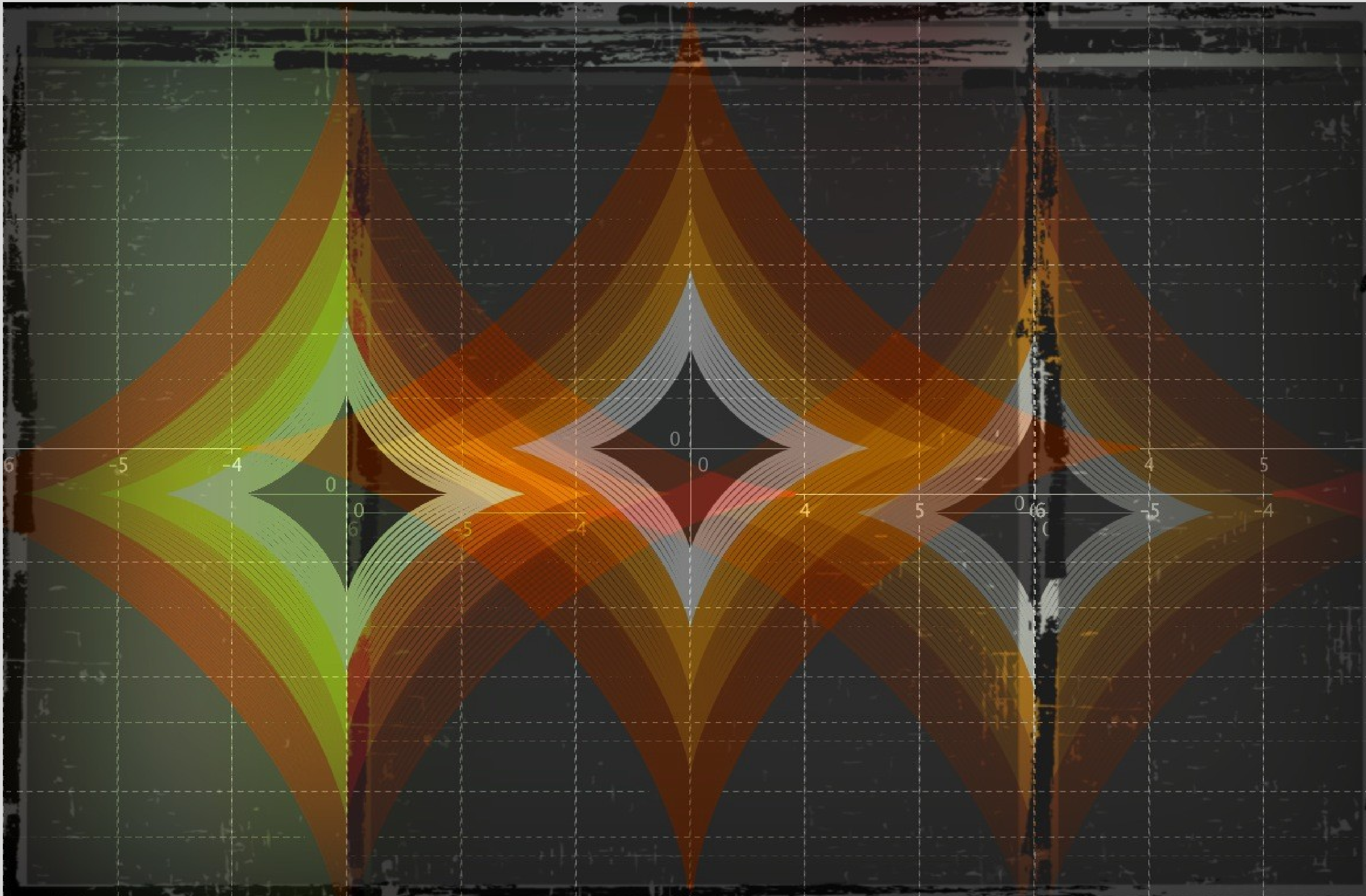
Mönckebergstraße, Hamburg, Haus (Fragment)

Transformation in vereinfachende Koordinaten



$$\int_A f(x, y)\, dx\, dy$$

A ist eine Kreisfläche mit dem Radius 2.

In kartesischen Koordinaten:

$$A = \left\{ (x, y) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2, \quad -\sqrt{4 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2} \right\}$$

$$\int_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x=-2}^{2} \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx$$

In Polarkoordinaten:

$$A = \left\{ (r, \varphi) \mid 0 \leqslant r \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \right\}$$

Dann erhält man konstante Integrationsgrenzen!

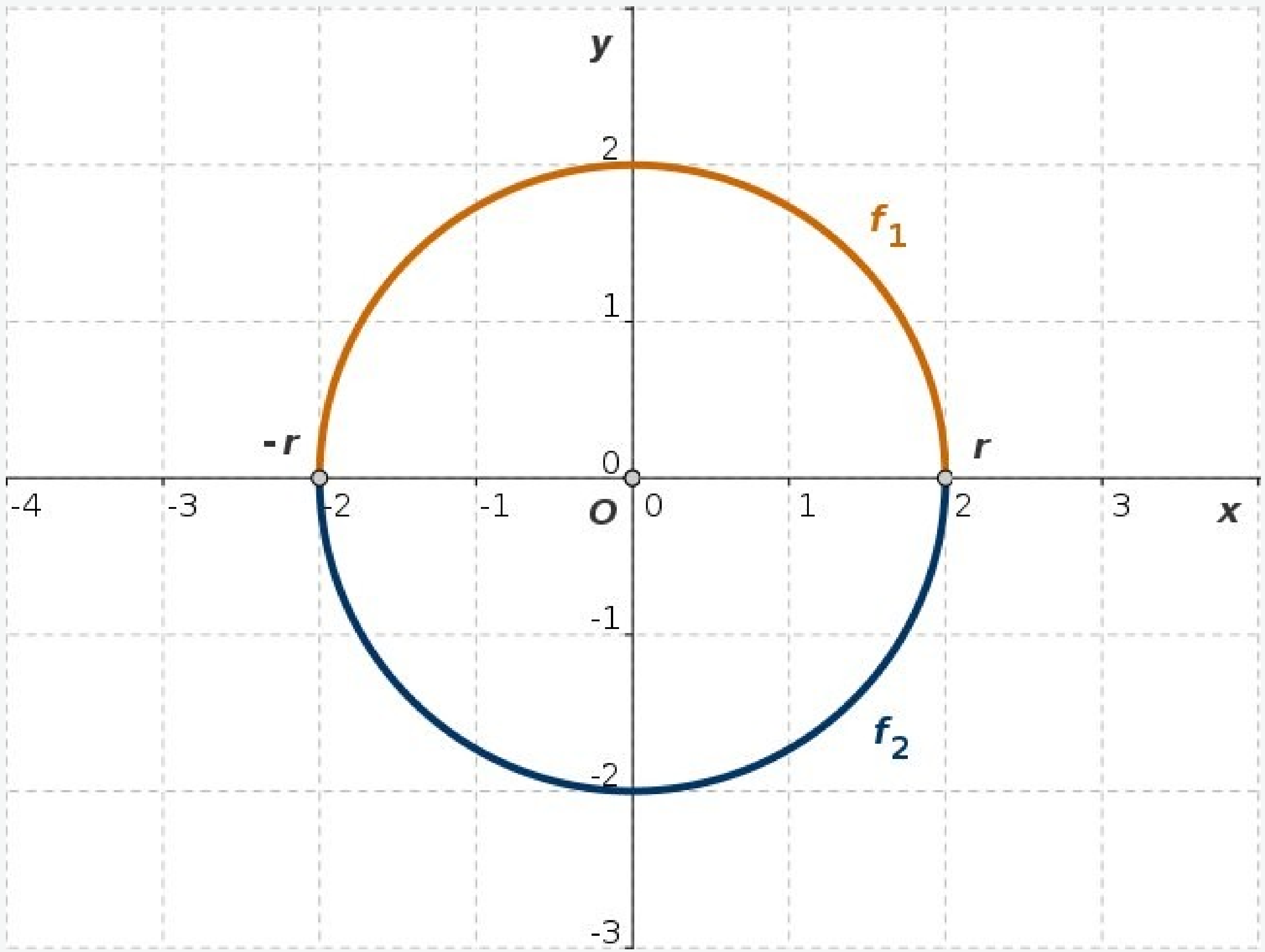


Abb. 1-2: Kreis mit Mittelpunkt O (0, 0) und Radius r = 2

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad y^2 = r^2 - x^2, \qquad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, \qquad r = 2$$

$$f_1(x) = \sqrt{4 - x^2}, \qquad f_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

Die Kreisfläche mit dem Radius *2* ist in Polarkoordinaten:

$$A = \{ (r, \varphi) \mid 0 \leqslant r \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \}$$

Dann erhält man im Integral über dem Bereich A konstante Integrationsgrenzen!

$$\int_{x=-2}^{2} \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx \quad \overbrace{\rightarrow}^{?} \quad \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} g(r, \varphi)\, dr\, d\varphi$$

Substitutionsregel für Doppelintegrale:

Ist $f(x, y)$ eine stetige Funktion in kartesischen Koordinaten und (u, v) ein anderes Koordinatensystem mit den Transformationsgleichungen

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v)$$

Dann gilt

$$\int_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\tilde{A}} f(x(u, v),\ y(u, v))\ |D|\ du\, dv$$

wenn $\tilde{A}$ die Beschreibung des Gebiets im (u, v)-Koordinatensystem und D die Jacobi-Determinante ist:

$$D = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Bestimmen Sie Jacobi-Determinante in folgenden Koordinatensystemen

Aufgabe 1: $(x\,,\ y) \ \rightarrow \ (u\,,\ v)$

$$x = u\ \cos^3 v\,, \qquad y = u\ \sin^3 v$$

Aufgabe 2: $(x\,,\ y\,,\ z) \ \rightarrow \ (u\,,\ v\,,\ w)$

$$x = 5\,v$$

$$y = 4\,u^2 - 2\sin\,(v\,w)$$

$$z = v\,w$$

Aufgabe 3: $(x\,,\ y) \ \rightarrow \ (r\,,\ \varphi)$

$$x = r\ \cos\varphi\,, \qquad y = r\ \sin\varphi$$

Aufgabe 4: $(x\,,\ y) \ \rightarrow \ (u\,,\ v)$

$$x = \frac{1}{2}\,(u + v)\,, \qquad y = \frac{1}{2}\,(u - v)$$

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie Jacobi-Determinante für Zylinderkoordinaten

$$x = r\ \cos\varphi\,, \qquad y = r\ \sin\varphi\,, \qquad z = z$$

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie Jacobi-Determinante für Kugelkoordinaten

$$x = r\ \cos\varphi\ \sin\theta\,, \qquad y = r\ \sin\varphi\ \sin\theta\,, \qquad z = r\ \cos\theta$$

$$x = u \cos^3 v , \qquad y = u \sin^3 v$$

$$D = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos^3 v & -3u \cos^2 v \sin v \\ \sin^3 v & 3u \sin^2 v \cos v \end{vmatrix} = 3u \sin^2 v \cos^2 v$$

Parametergleichung der Astroide: $x = a \cos^3 t , \quad y = a \sin^3 t$

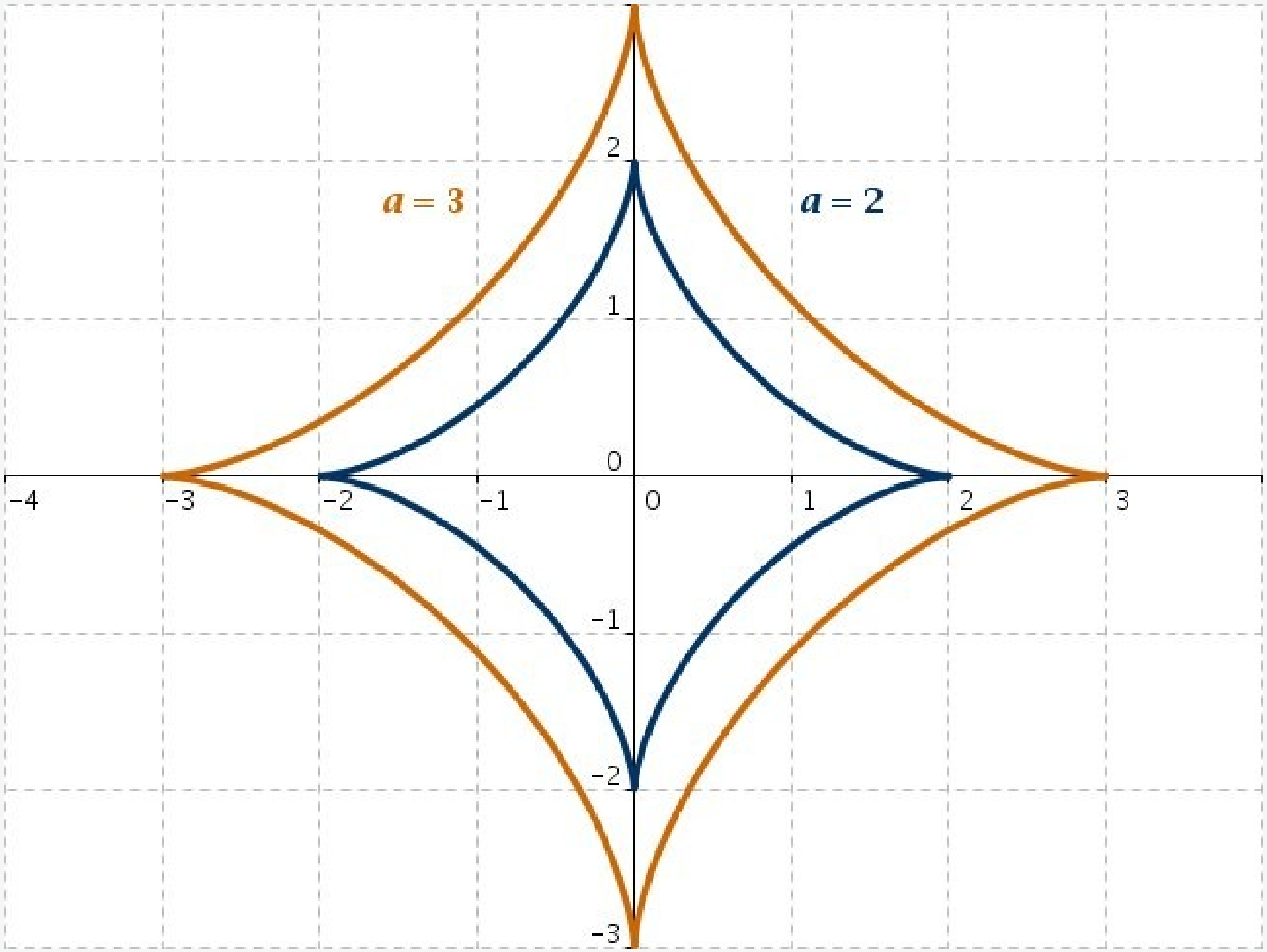


Abb. 2-1: Graphische Darstellung der Astroide für a = 2 (blau) und a = 3 (rot)

$$x = a \cos^3 t\,, \qquad y = a \sin^3 t$$

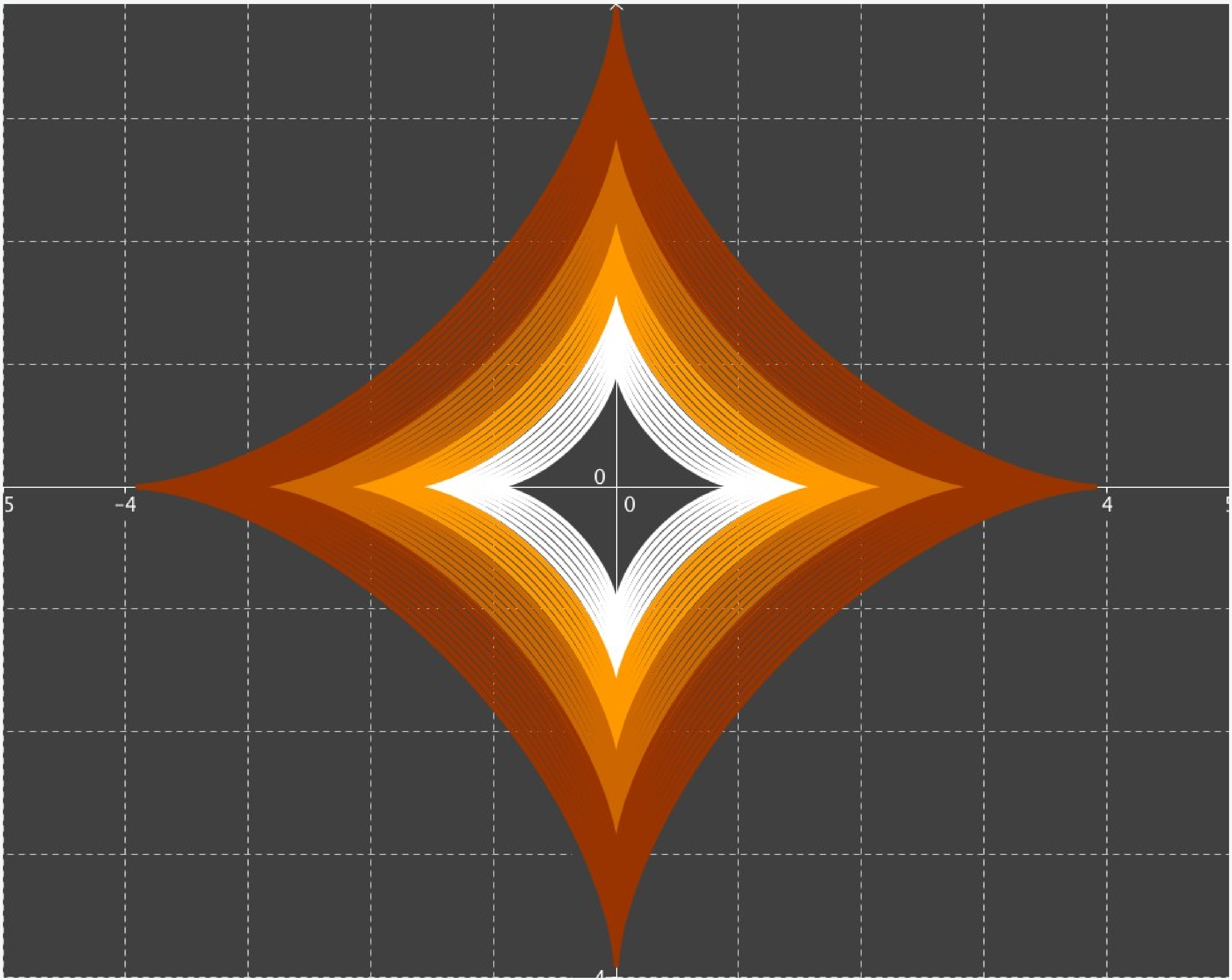


Abb. 2-2: Die Darstellung einer Astroide

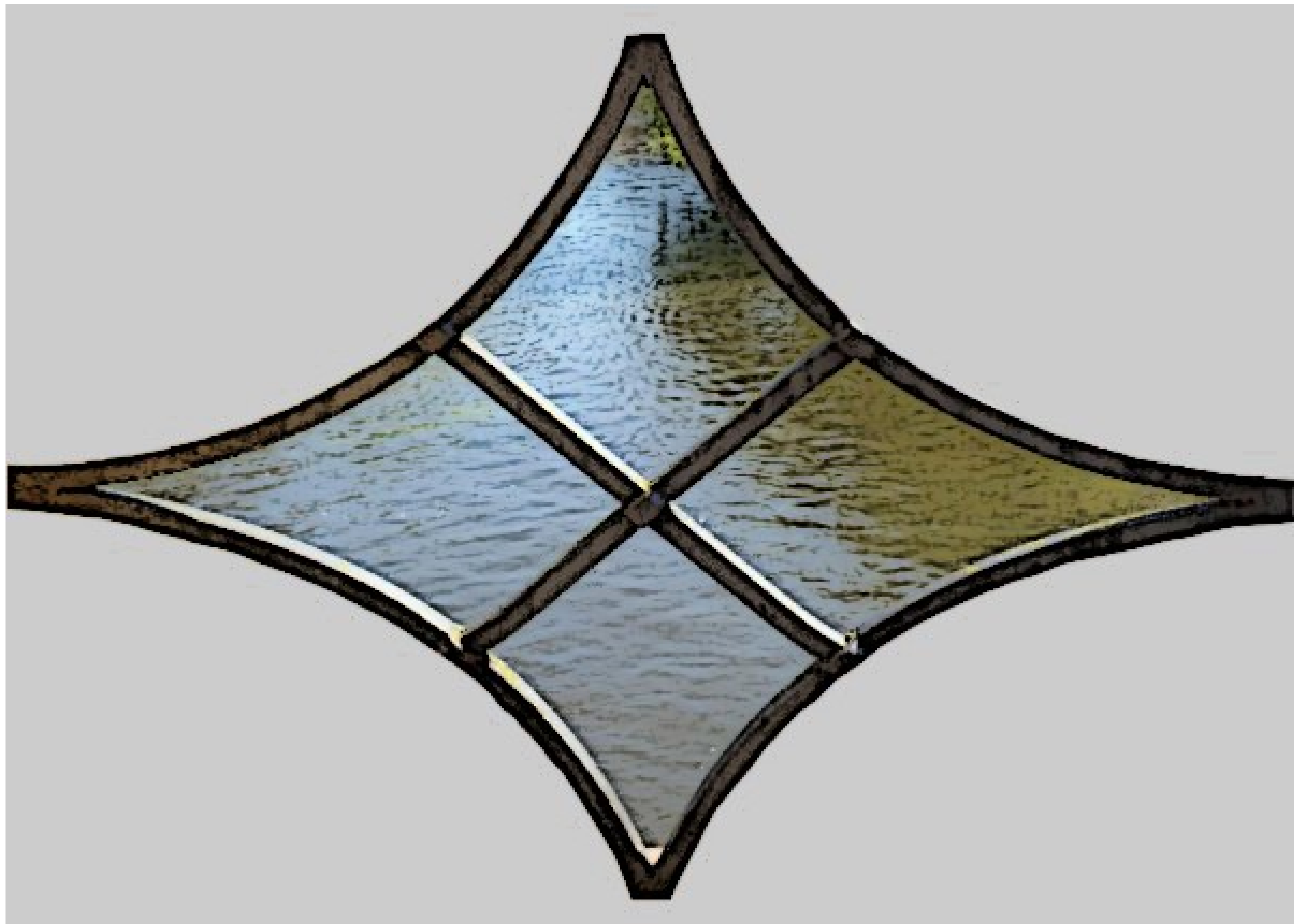


Abb. 2-3: Die Darstellung einer Astroide

$$x = 5\,v\,, \qquad y = 4\,u^2 - 2\sin\,(v\,w)\,, \qquad z = v\,w$$

$$D = \frac{D\,(x\,,\,y\,,\,z)}{D\,(u\,,\,v\,,\,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\,x}{\partial\,u} & \dfrac{\partial\,x}{\partial\,v} & \dfrac{\partial\,x}{\partial\,w} \\ \dfrac{\partial\,y}{\partial\,u} & \dfrac{\partial\,y}{\partial\,v} & \dfrac{\partial\,y}{\partial\,w} \\ \dfrac{\partial\,z}{\partial\,u} & \dfrac{\partial\,z}{\partial\,v} & \dfrac{\partial\,z}{\partial\,w} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 8\,u & -2\,w\;\cos\,(v\;w) & -2\,v\;\cos\,(v\;w) \\ 0 & w & v \end{vmatrix} = -\,40\,u\,v$$

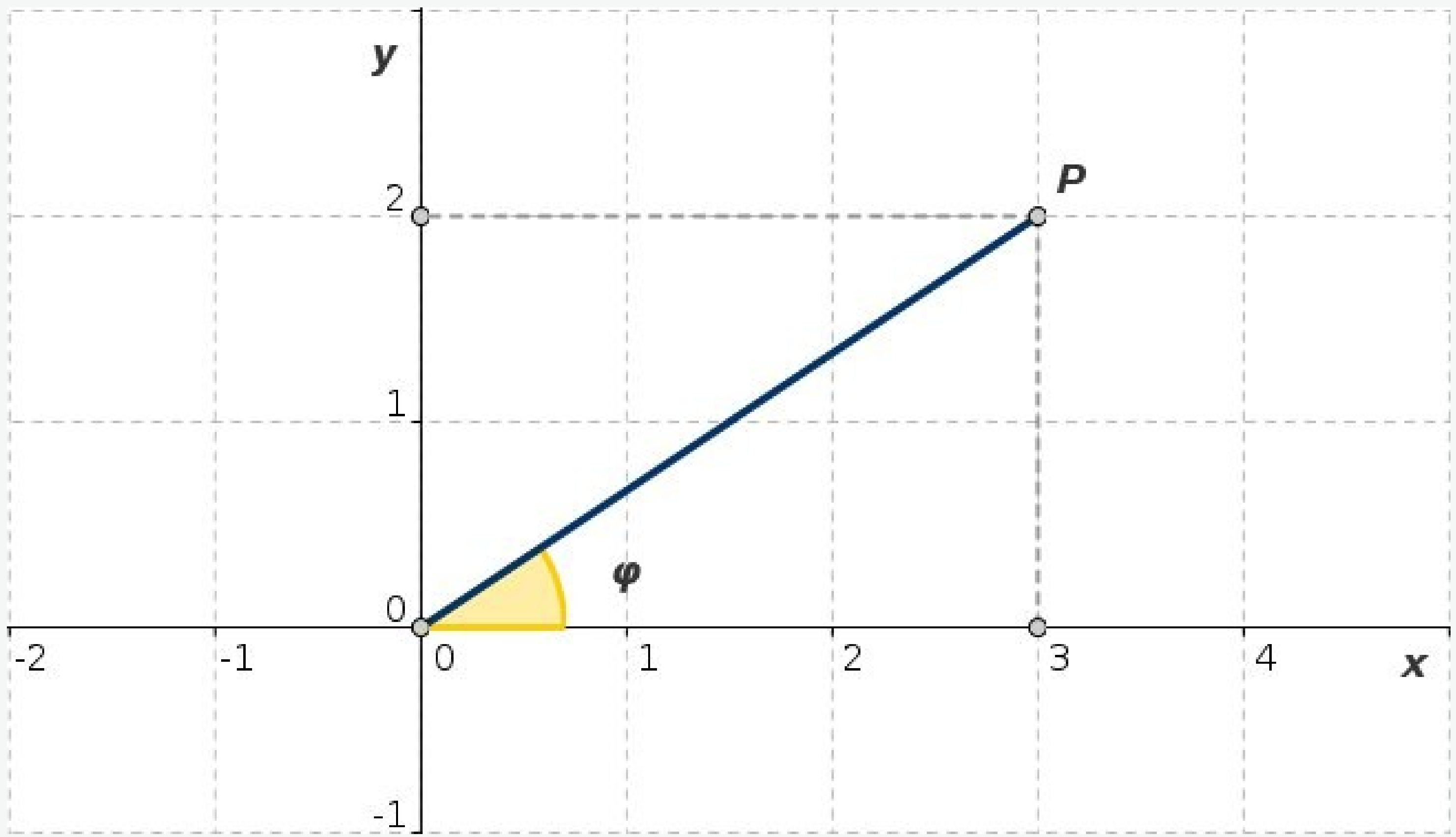


Abb. 3-1: Zur Umformung zwischen den kartesischen und Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi$$

$$r \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

Die Jacobi-Determinante:

$$D = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Das Flächenelement in Polarkoordinaten: $dA = r\, dr\; d\varphi$

$$\int_A f(x, y)\; dA = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\; r\, dr\; d\varphi$$

Doppelintegral in Polarkoordinaten: Lösung 3

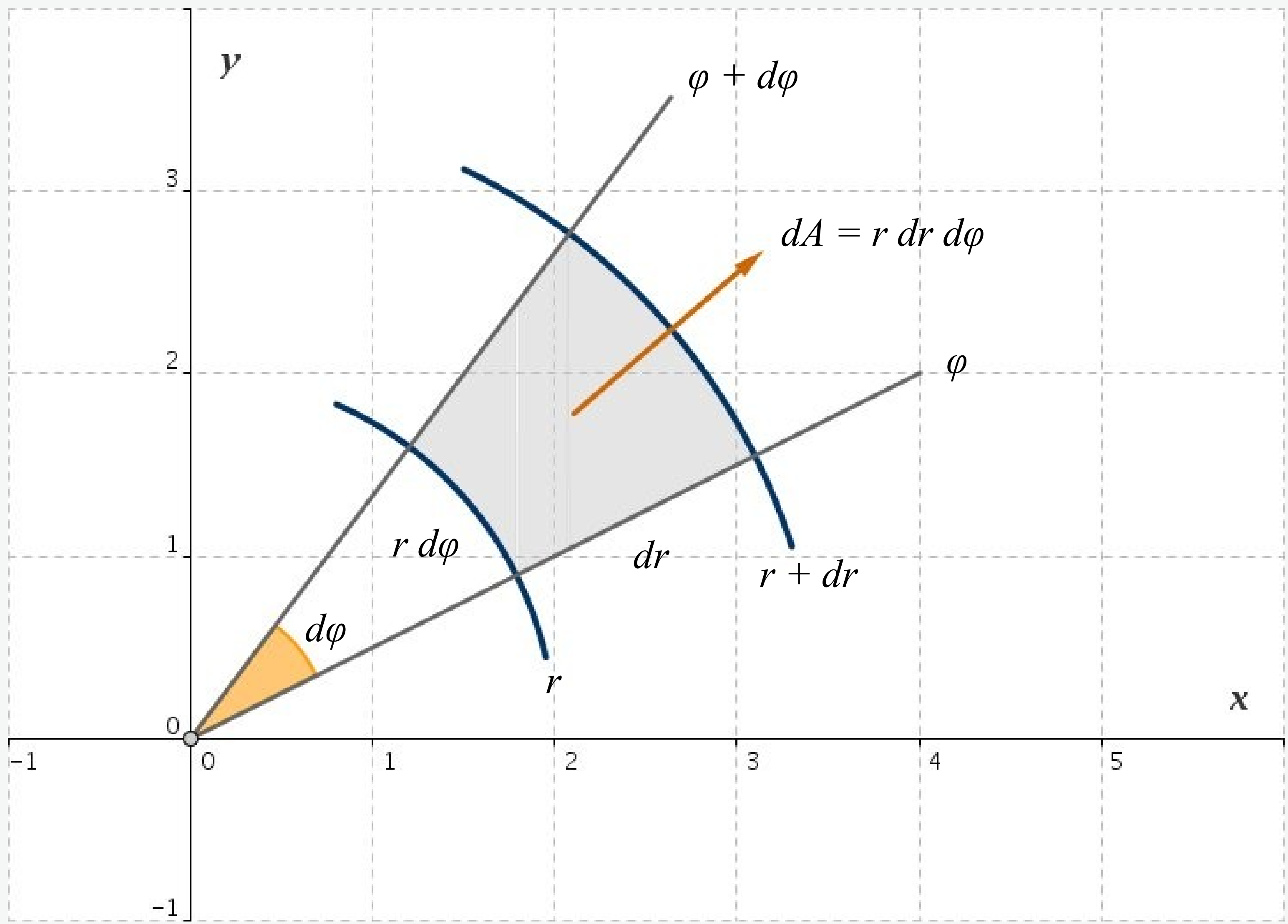


Abb. 3-2: Flächenelement in Polarkoordinaten

$$x = \frac{1}{2}\,(u + v), \qquad y = \frac{1}{2}\,(u - v)$$

$$D = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \qquad z = z$$

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$dV = dx\, dy\, dz = |\,D\,|\; dr\, d\varphi\, dz = r\, dr\, d\varphi\, dz$$

$$x = r\ \cos\varphi\ \sin\theta\,, \qquad y = r\ \sin\varphi\ \sin\theta\,, \qquad z = r\ \cos\theta$$

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi \sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = -r^2\ \sin\theta$$

$$dV = dx\, dy\, dz = |D|\ dr\, d\theta\, d\varphi = r^2\ \sin\theta\ dr\, d\theta\, d\varphi$$