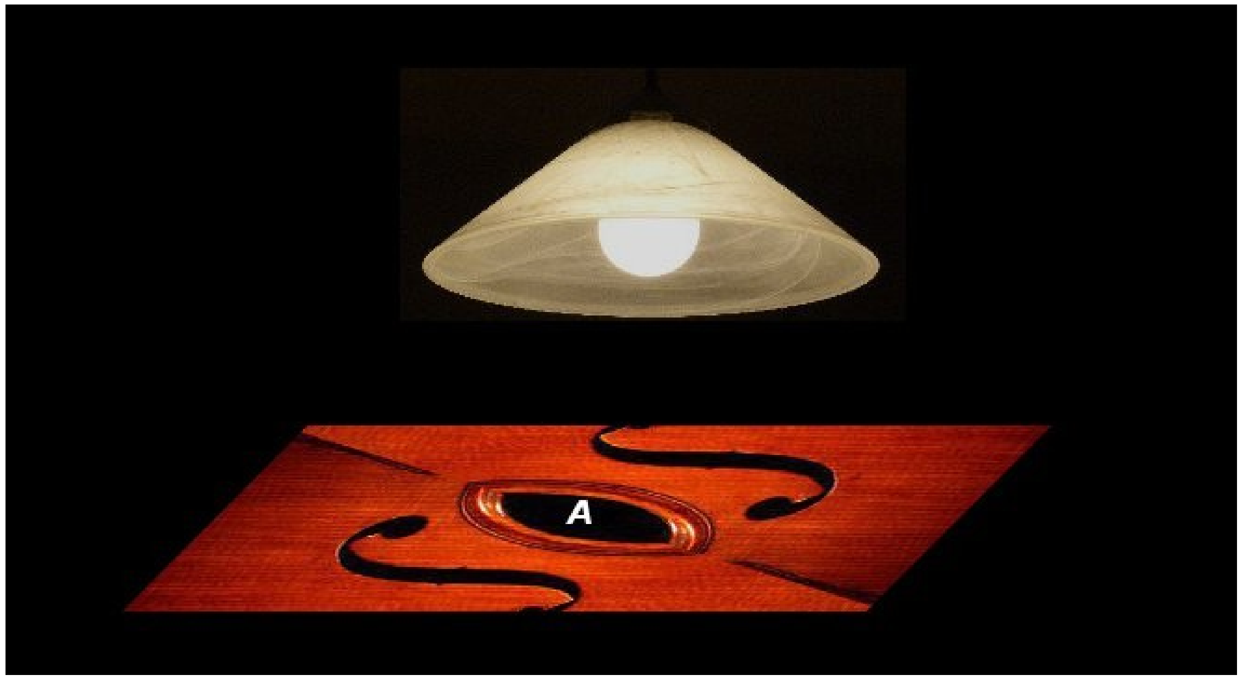


# *Berechnung eines Doppelintegrals in kartesischen Koordinaten*

## *Aufgaben, Teil 1: Konstante Integrationsgrenzen*

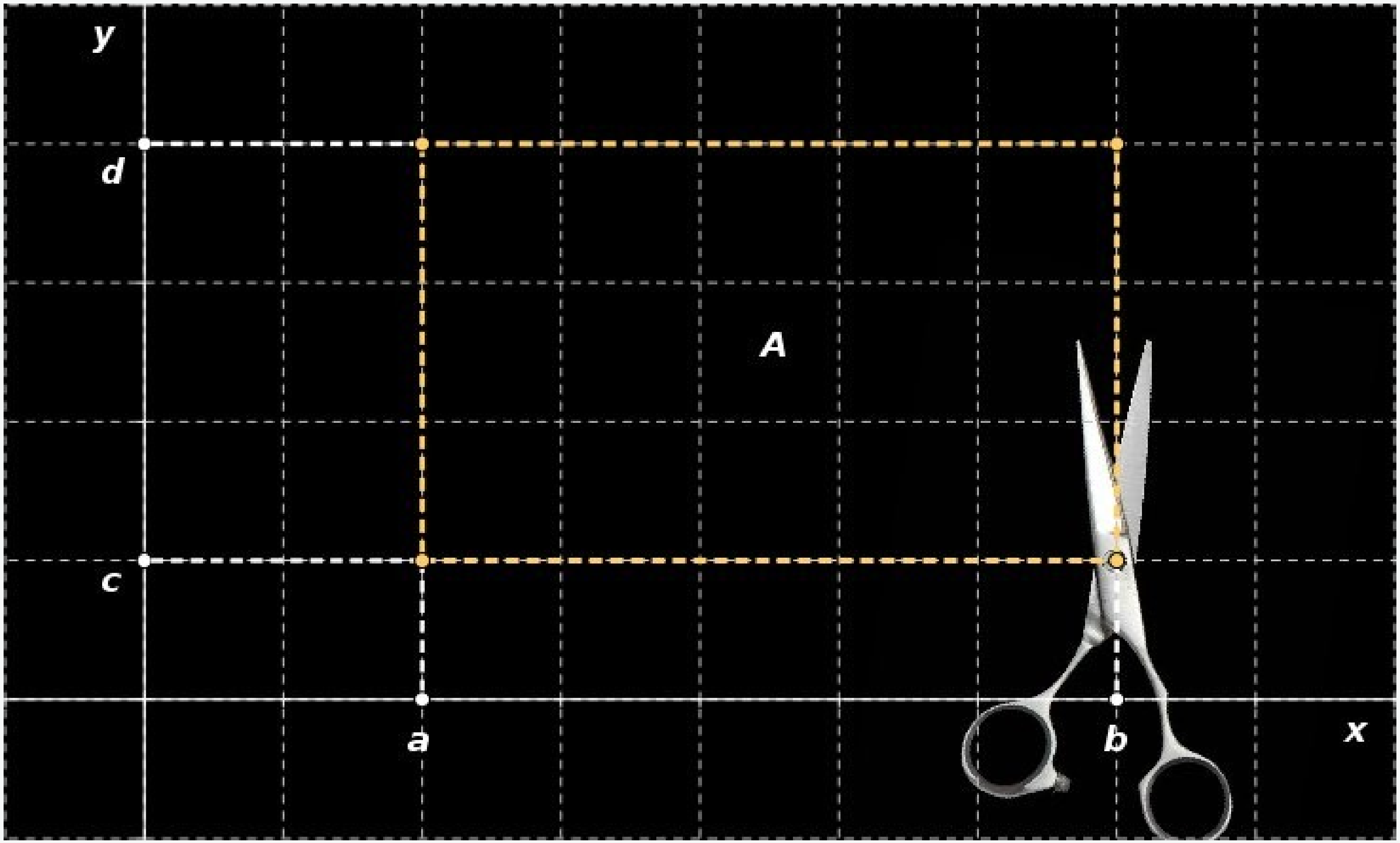


*Abb. 1: Die Darstellung des konstanten Integrationsbereiches A*

$$a \leqslant x \leqslant b\,, \qquad c \leqslant y \leqslant d$$

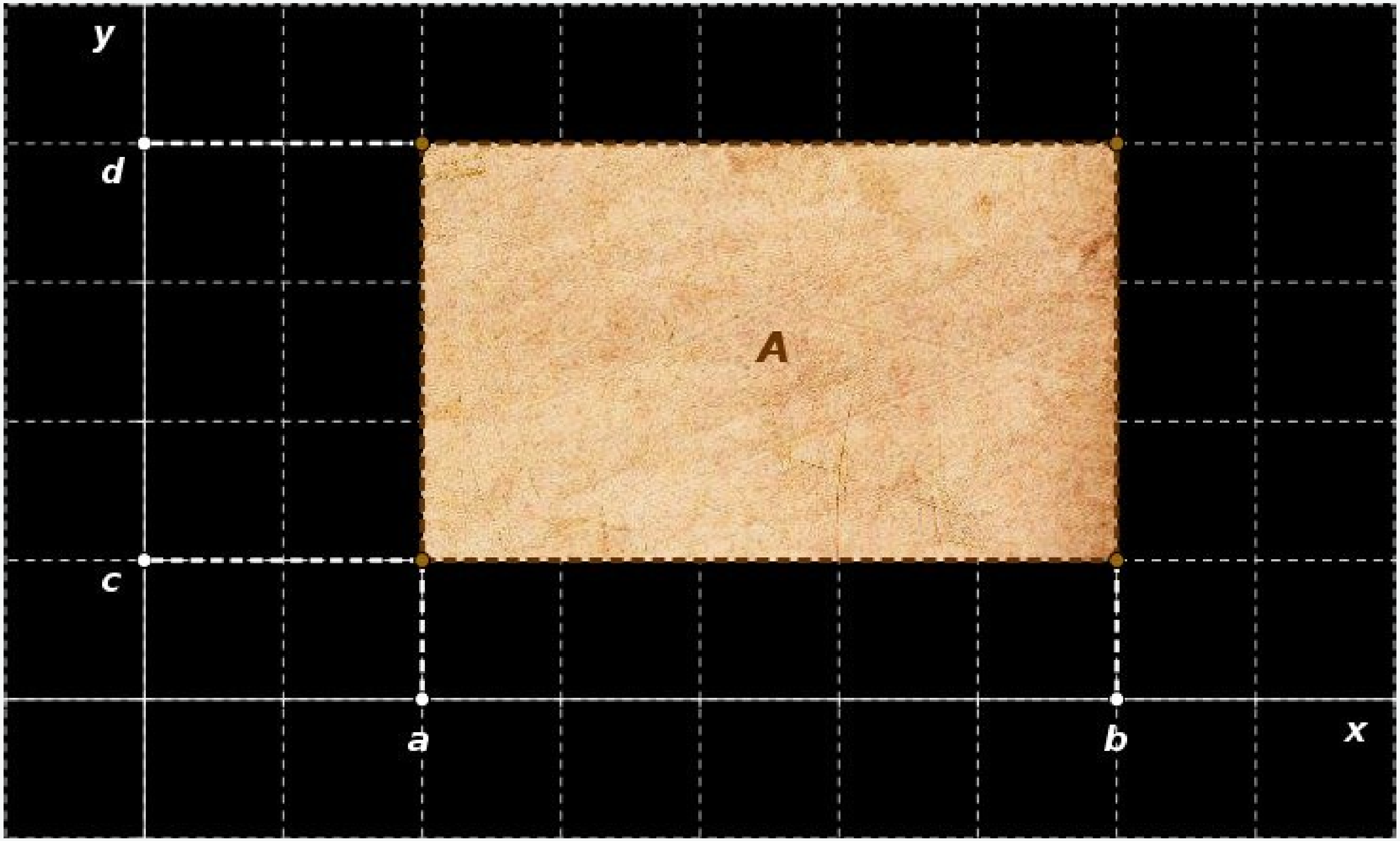


*Abb. 2: Die Darstellung des konstanten Integrationsbereiches A*

$$a \leqslant x \leqslant b \,, \qquad c \leqslant y \leqslant d$$

Die Reihenfolge der Integration ist nur dann vertauschbar, wenn sämtliche Integrationsgrenzen konstant sind

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{y=c}^{d} \int_{x=a}^{b} f(x, y)\, dx\, dy$$

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale:

Aufgabe 1: $I_1 = \int\limits_{x=0}^{3} \int\limits_{y=0}^{\pi} x^2 \sin y \; dy\, dx$

Aufgabe 2: $I_2 = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=c}^{d} (2\, x\, y + 3\, y^2) \; dy\, dx$

Aufgabe 3: $I_3 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{\pi/4} x \cos(2\, y) \; dy\, dx$

Aufgabe 4: $I_4 = \int\limits_{y=0}^{\pi/2} \int\limits_{x=0}^{\pi/2} \sin(x + y) \; dx\, dy$

Aufgabe 5: $I_5 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2} \int\limits_{y=0}^{\pi/2} \sin(2\, x) \cdot \cos(3\, y) \; dy\, dx$

# *Konstante Integrationsgrenzen: Lösung 1*

$$I_1 = \int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{\pi} x^2 \sin y \; dy \, dx =$$

$$= \underbrace{\left[ \int_{x=0}^{3} x^2 \; dx \right]}_{\textit{Integral 1}} \cdot \underbrace{\left[ \int_{y=0}^{\pi} \sin y \;\; dy \right]}_{\textit{Integral 2}} = \int_{x=0}^{3} x^2 \; dx \cdot \left[ -\cos y \right]_0^{\pi} =$$

$$= \int_{x=0}^{3} x^2 \; dx \cdot \left[ -\cos(\pi) + \cos(0) \right] = 2 \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 18$$

$$\boxed{I_1 = 18}$$

$$I_2 = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} (2\,x\,y + 3\,y^2)\; dy\, dx =$$

1. Innere Integration nach der Variablen $x$ :

$$= \int_c^d \left[ y\,(b^2 - a^2) + 3\,y^2 (b - a) \right] dy =$$

2. Innere Integration nach der Variablen $y$ :

$$= \int_a^b \left[ x\,(d^2 - c^2) + (d^3 - c^3) \right] dx$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\,(d^2 - c^2)\,(b^2 - a^2) + (d^3 - c^3)\,(b - a)$$

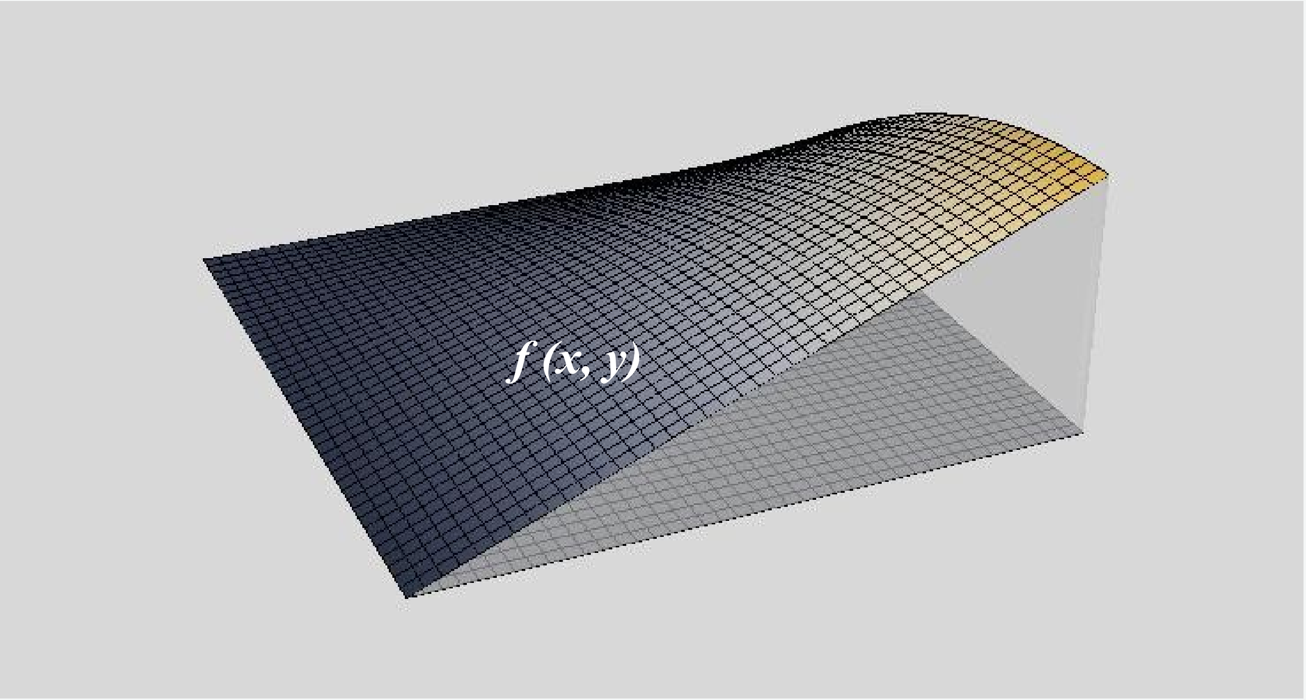


*Abb. L3: Graphische Darstellung der Funktion $f(x, y) = x \cos(2y)$ auf dem Bereich A*

$$I_3 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\pi/4} x \cos(2y)\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1} x \left[ \int_{y=0}^{\pi/4} \cos(2y)\, dy \right] dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1} x \left[ \frac{1}{2} \cdot \sin(2y) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} x\, dx = \frac{1}{4}$$

$$A \quad : 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4}$$

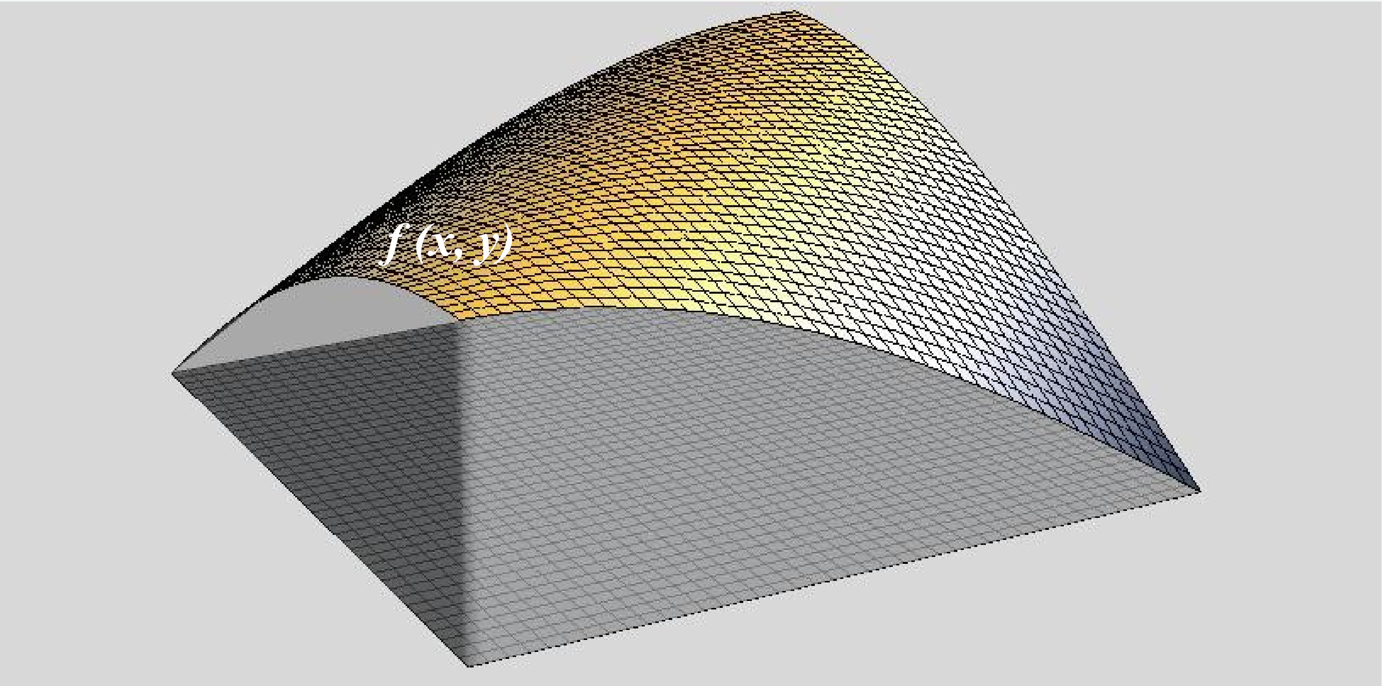


*Abb. L4-1: Graphische Darstellung der Funktion f (x, y) = sin (x + y) auf dem Bereich A*

$$I_4 = \int_{y=0}^{\pi/2} \int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x + y)\, dx\, dy = \int_{y=0}^{\pi/2} (\sin y + \cos y)\, dy = 2$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

$$A \quad : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

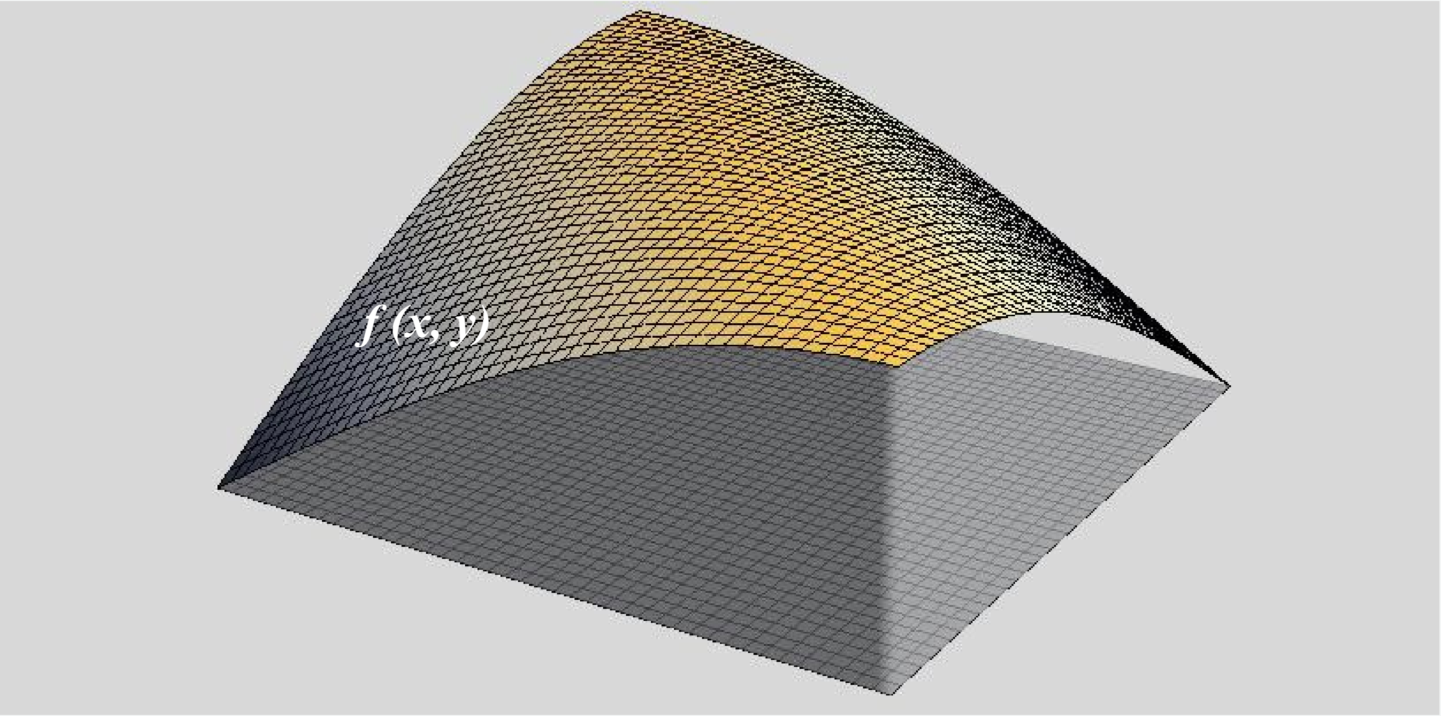


*Abb. L4-2: Graphische Darstellung der Funktion $f(x, y) = \sin(x + y)$ auf dem Bereich A*

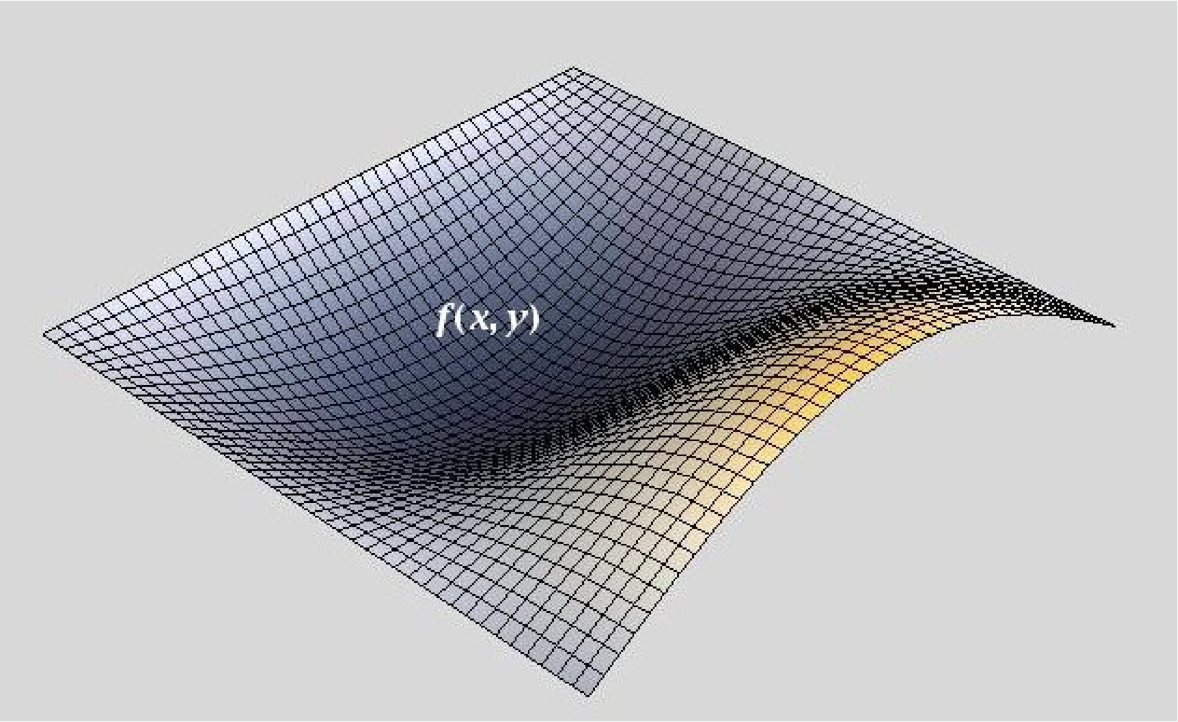


*Abb. L5-1: Graphische Darstellung der Funktion f (x, y) = sin (2 x) cos (3 y) auf dem Bereich A. Die Funktion hat positive und negative Funktionswerte, die Funktionfläche verläuft im Integrationsbereich über und unter der x,y-Ebene (z = 0)*

$$I_5 = \int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^{\pi/2} \sin(2x) \cdot \cos(3y)\ dy\, dx = -\frac{1}{3} \int_{x=0}^{\pi/2} \sin(2x)\ dx = -\frac{1}{3}$$

$$A \quad : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

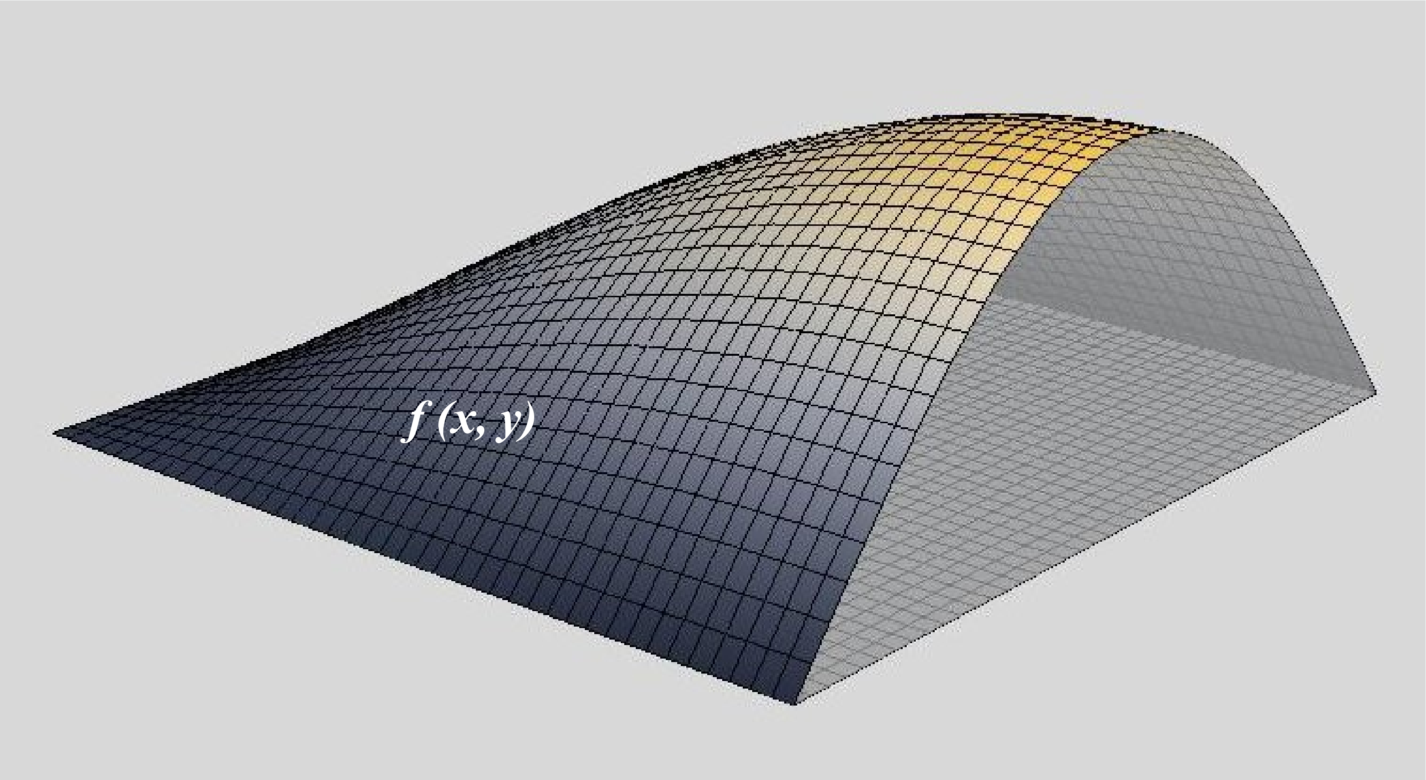


*Abb. L5-2: Graphische Darstellung der Funktion f (x, y) = sin (2 x) cos (3 y) auf einem Teil des Bereiches A, auf dem die Funktion positive Werte hat*

$$A \quad : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad A = A_1 + A_2$$

$$A_1 \quad : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{6}$$

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale:

Aufgabe 6: $$I_6 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} e^{x + 3y} \, dy \, dx$$

Aufgabe 7: $$I_7 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} y \, e^{x + 2} \, dy \, dx$$

Aufgabe 8: $$I_8 = \int_{x=0}^{2} \int_{y=1}^{3} \frac{x \, e^{x}}{y} \, dy \, dx$$

Aufgabe 9: $$I_9 = \int_{x=1}^{2} \int_{y=1}^{2} \left( \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) dy \, dx$$

Aufgabe 10: $$I_{10} = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \frac{x}{1 + x\,y} \, dy \, dx$$

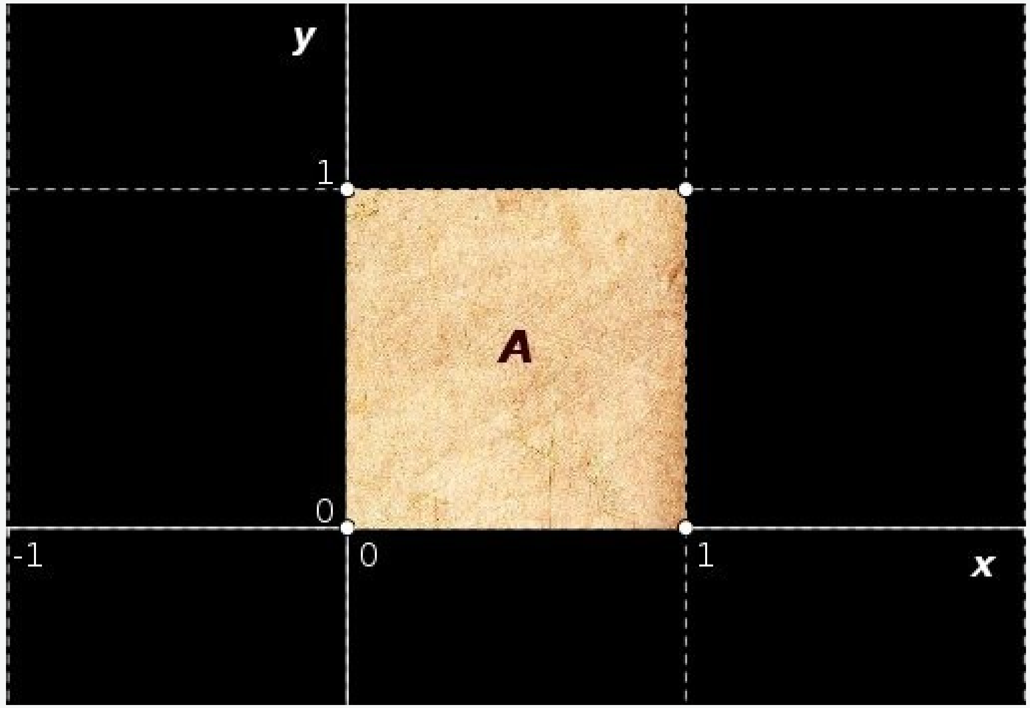


*Abb. L6: Integrationsbereich der Aufgabe*

$$I_6 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} e^{x+3y}\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1} e^{x}\, dx \int_{y=0}^{1} e^{3y}\, dy =$$

$$= \frac{1}{3} \left( e^{x} \right)\Big|_0^1 \cdot \left( e^{3y} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \left( e - e^{0} \right) \cdot \left( e^{3} - e^{0} \right) = \frac{1}{3} \left( e - 1 \right) \cdot \left( e^{3} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left( 1 - e - e^{3} + e^{4} \right) \simeq 10.93$$

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}\, e^{ax} \qquad (a \neq 0)$$

# Konstante Integrationsgrenzen: Lösungen 7-10

$$I_7 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} y\, e^{x+2}\, dy\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x+2}\, dx = \frac{1}{2} \left(e^3 - e^2\right) \simeq 6.35$$

$$I_8 = \int_{x=0}^{2} \int_{y=1}^{3} \frac{x\, e^{x}}{y}\, dy\, dx = \ln 3 \int_0^2 x\, e^{x}\, dx = \left(1 + e^2\right) \ln 3$$

$$I_9 = \int_{x=1}^{2} \int_{y=1}^{2} \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) dy\, dx = 0$$

$$I_{10} = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \frac{x}{1 + x\, y}\, dy\, dx = \int_0^1 \ln\left(1 + x\right) dx = 2 \ln 2 - 1 \simeq 0.39$$

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale:

Aufgabe 11: $I_{11} = \int\limits_{x=-1}^{1} \int\limits_{y=0}^{2} y\, e^{2x-1}\, dy\, dx$

Aufgabe 12: $I_{12} = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=-2}^{2} x^2\, e^{y-2}\, dy\, dx$

Aufgabe 13: $I_{13} = \int\limits_{x=0}^{3} \int\limits_{y=0}^{1} x\, y\, e^{x^2}\, dy\, dx$

Aufgabe 14: $I_{14} = \int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=1}^{3} \left( \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^3}{x^2} \right) dy\, dx$

Aufgabe 15: $I_{15} = \int\limits_{x=0}^{\pi/2} \int\limits_{y=0}^{\pi} y^2 \sin(3x)\, dy\, dx$

$$I_{11} = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=0}^{2} y\, e^{2x-1}\, dy\, dx = e - \frac{1}{e^3}$$

$$I_{12} = \int_{x=0}^{1} \int_{y=-2}^{2} x^2\, e^{y-2}\, dy\, dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\, e^4} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{e^4}\right)$$

$$I_{13} = \int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{1} x\, y\, e^{x^2}\, dy\, dx = \frac{1}{4}\left(e^9 - 1\right)$$

$$I_{14} = \int_{x=1}^{2} \int_{y=1}^{3} \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^3}{x^2}\right) dy\, dx = \frac{14}{9} - 10 = -\frac{76}{9} \simeq 8.44$$

$$I_{15} = \int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^{\pi} y^2 \sin(3x)\, dy\;\, dx = \frac{\pi^3}{9}$$