Flächen in Polarkoordinaten

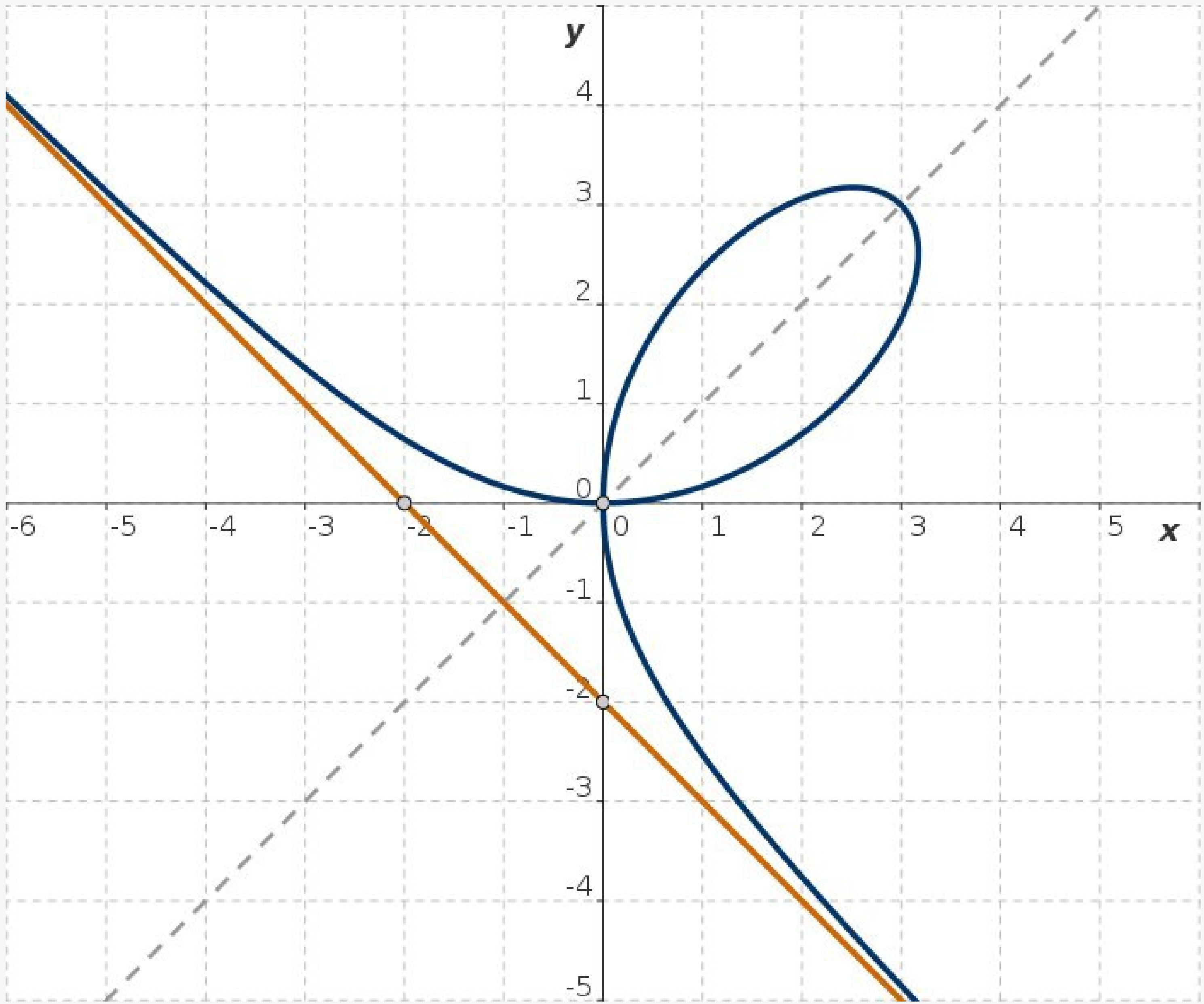

Abb. L8-1: Das kartesisches Blatt (a = 2) – die Kurve der Aufgabe

Bestimmen Sie die Fläche A, die der Schleife des kartesischen Blattes entspricht (auf der Abb. die geschlossene Fläche der Kurve im ersten Qudrant).

Das kartesische Blatt ist eine eine algebraische Kurve, die durch die Gleichung

$$x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0$$

bestimmt wird. Die Gerade mit der Gleichung $x + y + a = 0$ ist die Asymptote der Kurve (in Abb. *L8* rot dargestellt). Die Kurve ist symmetrisch zur Geraden $y = x$ und hat in Polarkoordinaten die Form

$$r(\varphi) = \frac{3\,a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$$

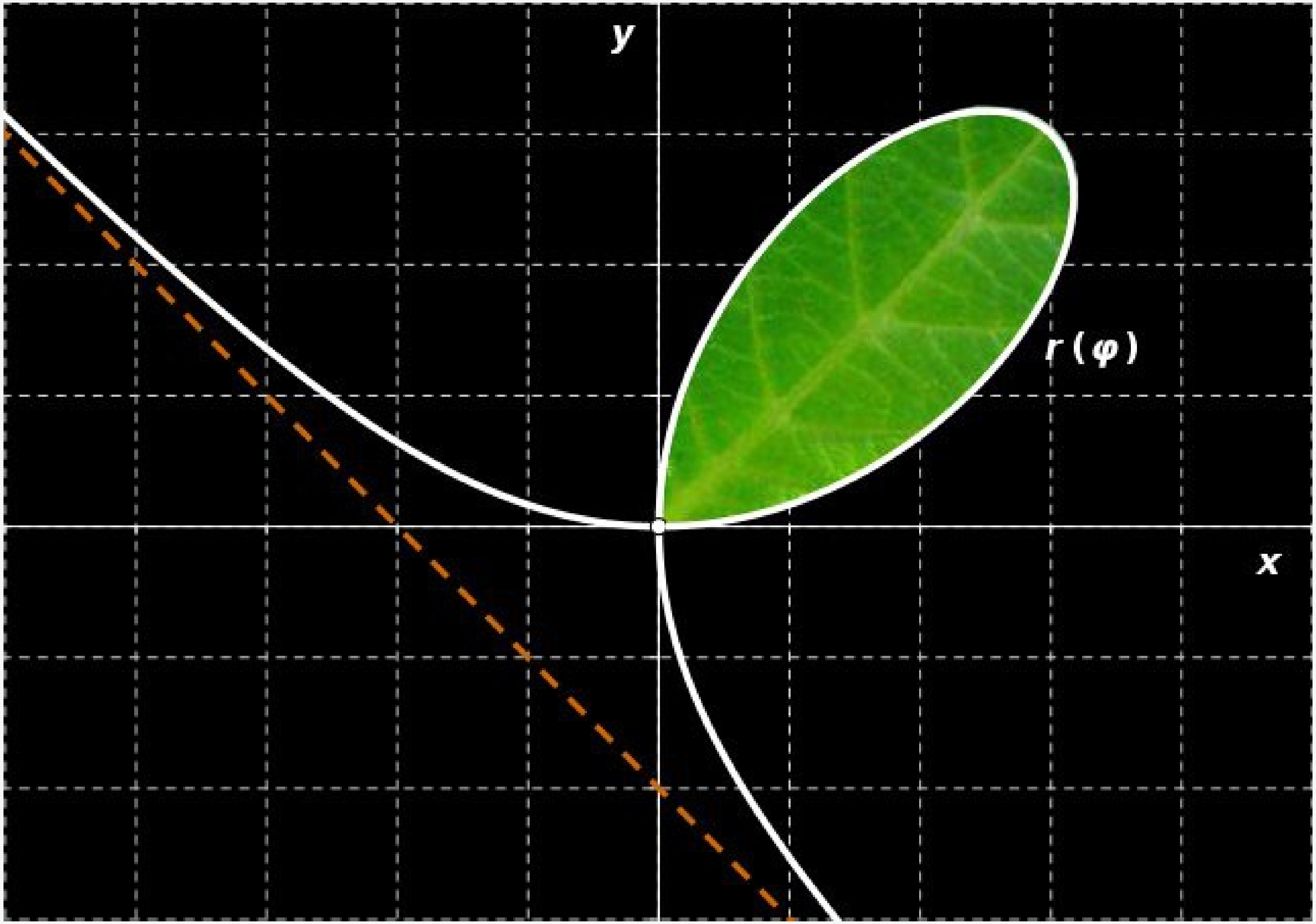

Abb. L8-2: Das kartesisches Blatt (a = 2). Die geschlossene Fläche der Aufgabe ist grün dargestellt

Die Fläche des kartesischen Blattes A ist:

$$A = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}} r\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\right)^2 d\varphi = \frac{9}{2}a^2\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2}a^2\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\tan\varphi}{\cos\varphi\,(1+\tan^3\varphi)}\right)^2 d\varphi = \frac{9}{2}a^2\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\tan\varphi}{1+\tan^3\varphi}\right)^2 \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{9}{2}a^2\int_0^{\infty}\left(\frac{u}{1+u^3}\right)^2 du = \frac{9}{2}a^2\int_0^{\infty}\frac{u^2\,du}{(1+u^3)^2} = \frac{3}{2}a^2\int_1^{\infty}\frac{dz}{z^2} = \frac{3}{2}a^2 \quad (\text{FE})$$

$$1)\ \ u = \tan\varphi, \qquad du = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}, \qquad 2)\ \ z = 1+u^3, \qquad dz = 3u^2\,du$$