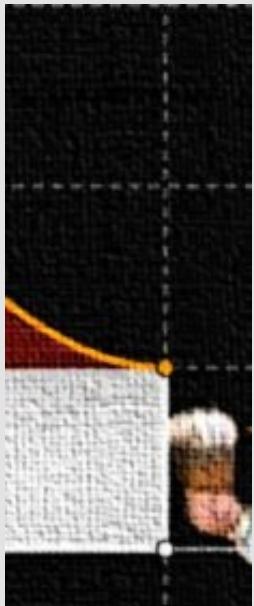


## *Doppelintegral in kartesischen Koordinaten*

*Aufgaben, Teil 2: Beliebige Integrationsgrenzen*



## *Integrationsgrenzen: Aufgaben 1-5*



Bestimmen Sie die Integrationsgrenzen für das folgende Doppelintegral

$$\iint_A f(x, y) dA$$

Es wird über Flächen integriert, die durch die folgenden Kurven oder andere Angaben begrenzt werden. Geben Sie jeweils zwei Möglichkeiten

Aufgabe 1:  $A : y = 0, \quad x = 1, \quad y = x$

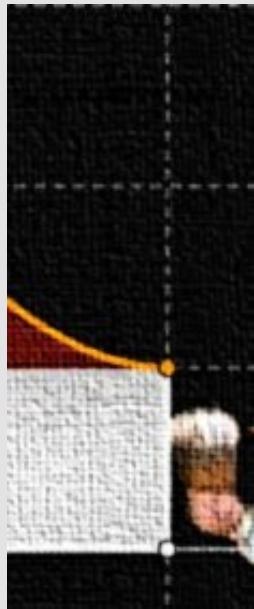
Aufgabe 2:  $A : (-1, 0), \quad (-1, 1), \quad (1, 1), \quad (2, 0)$

Aufgabe 3:  $A : (-1, 1), \quad (0, 0), \quad (1, 1)$

Aufgabe 4:  $A : y = \frac{x^2}{2}, \quad y = 2$

Aufgabe 5:  $A : y = \frac{x^2}{2}, \quad y = 3 + \frac{x}{2}$

## *Integrationsgrenzen: Aufgaben 6-8*



Aufgabe 6:  $A$  :  $x = y^2 - 2$ ,  $x = 2$

Aufgabe 7:  $A$  :  $x = y^2 - 4$ ,  $y = x - 2$

Aufgabe 8:  $A$  :  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x + y = 1$   
 $x, y \geq 0$

# Integrationsgrenzen: Lösung 1

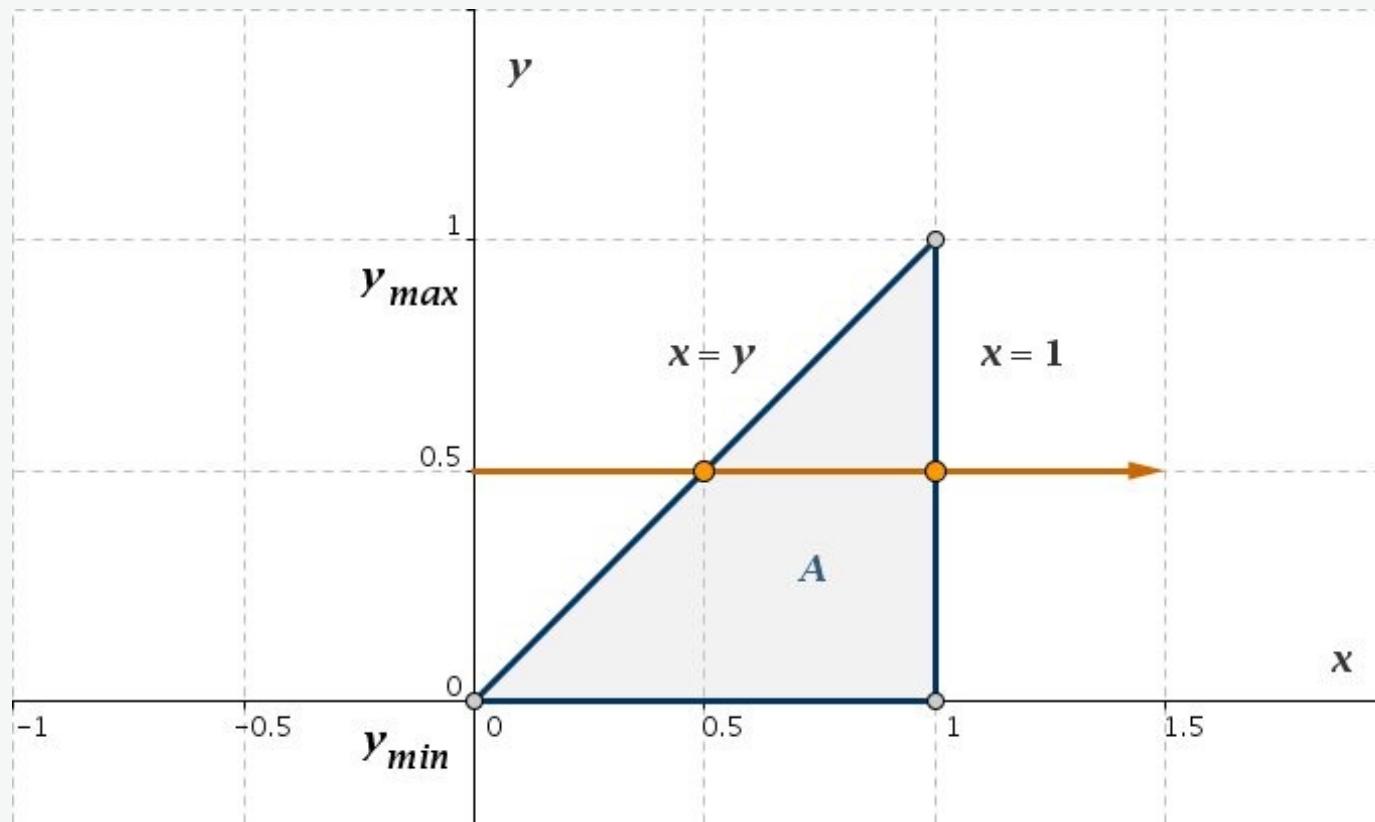


Abb. 1-1: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach  $x$ )

$$A : y = 0, \quad x = 1, \quad y = x$$

$$\iint_A f(x, y) \, dA = \int_{y=0}^1 \int_{x=y}^1 f(x, y) \, dx \, dy$$

# Integrationsgrenzen: Lösung 1

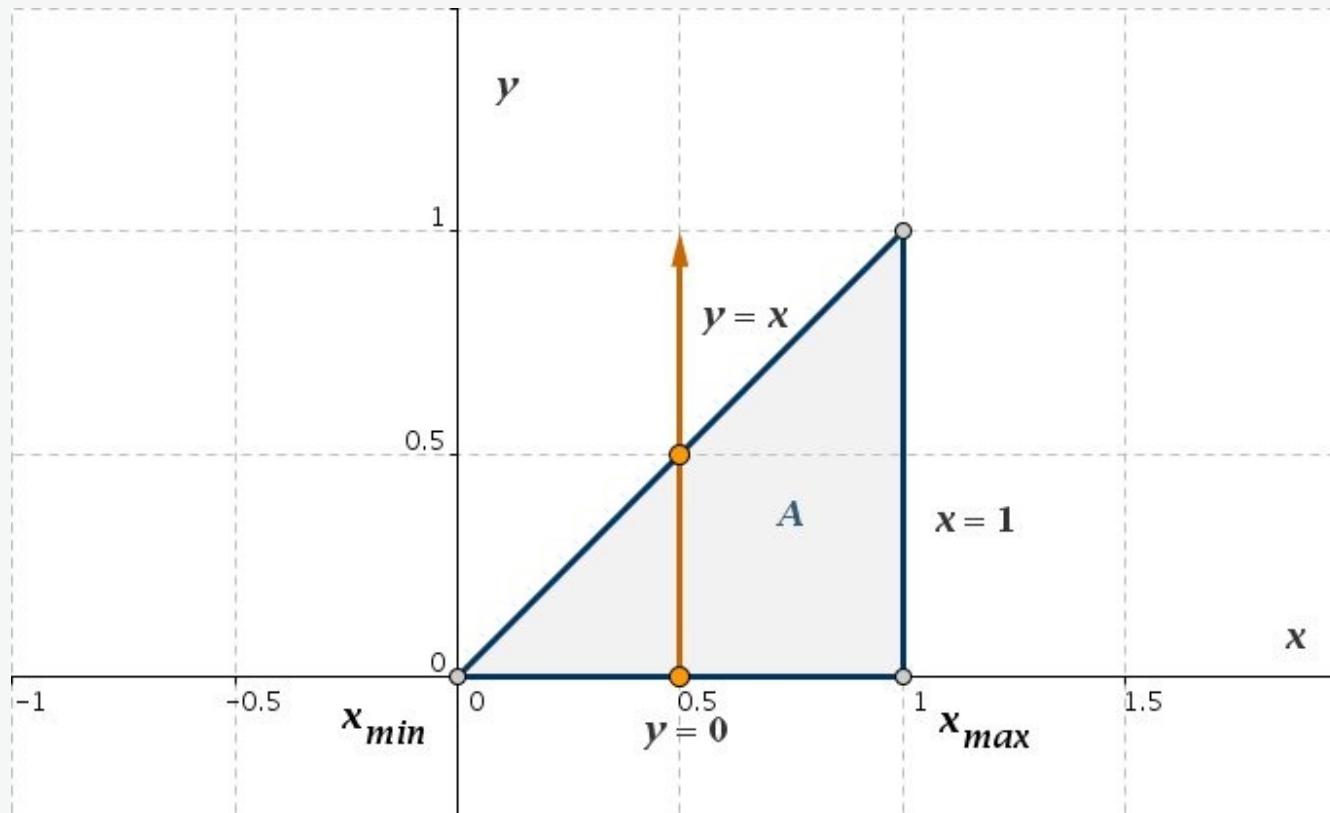


Abb. 1-2: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach  $y$ )

$$\iint_A f(x, y) \, dA = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x f(x, y) \, dy \, dx$$

## Integrationsgrenzen: Lösung 2

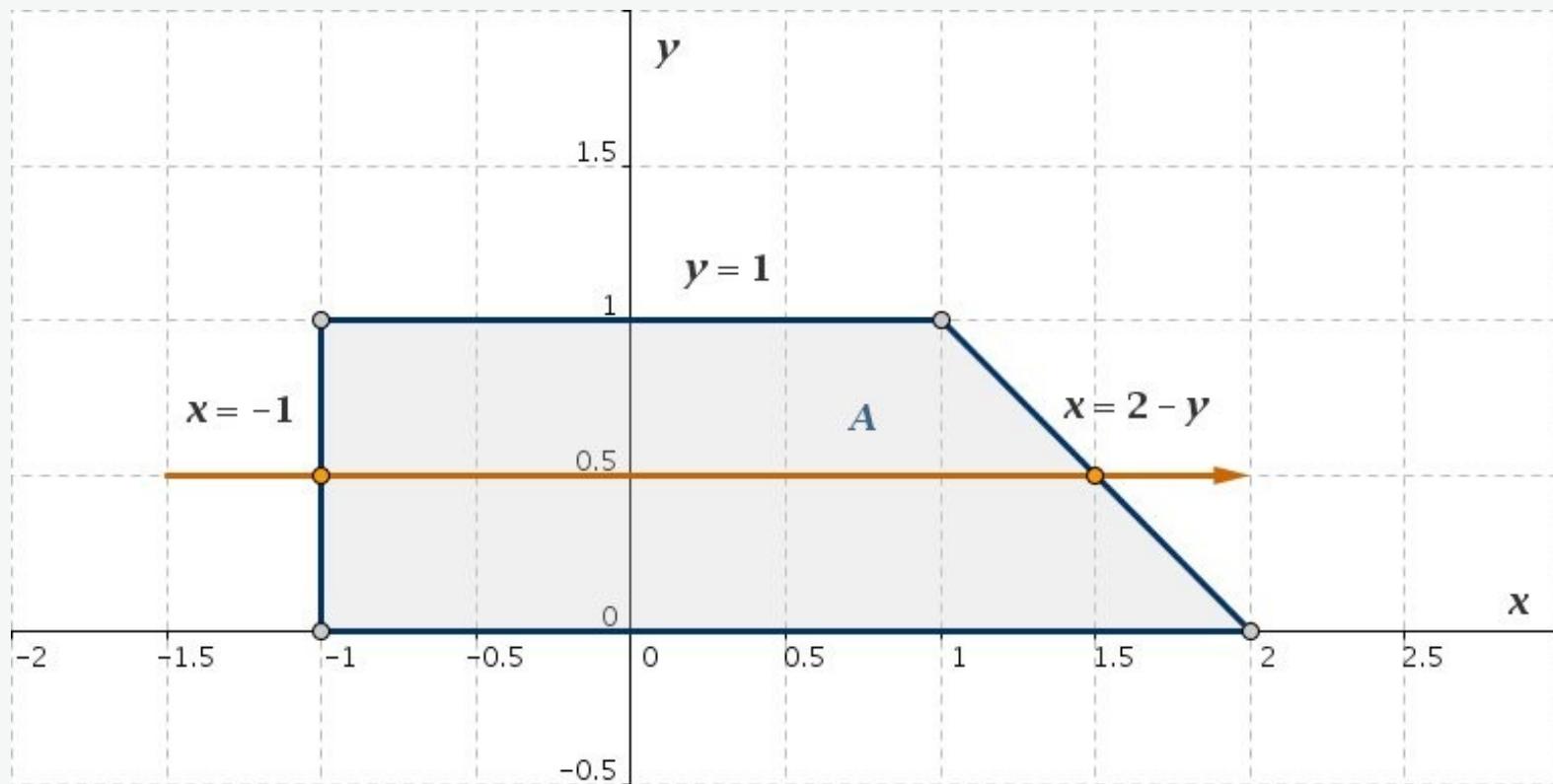


Abb. 2-1: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach  $x$ )

$$A : (-1, 0), \quad (-1, 1), \quad (1, 1), \quad (2, 0)$$

$$\iint_A f(x, y) \, dA = \int_{y=0}^1 \int_{x=-1}^{2-y} f(x, y) \, dx \, dy$$

## Integrationsgrenzen: Lösung 2

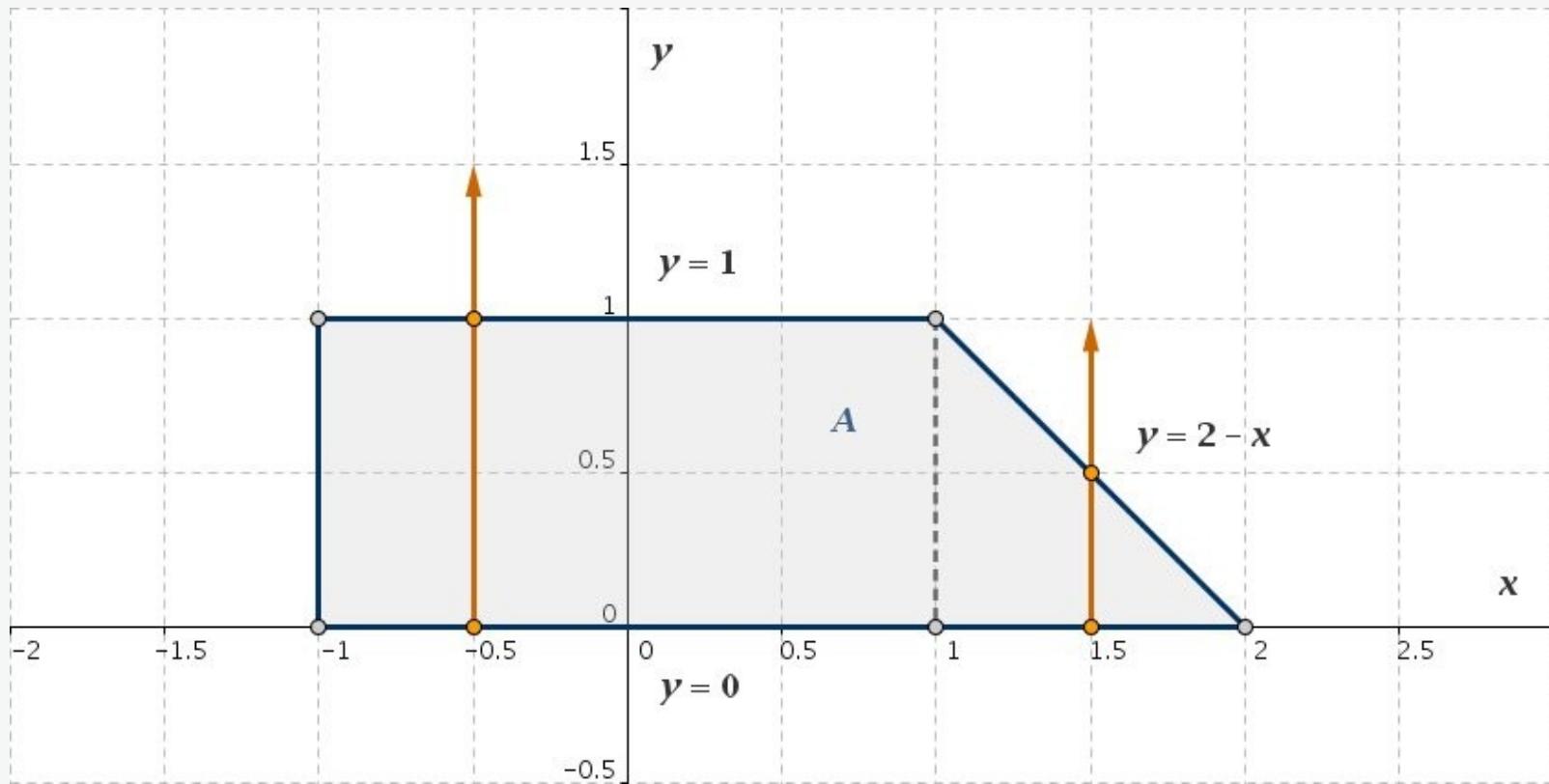
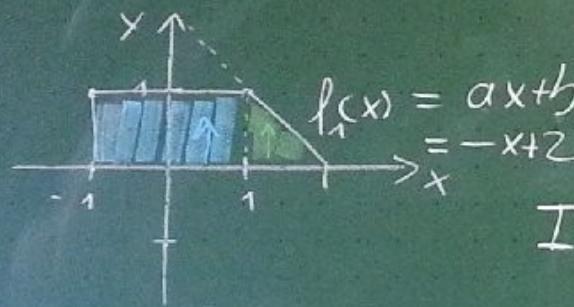


Abb. 2-2: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach **y**)

$$\iint_A f(x, y) \, dA = \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^1 f(x, y) \, dy \, dx + \int_{x=1}^2 \int_{y=0}^{2-x} f(x, y) \, dy \, dx$$

## Integrationsgrenzen: Lösung 2

2) A:  $(-1,0), (-1,1), (1,1), (2,0)$

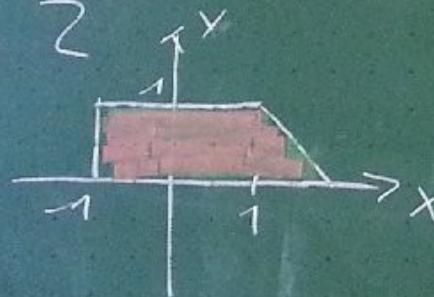


$$-1 \leq x \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 1 \leq x \leq 2 \quad ; \quad 0 \leq y = -x+2$$

Typ 1

$$I = \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^1 f(x,y) dy dx + \int_{x=1}^2 \int_{y=0}^{-x+2} f(x,y) dy dx$$

Typ 2



$$0 \leq y \leq 1 \quad , \quad -1 \leq x \leq -y+2$$

$$\boxed{y = -x+2} \\ \boxed{x = -y+2}$$

$$I = \int_{y=0}^1 \int_{x=-1}^{-y+2} f(x,y) dx dy$$

Abb. 2-3: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen

## Integrationsgrenzen: Lösung 3

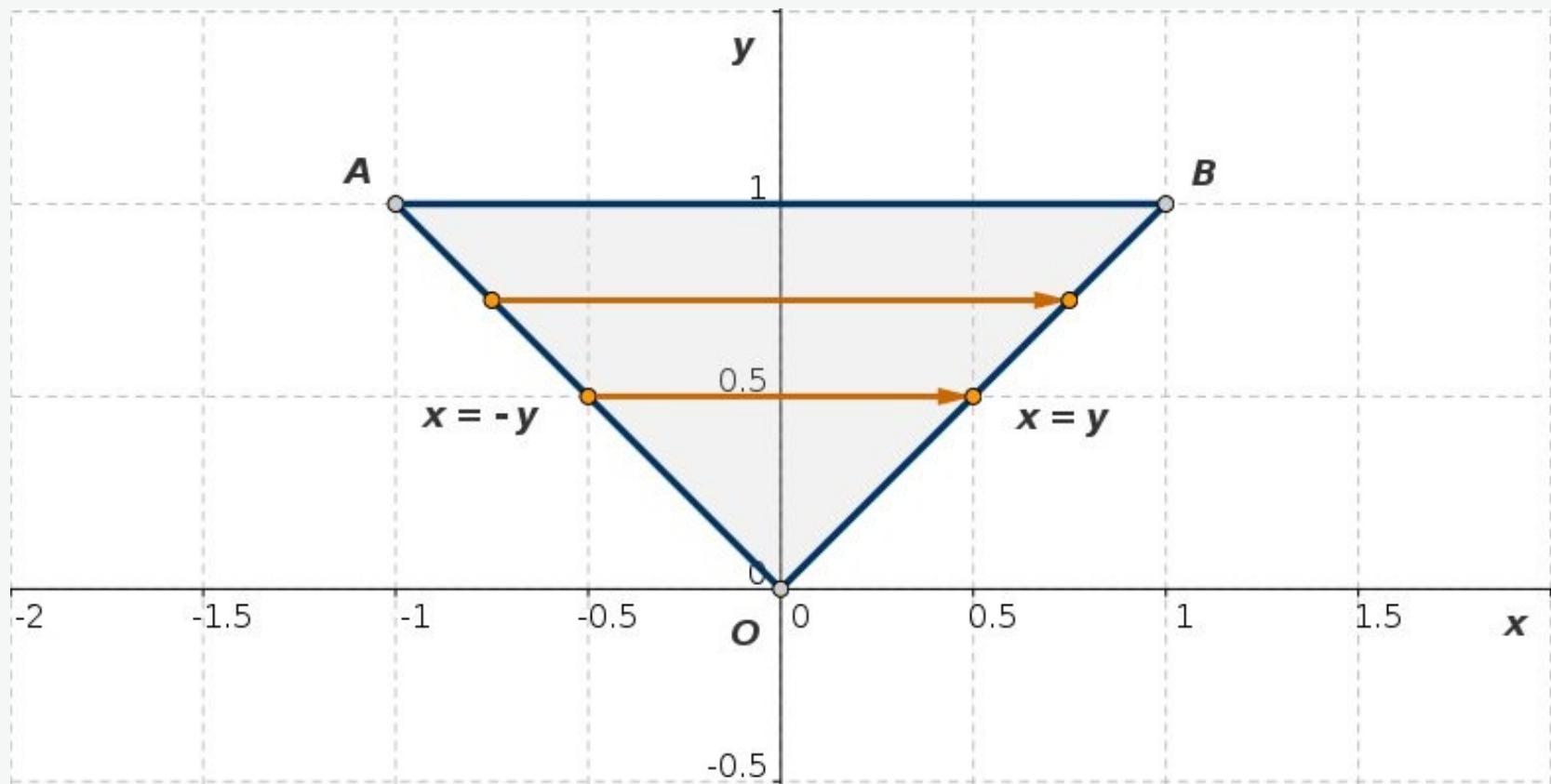


Abb. 3-1: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach  $x$ )

$$O = (0, 0), \quad A = (-1, 1), \quad B = (1, 1)$$

$$\iint_A f(x, y) \, dA = \int_{y=0}^1 dy \int_{x=-y}^y f(x, y) \, dx$$

## Integrationsgrenzen: Lösung 3

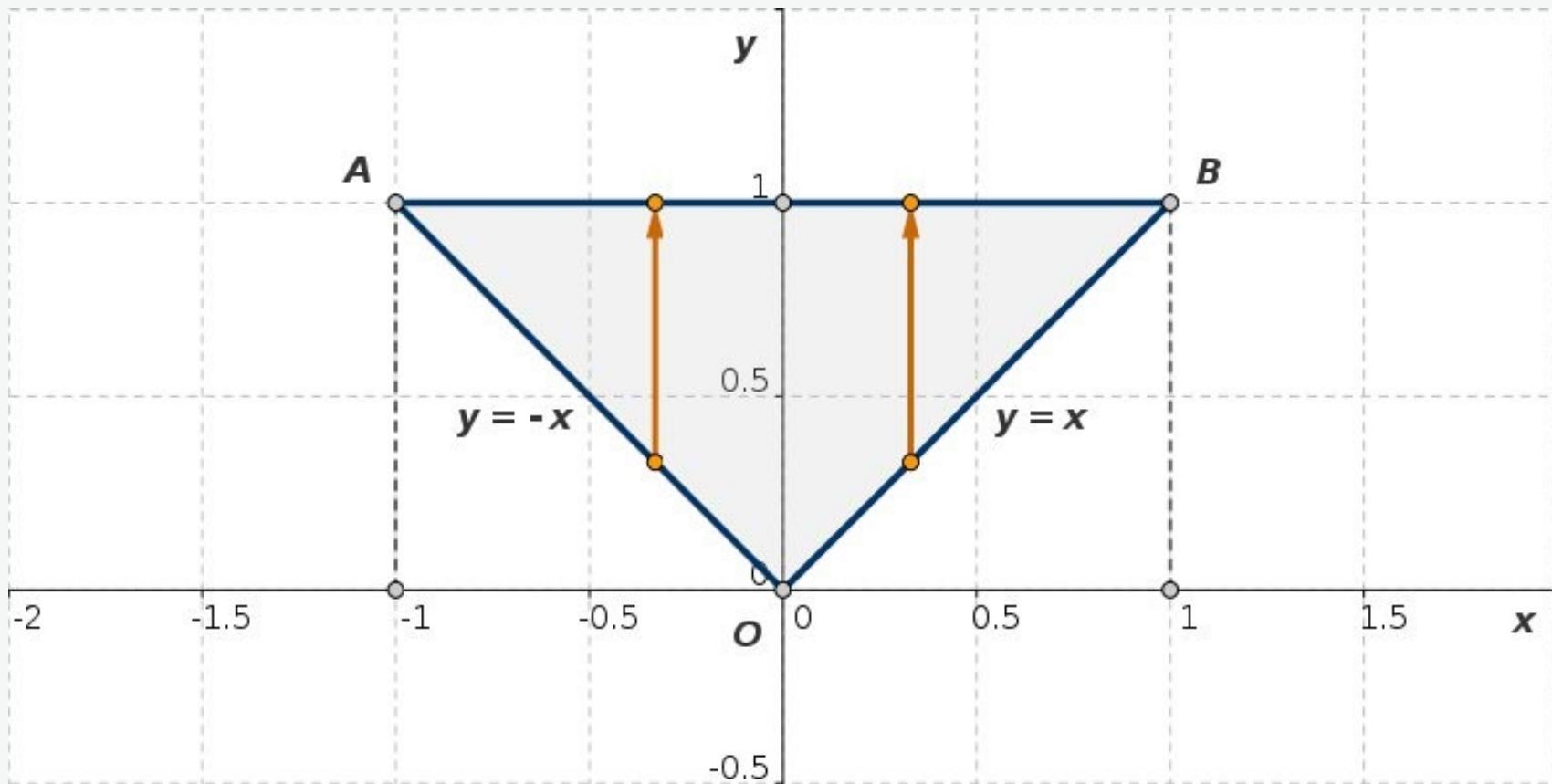


Abb. 3-2: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach y)

$$\iint_A f(x, y) \, dA = \int_{x=-1}^0 dx \int_{y=-x}^1 f(x, y) \, dy + \int_{x=0}^1 dx \int_{y=x}^1 f(x, y) \, dy$$

## Integrationsgrenzen: Lösung 4

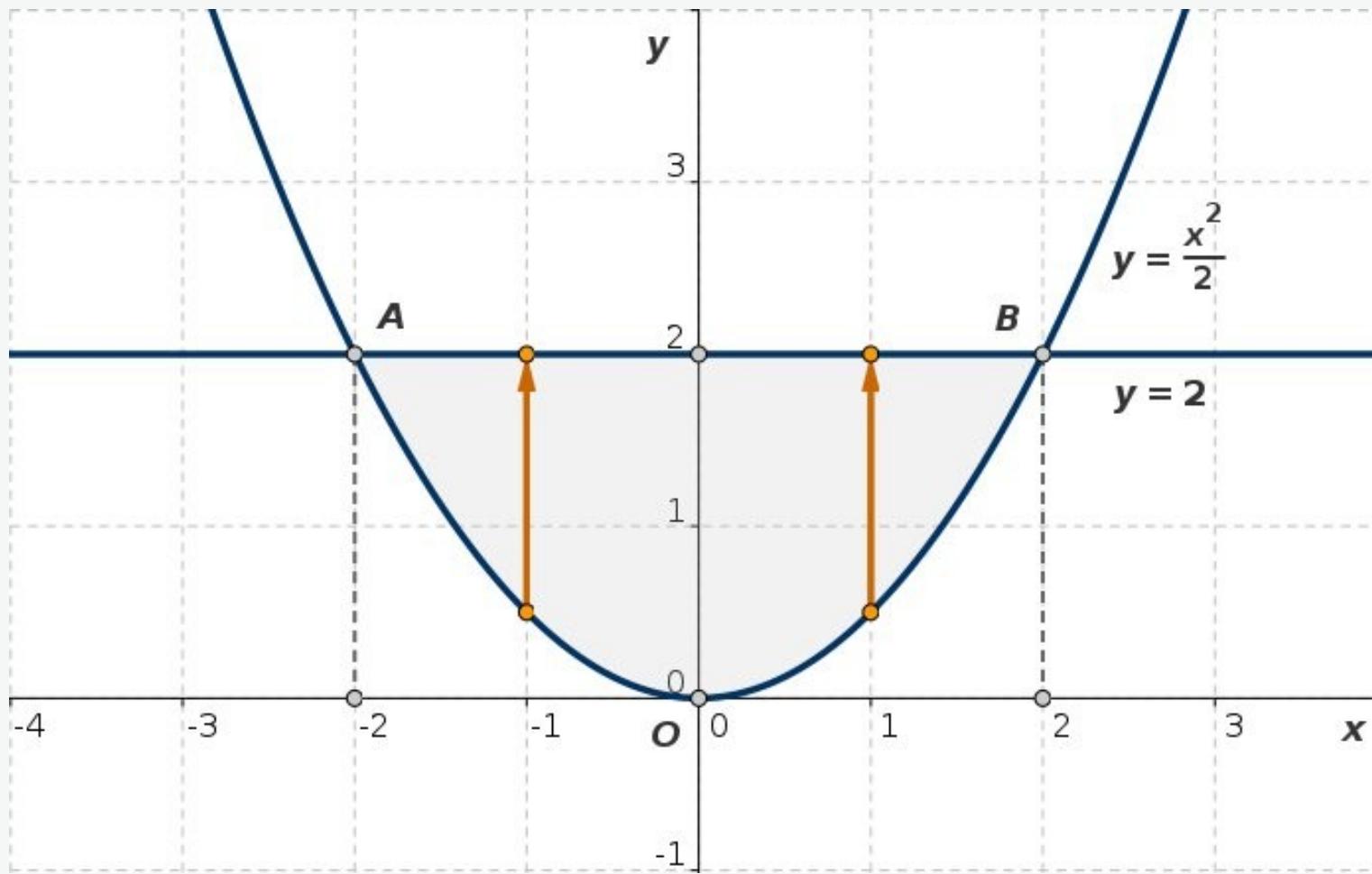


Abb. 4-1: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach  $y$ )

$$A = (-2, 2), \quad B = (2, 2)$$

$$\iint_A f(x, y) \, dA = \int_{x=-2}^2 dx \int_{y=x^2/2}^2 f(x, y) \, dy$$

## Integrationsgrenzen: Lösung 4

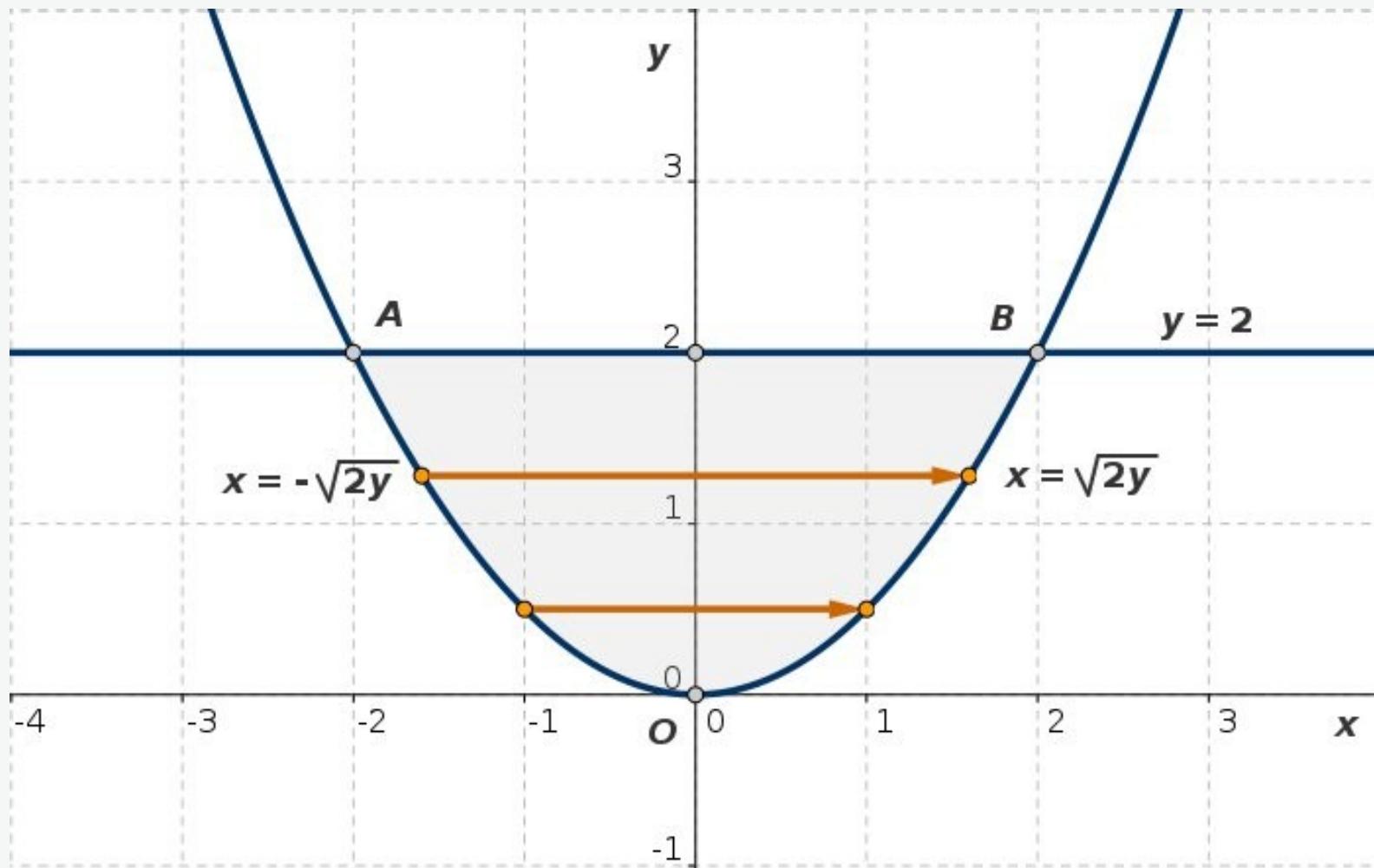


Abb. 4-2: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach  $x$ )

$$\iint_A f(x, y) \, dA = \int_{y=0}^2 dy \int_{x=-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} f(x, y) \, dx$$

# Integrationsgrenzen: Lösung 4

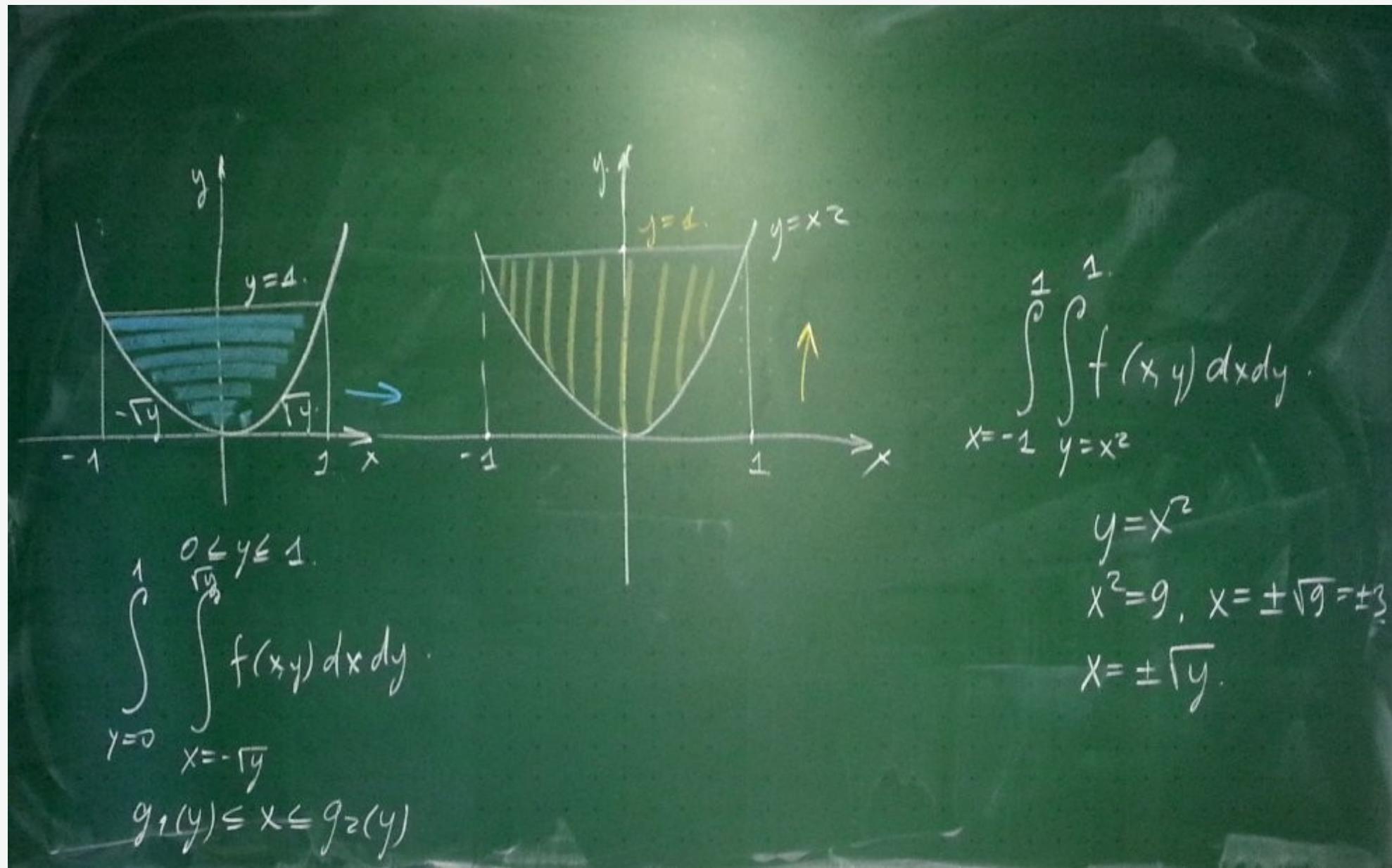


Abb. 4-3: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen

## Integrationsgrenzen: Lösung 5

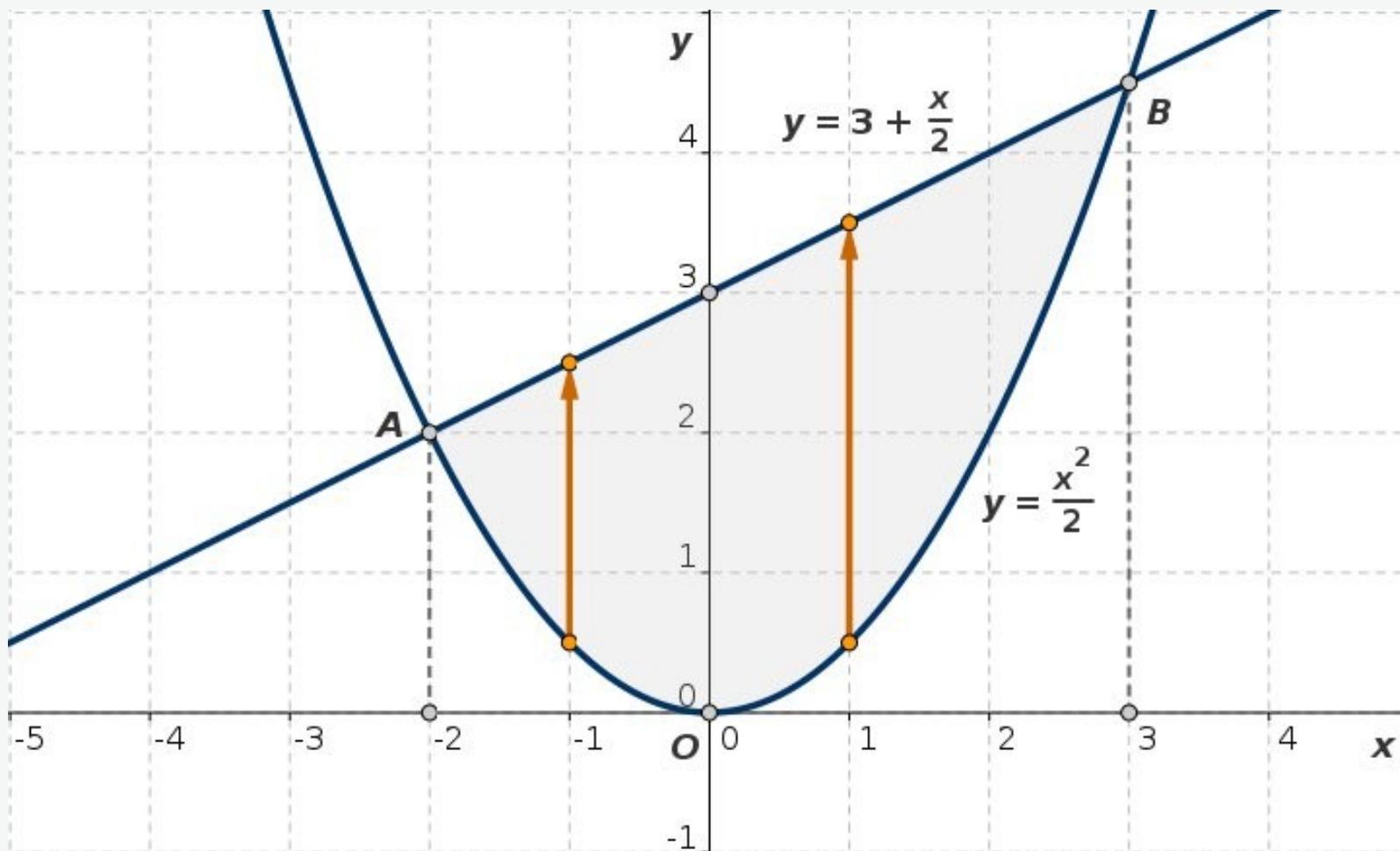


Abb. 5-1: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach  $y$ );  $A (-2, 2)$ ,  $B (3, 4.5)$

$$\iint_A f(x, y) \, dA = \int_{x=-2}^3 dx \int_{y=x^2/2}^{3+x/2} f(x, y) \, dy$$

## Integrationsgrenzen: Lösung 5

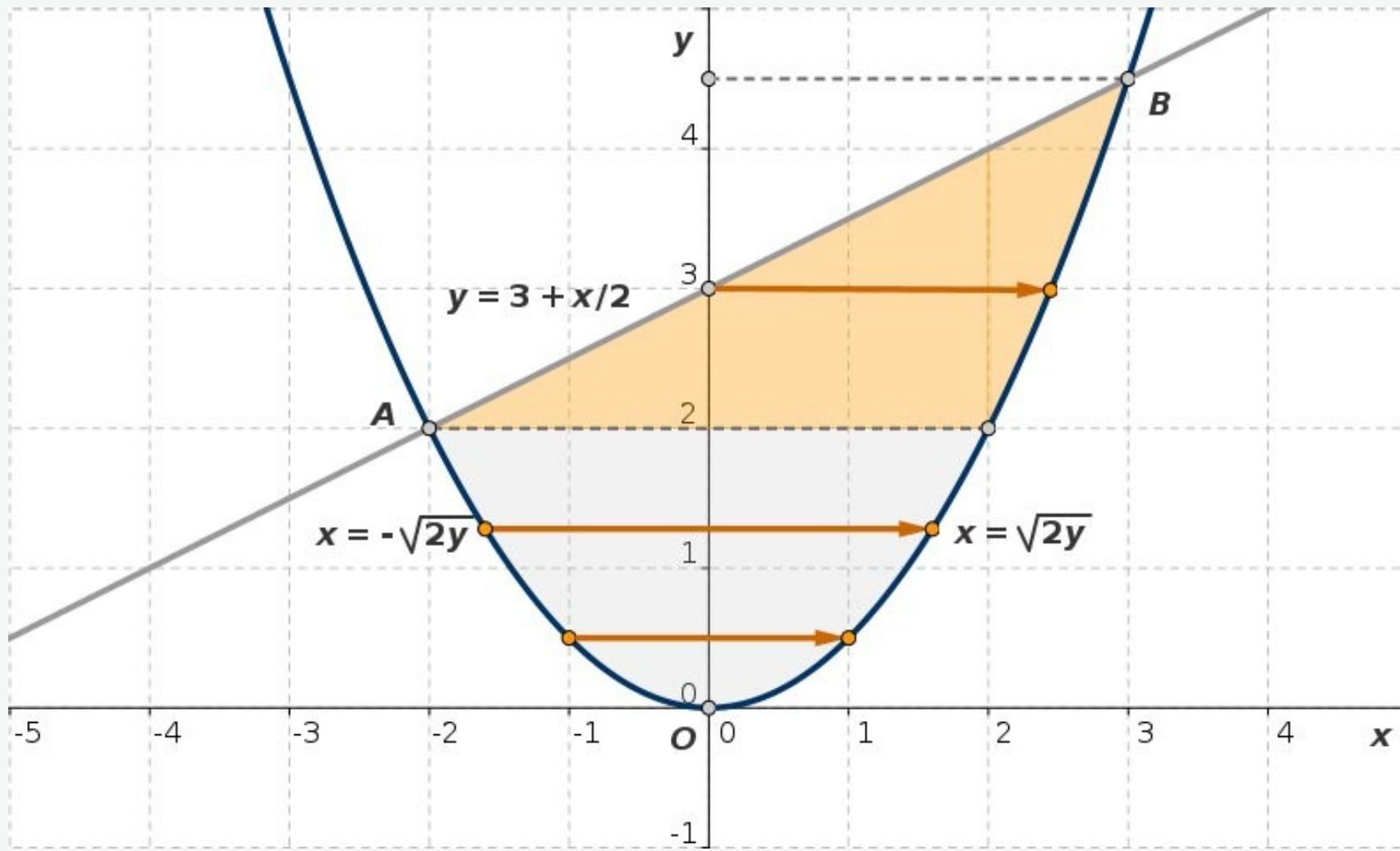


Abb. 5-2: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach  $x$ );  $A (-2, 2)$ ,  $B (3, 4.5)$

$$\iint_A f(x, y) dA = \int_{y=0}^2 dy \int_{x=-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} f(x, y) dx + \int_{y=2}^{9/2} dy \int_{x=2y-6}^{\sqrt{2y}} f(x, y) dx$$

## Integrationsgrenzen: Lösung 6

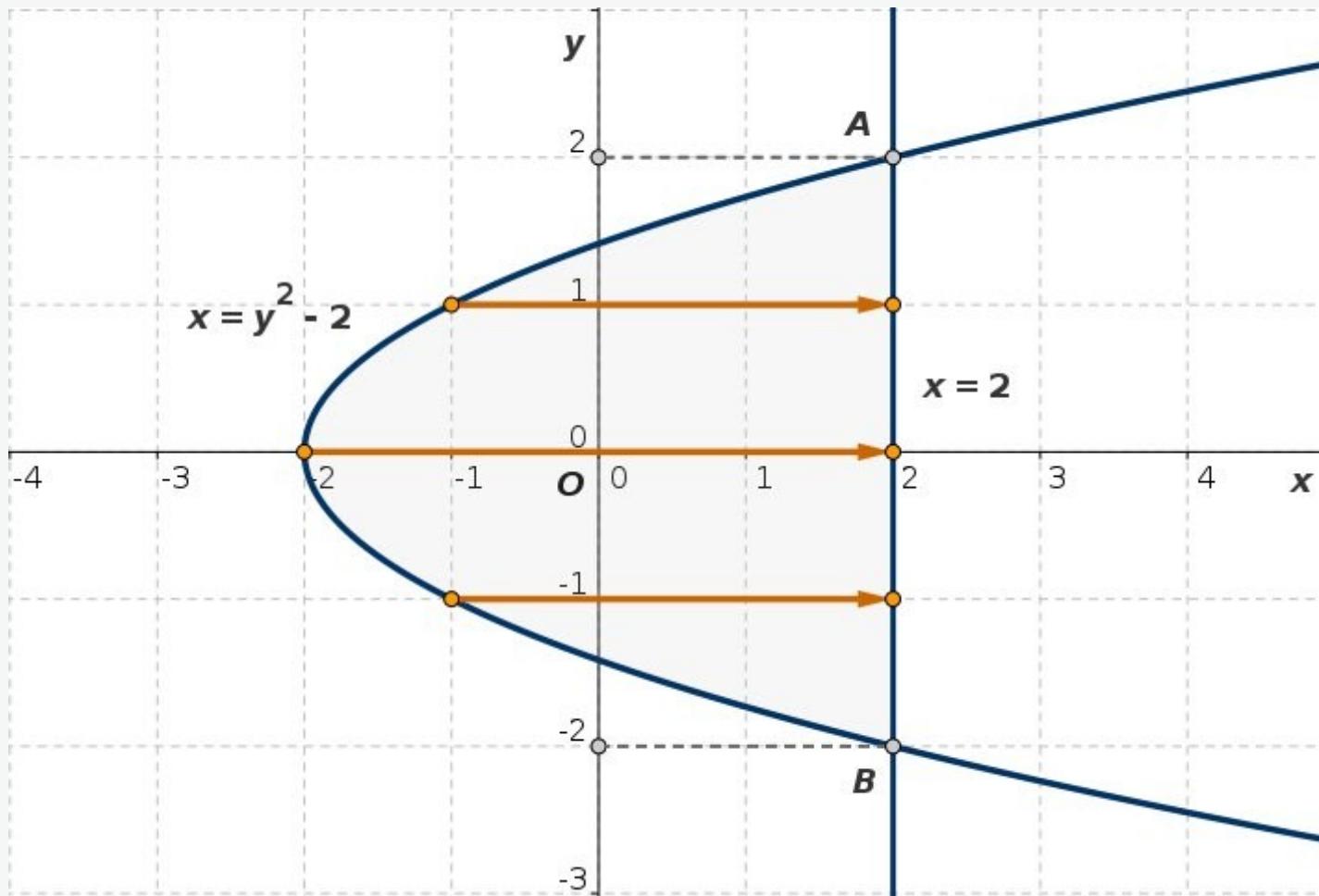


Abb. 6-1: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach  $x$ );  $A (2, 2)$ ,  $B (2, -2)$

$$A : x = y^2 - 2, \quad x = 2$$

$$\iint_A f(x, y) \, dA = \int_{y=-2}^2 dy \int_{x=y^2-2}^2 f(x, y) \, dx$$

## Integrationsgrenzen: Lösung 6

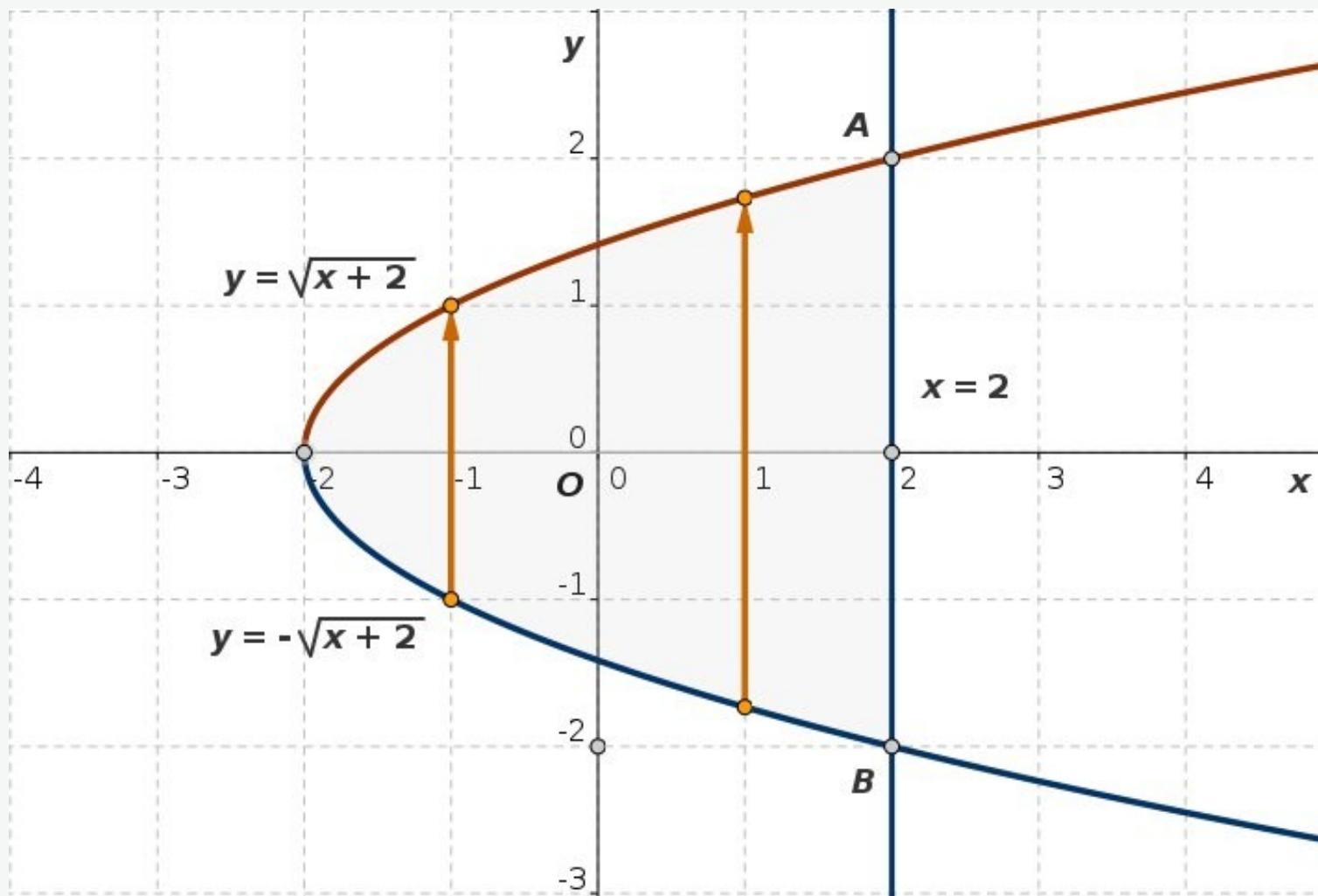


Abb. 6-2: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach  $y$ )

$$\iint_A f(x, y) \, dA = \int_{x=-2}^2 dx \int_{y=-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x, y) \, dy$$

## Integrationsgrenzen: Lösung 7

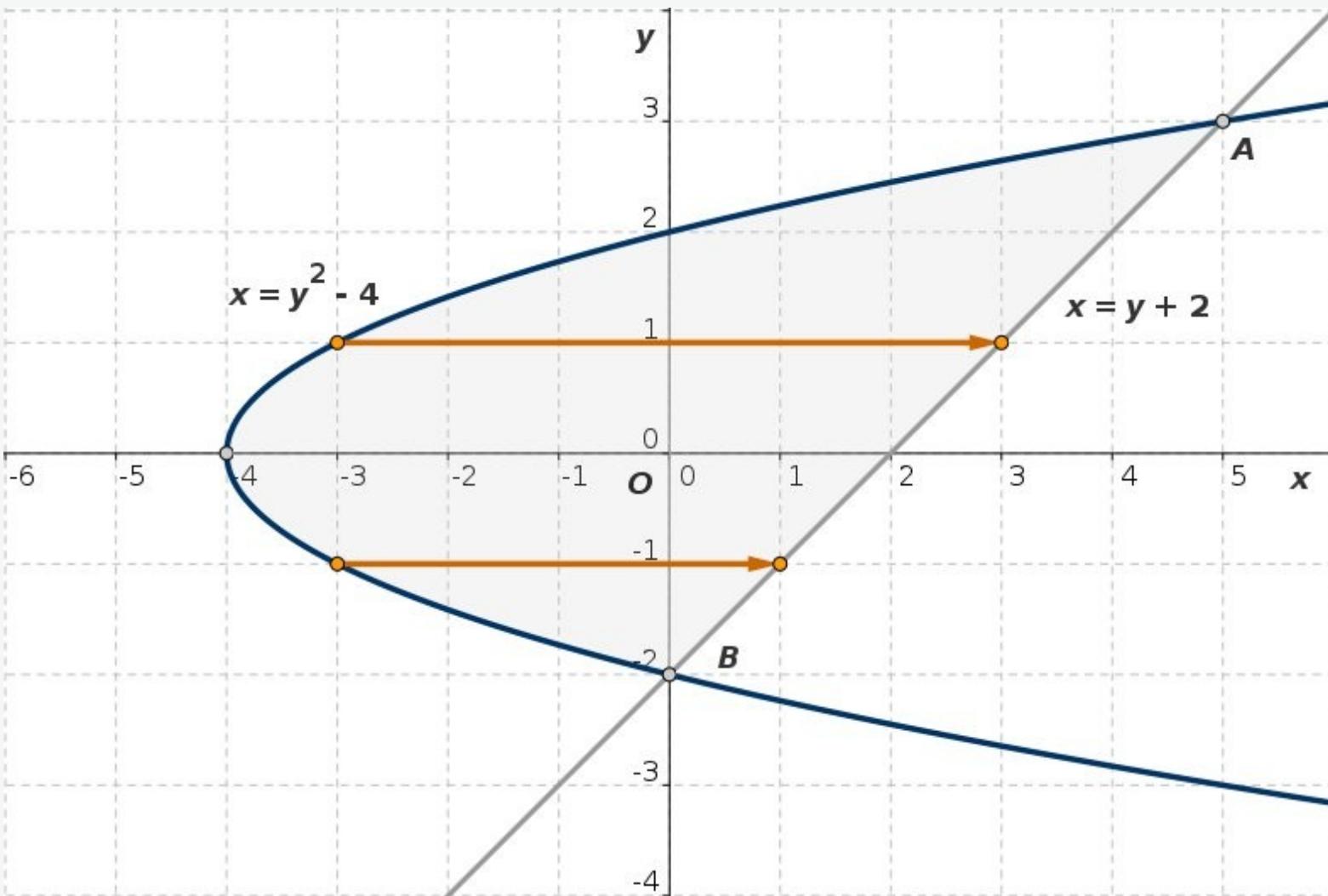


Abb. 7-1: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach  $x$ );  $A (5, 3)$ ,  $B (0, -2)$

$$A : x = y^2 - 4, \quad y = x - 2$$

$$\iint_A f(x, y) \, dA = \int_{y=-2}^3 dy \int_{x=y^2-4}^{y+2} f(x, y) \, dx$$

# Integrationsgrenzen: Lösung 7

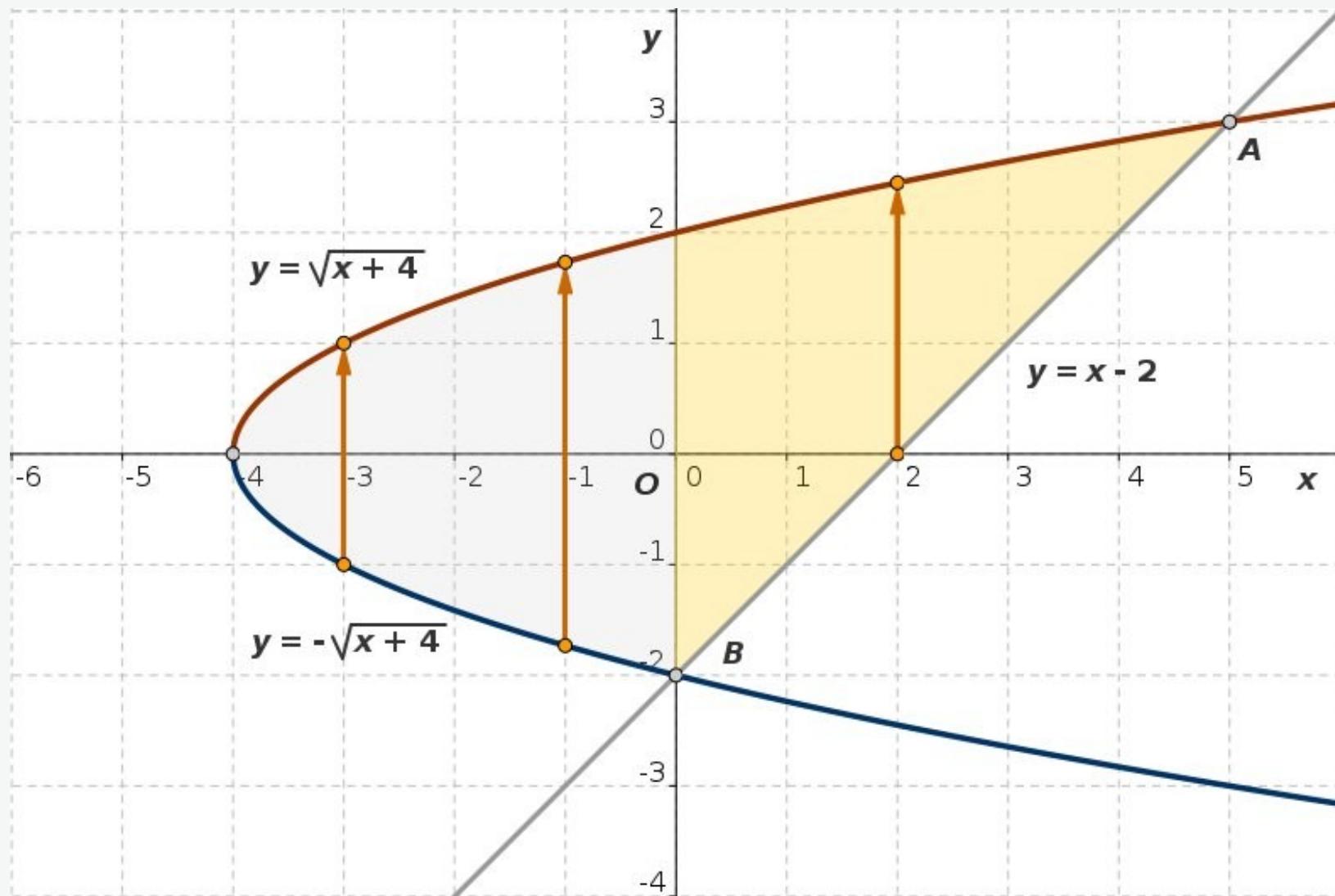


Abb. 7-2: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach y)

$$\iint_A f(x, y) dA = \int_{x=-4}^0 dx \int_{y=-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} f(x, y) dy + \int_{x=0}^5 dx \int_{y=x-2}^{\sqrt{x+4}} f(x, y) dy$$

## Integrationsgrenzen: Lösung 8

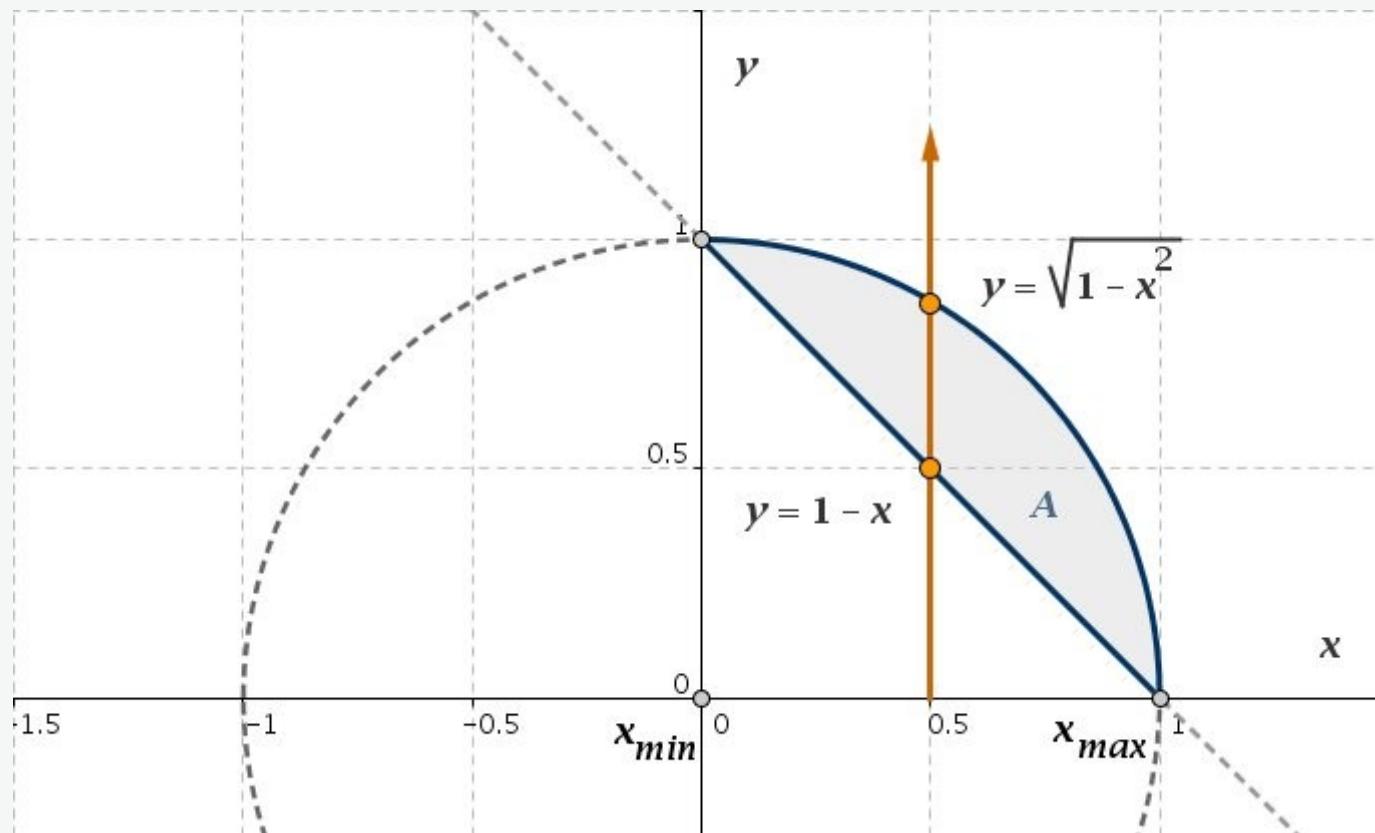


Abb. 8-1: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach  $y$ )

$$\iint_A f(x, y) dA = \int_{x=0}^1 \int_{y=1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$$

## Integrationsgrenzen: Lösung 8

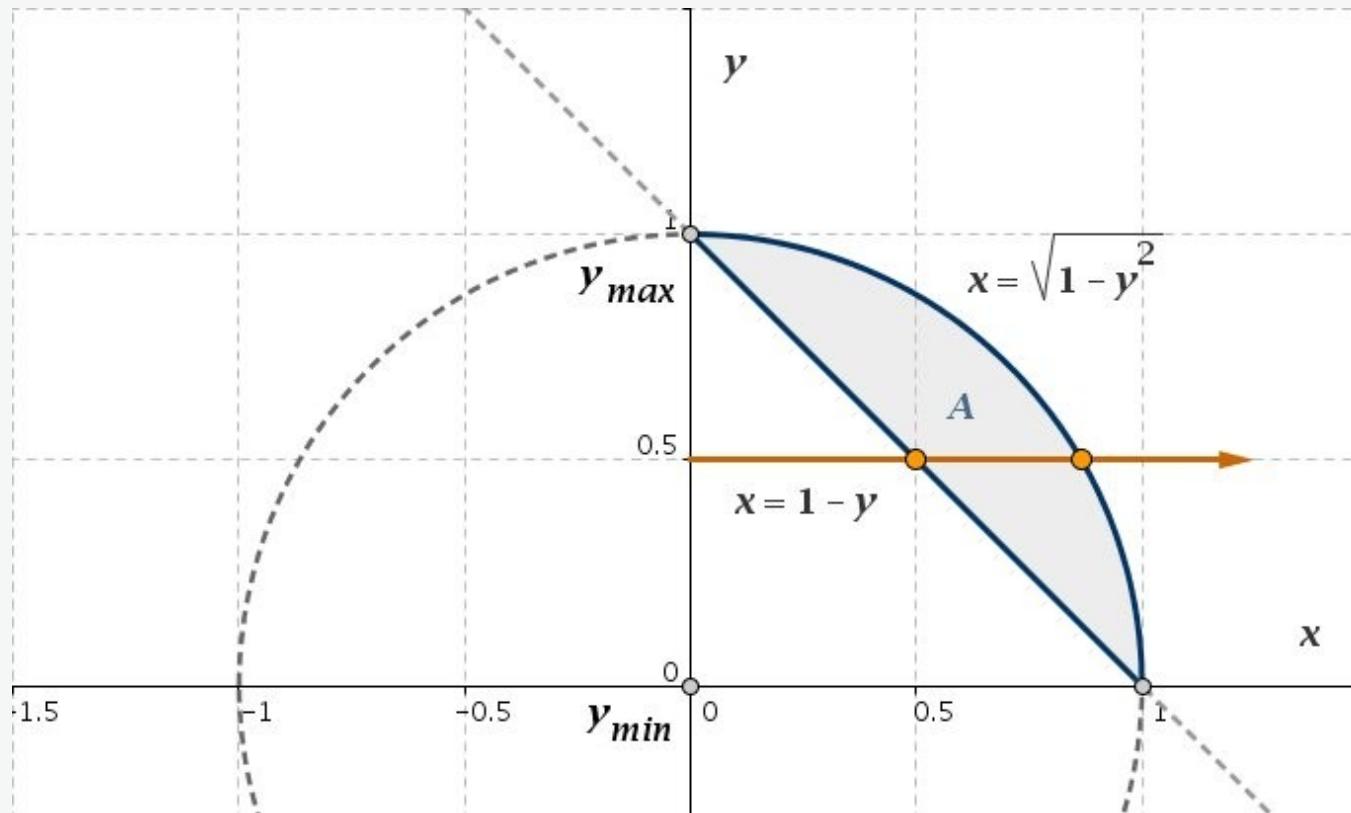


Abb. 8-2: Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen (innere Integration nach  $x$ )

$$\iint_A f(x, y) \, dA = \int_{y=0}^1 \int_{x=1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy$$