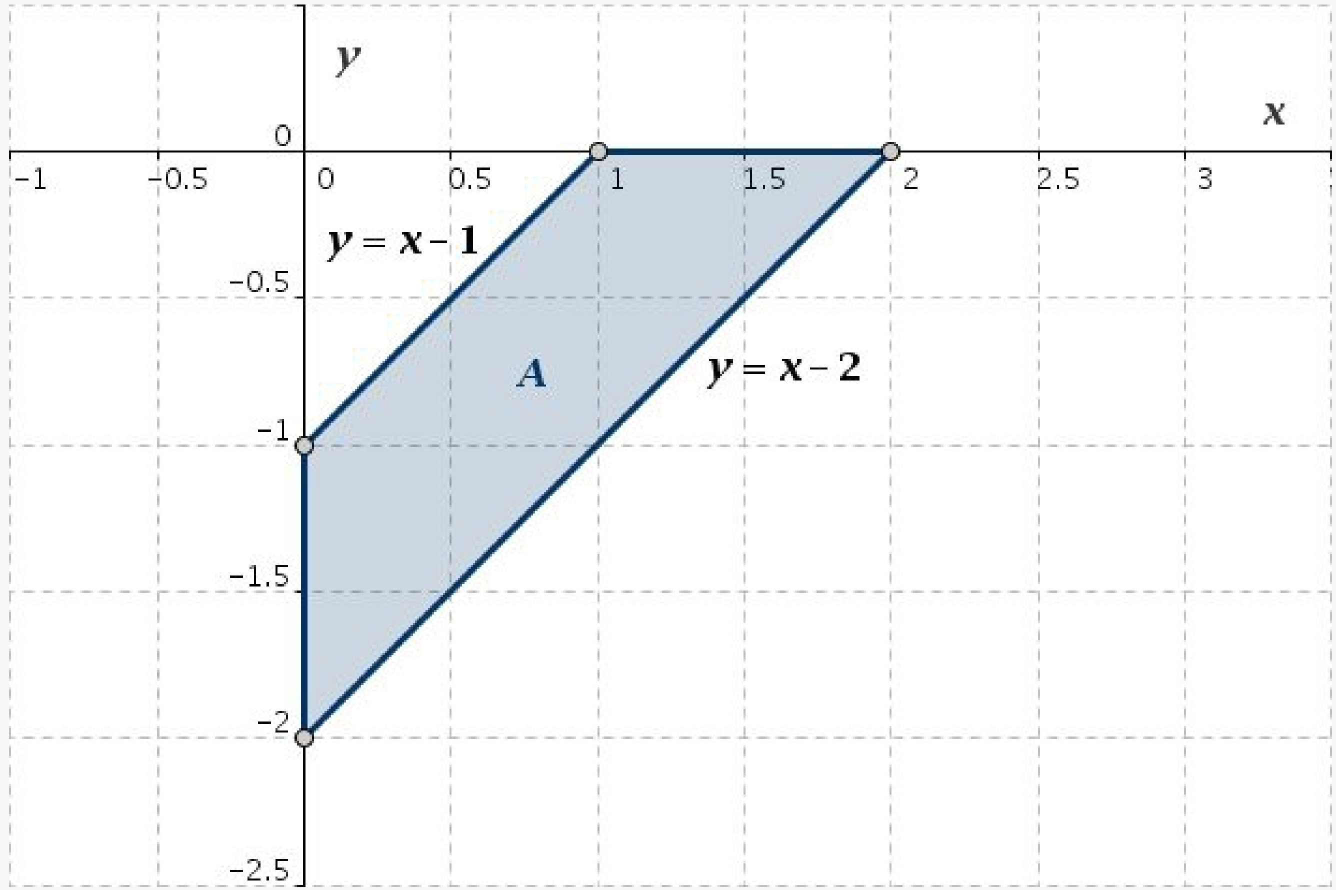

Abb. 5a: Der trapezförmiger Bereich A mit den Eckpunkten (1, 0), (2, 0), (0, -2) und (0, -1)

$$I = \iint\limits_A e^{\frac{(x+y)}{(x-y)}} \, dx \, dy$$

Da es nicht leicht ist, den Integrand zu integrieren, wird eine Koordinatentransformation durchgeführt

$$u = x + y \,, \qquad v = x - y$$

Diese Gleichungen definieren eine Transformation von der xy-Ebene in die uv-Ebene.

$$x = \frac{1}{2}\,(u + v)\,, \qquad y = \frac{1}{2}\,(u - v)\,, \qquad D = \frac{D\,(x\,,y)}{D\,(u\,,v)} = -\,\frac{1}{2}$$

$$y = x - 1: \quad \frac{1}{2}\,(u - v) = \frac{1}{2}\,(u + v) - 1 \quad \Rightarrow \quad v = 1$$

$$y = x - 2: \quad \frac{1}{2}\,(u - v) = \frac{1}{2}\,(u + v) - 2 \quad \Rightarrow \quad v = 2$$

$$y = 0: \quad \frac{1}{2}\,(u - v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = u$$

$$x = 0: \quad \frac{1}{2}\,(u + v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -u$$

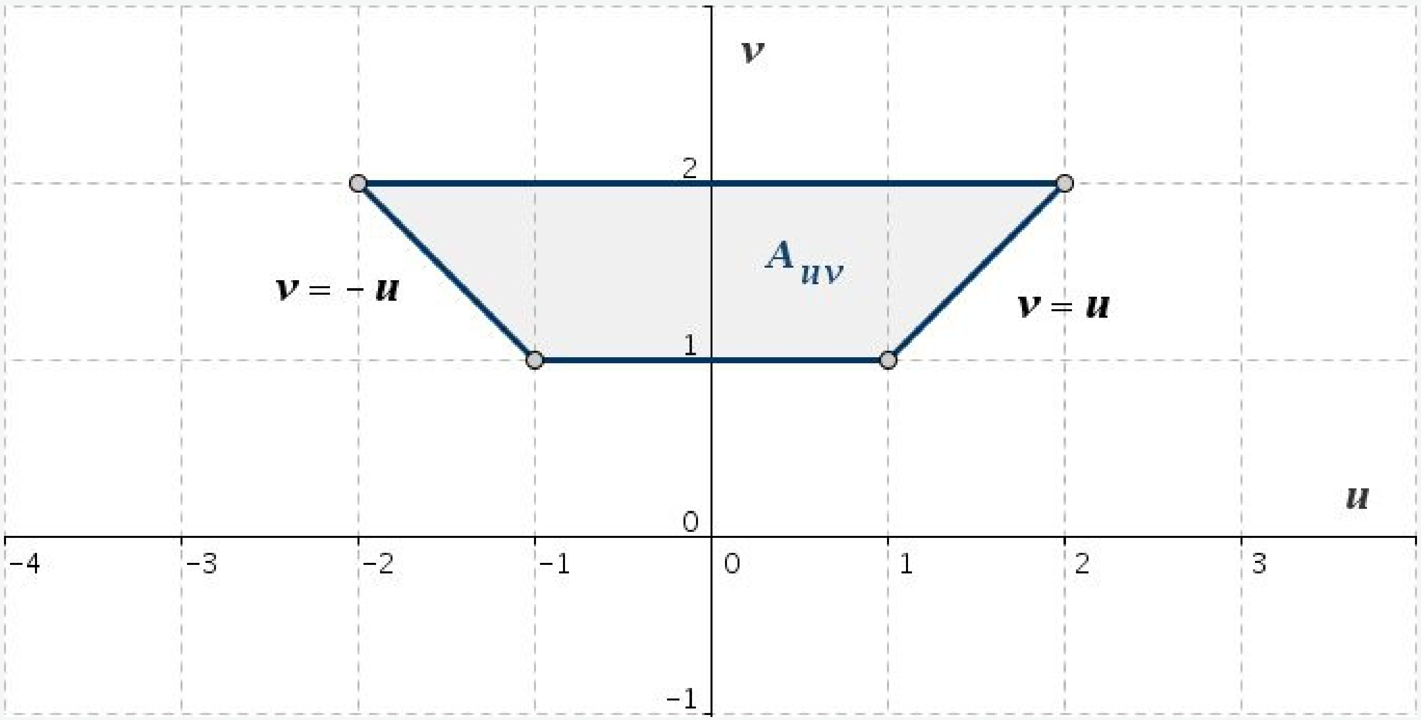

Abb. 5b: Der trapezförmiger Bereich im uv-Koordinatensystem mit den Eckpunkten (1, 1), (2, 2), (-2, 2) und (-1, 1). A : 1 ≤ v ≤ 2, - v ≤ u ≤ v

$$I = \iint_A e^{\frac{(x+y)}{(x-y)}}\, dx\, dy = \iint_A e^{\frac{u}{v}}\, |\, D\, |\, du\, dv = \frac{1}{2} \int_{v=1}^{2} dv \int_{u=-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, du =$$

$$= \frac{1}{2} \left(e - e^{-1}\right) \int_{v=1}^{2} v\, dv = \frac{3}{4} \left(e - e^{-1}\right)$$