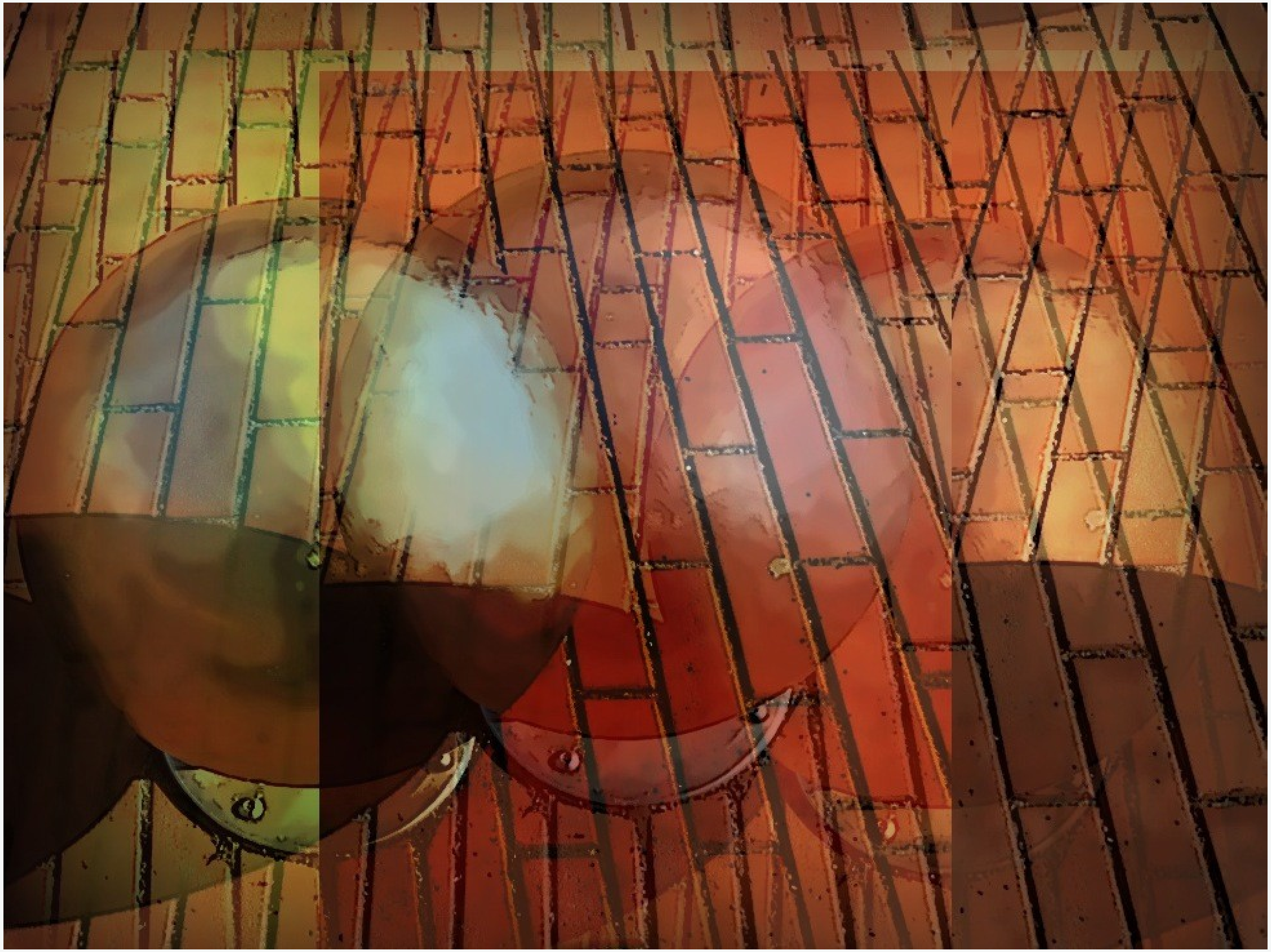
Kugelkoordinaten



1-E2

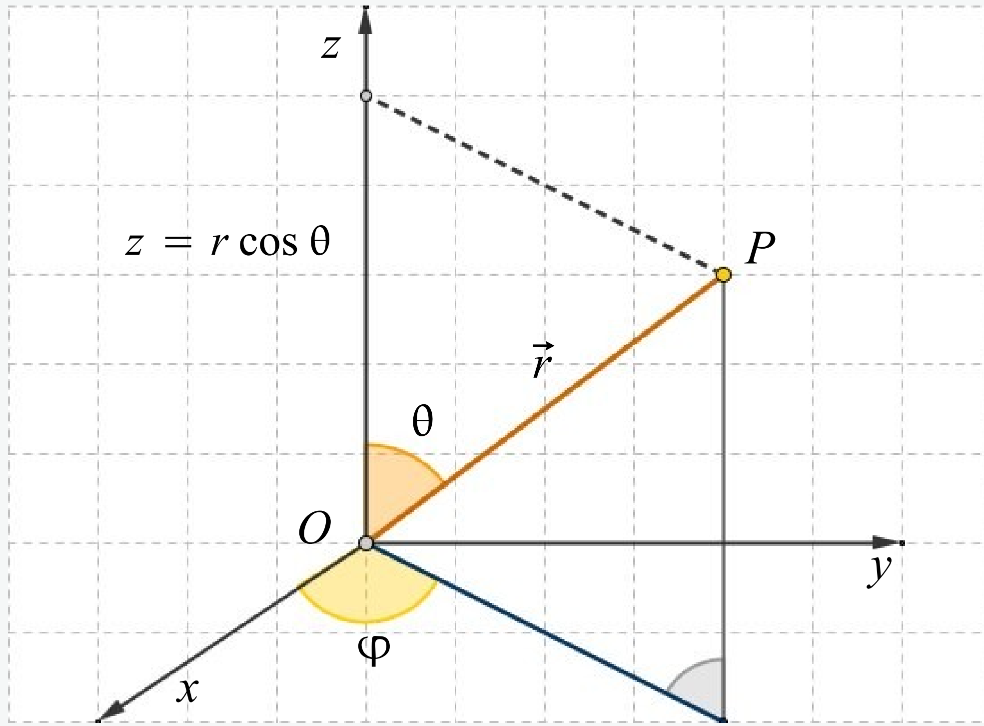


Abb. 1: Der Punkt P im Kugelkoordinatensystem

Die Kugelkoordinaten bestehen aus:

- der Länge r des Radiusvektors
- dem Winkel θ zwischen der z-Achse und dem Vektor $\boldsymbol{r}$
- dem Winkel φ zwischen der x-Achse und der Projektion von $\boldsymbol{r}$ auf die x,y-Ebene.

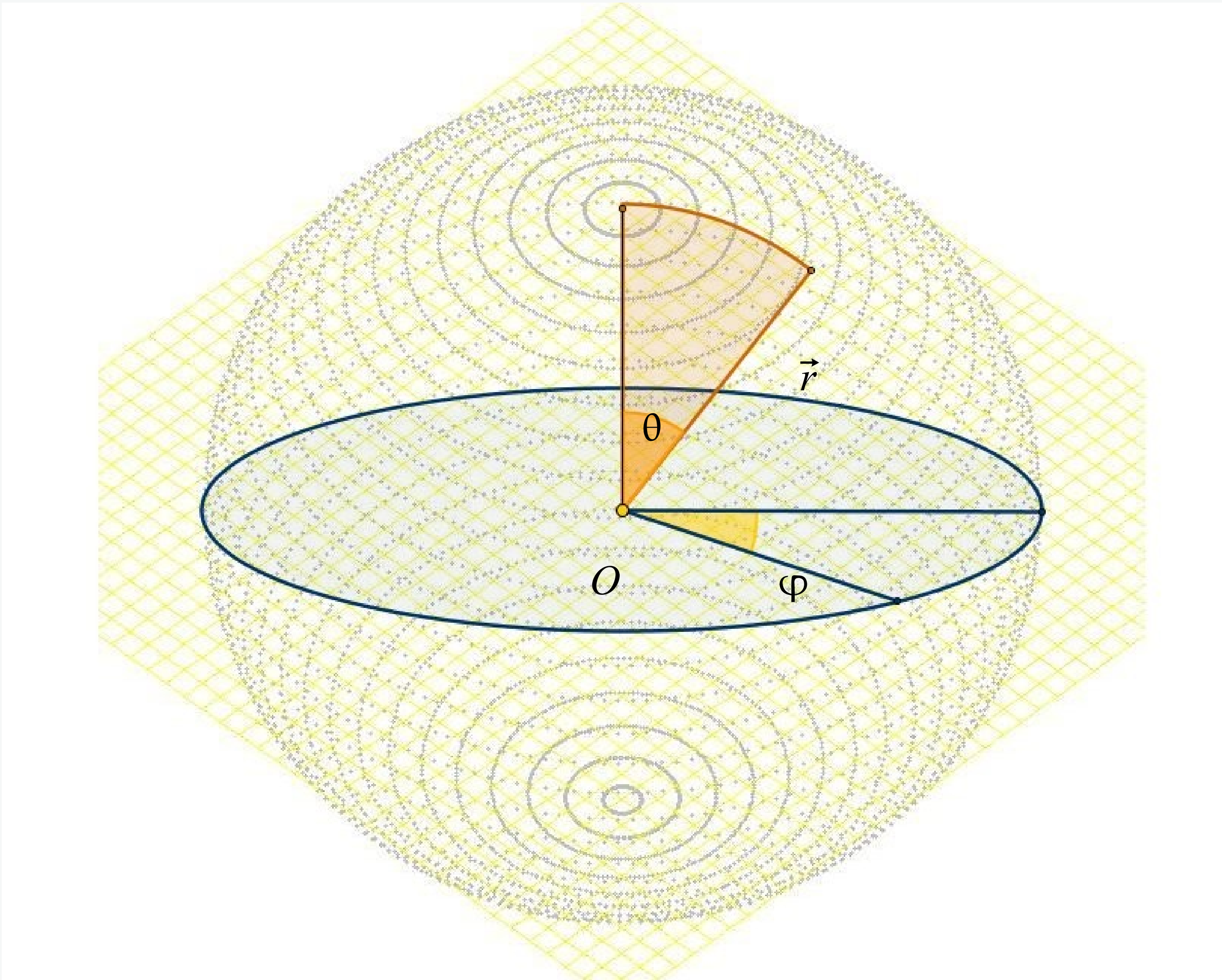


Abb. 2: Kugelkoordinatensystem

Die Koordinatenflächen dieses Systems sind:

- die Kugeln mit dem Radius $r = const$
- die Kegel mit $\theta = const$ mit der Spitze im Koordinatenursprung und der z-Achse als Achse sowie
- die von der z-Achse ausgehenden Halbebenen mit $\varphi = const$.

Die Transformationgleichungen:

$$x = r\ \cos\varphi\ \sin\theta$$

$$y = r\ \sin\varphi\ \sin\theta$$

$$z = r\ \cos\theta$$

Die Jacobi-Determinante

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \qquad y = r\sin\varphi\sin\theta, \qquad z = r\cos\theta$$

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = -r^2\sin\theta$$

$$dV = |D|\, dr\, d\theta\, d\varphi = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\int_V f(r, \varphi, \theta)\, dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \int_{r_1(\theta, \varphi)}^{r_2(\theta, \varphi)} f(r, \varphi, \theta)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

Kartesische Koordinaten $x, \; y, \; z$

$$dV = dx\; dy\; dz$$

Zylinderkoordinaten $r, \; \varphi, \; z$

$$dV = r\; d\varphi\; dr\; dz$$

Kugelkoordinaten $r, \; \varphi, \; \theta$

$$dV = r^2 \sin\theta\; dr\, d\theta\, d\varphi$$

Beliebige krummlinige Koordinate $u, \; v, \; w$

$$dV = |D|\; du\; dv\; dw$$

Aufgabe 1: Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius 1.

Aufgabe 2: Berechnen Sie das Integral $I = \iiint\limits_V \frac{dx\ dy\ dz}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Integriert wird über das Volumen V einer Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung O.

Aufgabe 3: Berechnen Sie das Integral

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ dx\ dy\ dz$$

Integriert wird über das Volumen V einer Kugel, die durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 25$$

gegeben ist.

Ein Volumen ist durch die folgendes Integral bestimmt:

$$V = \iiint\limits_V dV$$

Um das Volumen der Kugel zu bestimmen, müssen wir drei Integrationsgrenzen bestimmen:

$$x\,,\ y\,,\ z \quad \to \quad r\,,\ \varphi\,,\ \theta\,, \qquad dV = dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta \ dr\,d\,\theta\,d\,\varphi$$

$$0 \leqslant r \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

$$V = \iiint\limits_V dV = \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{1} r^2 \sin\theta \cdot dr\,d\,\theta\,d\,\phi = \frac{4}{3}\,\pi \ \text{(VE)}$$

Der Integrand ist an der Stelle *(0, 0, 0)* unstetig (Unendlichkeitsstelle). Man kann zeigen, dass das Integral existiert.

$$dV = dx\, dy\, dz = r^2 \sin\theta\ dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$0 \leqslant r \leqslant R, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$I = \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{r^{2/3}}\, r^2 \sin\theta\ d\theta\ d\varphi\ dr =$$

$$= \int_{r=0}^{R} r^{4/3}\, dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\ d\theta =$$

$$= \left[\frac{3}{7}\, r^{7/3}\right]_0^R \cdot \left[\,\varphi\,\right]_0^{2\pi} \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{12}{7}\,\pi\,\sqrt[3]{R^7}$$

$$0 \leqslant r \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta \; dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 25: \quad 0 \leqslant r \leqslant 5, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\; dx\; dy\; dz =$$

$$= \iiint\limits_V r\; r^2 \sin\theta \; dr\,d\theta\,d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{5} r^3 \sin\theta \; dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= 2\pi \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \; d\theta \int\limits_{r=0}^{5} r^3\,dr = -2\pi\,[\cos\theta]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^5 = 5^4\,\pi\,.$$

Aufgabe 4: Das Integral $\iiint\limits_V \frac{\cos\theta}{r^2}\, dV$

ist für einen Kegel zu berechnen, dessen Spitze sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet und der die z-Achse zur Symmetrieachse hat. Der Winkel in der Spitze beträgt 2α, die Höhe des Kegels ist h. Weiter gilt:

$$0 \leqslant r \leqslant \frac{h}{\cos\theta}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

Aufgabe 5: Berechnen Sie das Integral

$$I = \iiint\limits_V e^{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, dx\, dy\, dz$$

Der Integrationsbereich V ist das Innere einer Kugel mit dem Radius 1.

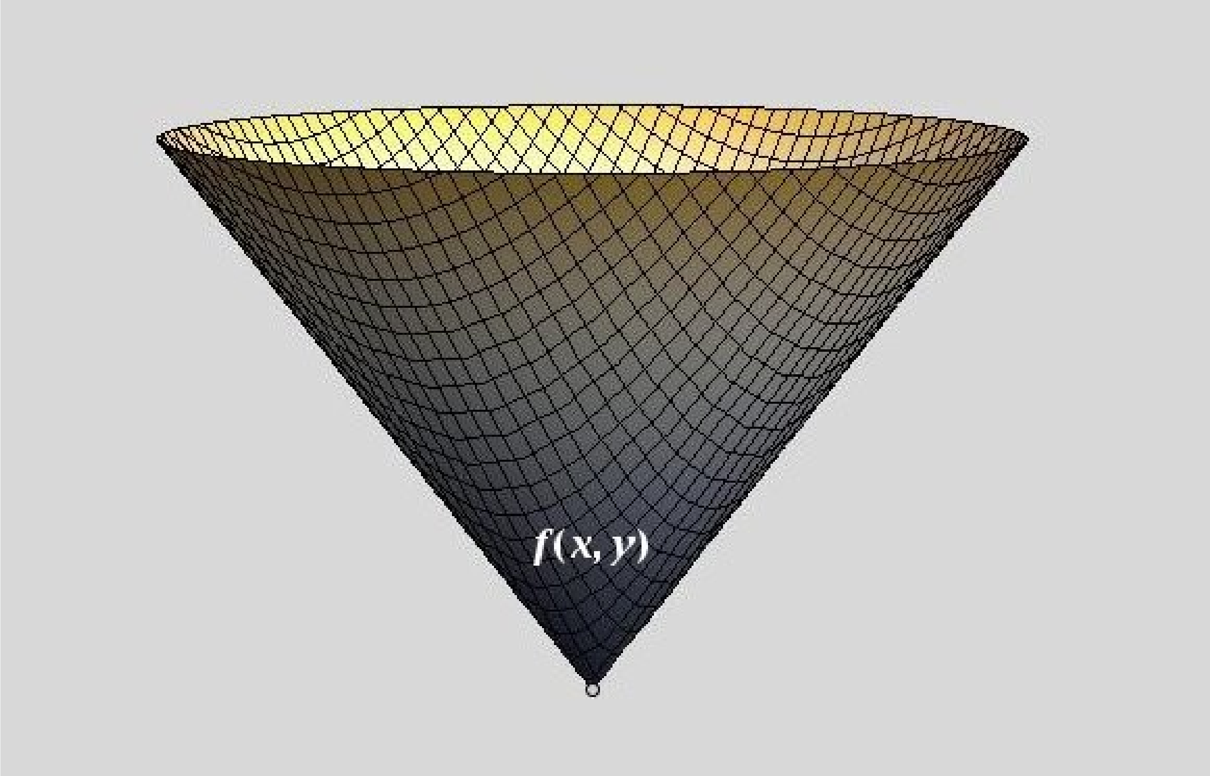


Abb. L4-1: Der Integrationsbereich V der Aufgabe 1

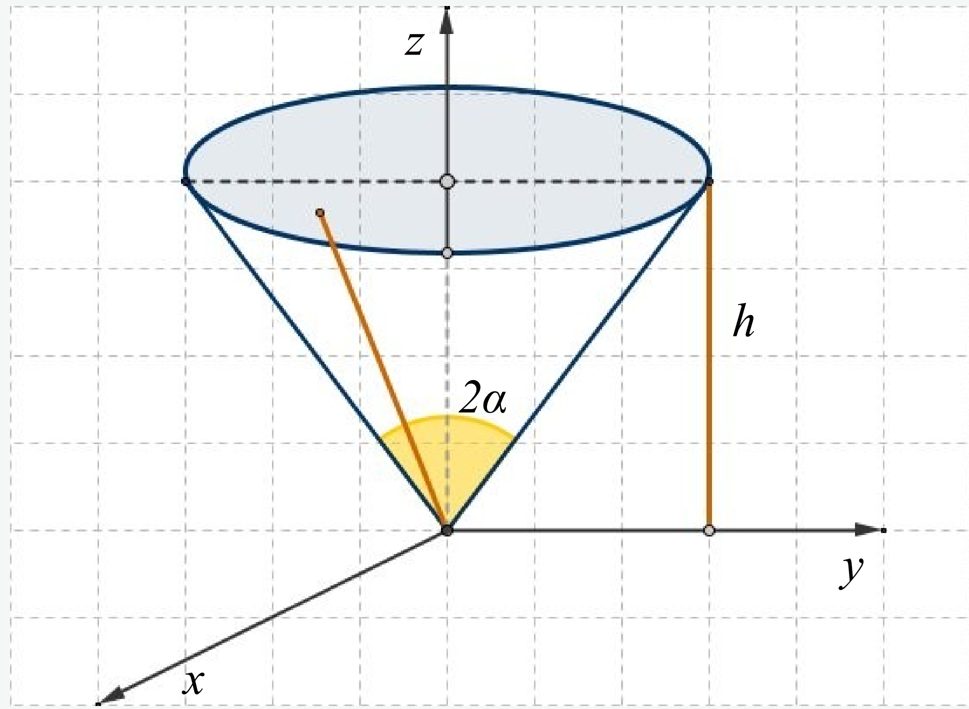


Abb. L4-2: Zur Illustration der Aufgabe 1

$$I = \int_V \frac{\cos\theta}{r^2}\, dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_{r=0}^{h/\cos\theta} \frac{\cos\theta}{r^2}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left\{ \int_{\theta=0}^{\alpha} \cos\theta \sin\theta \left[\int_{r=0}^{h/\cos\theta} dr \right] d\theta \right\} d\varphi = h \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta \right\} d\varphi =$$

$$= h \int_0^{2\pi} (1 - \cos\alpha)\, d\varphi = 2\pi h\, (1 - \cos\alpha)$$

Berechnung in Kugelkoordinaten: Lösung 5

$$0 \leqslant r \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta \; dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1: \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$I = \iiint\limits_V e^{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \, dx\; dy\; dz =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{1} e^{r^3} \; r^2 \sin\theta \; dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int\limits_{r=0}^{1} e^{r^3} \; r^2 \; dr =$$

$$= 2\pi \left(-\cos\pi + \cos 0\right) \int\limits_{r=0}^{1} e^{r^3} \; r^2 \; dr = \frac{4\pi}{3} \left(e - 1\right)$$