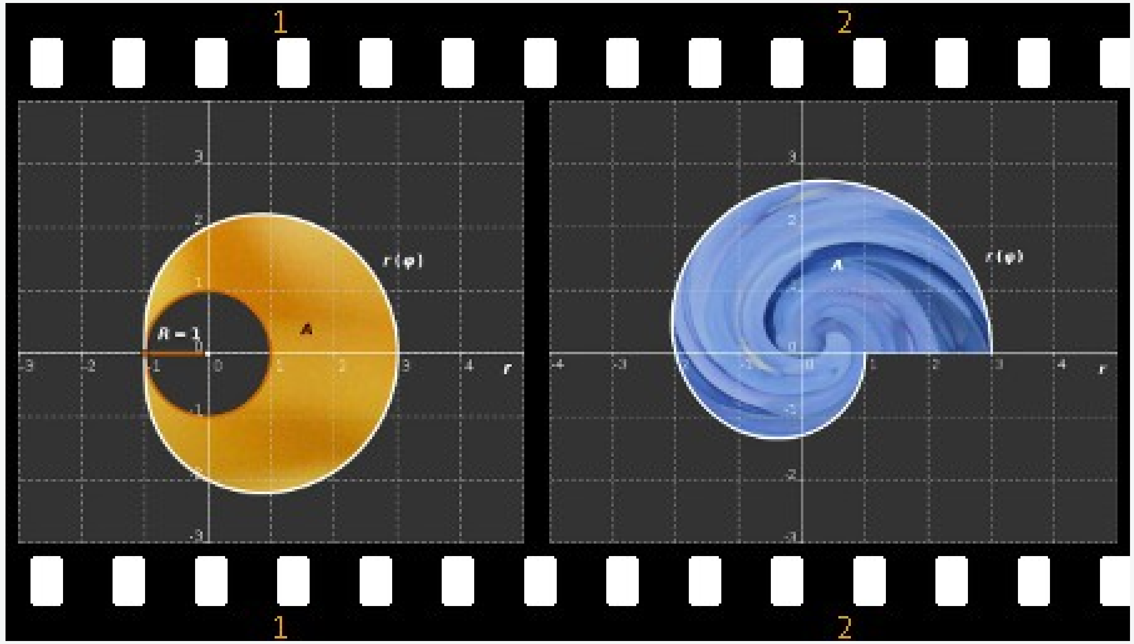
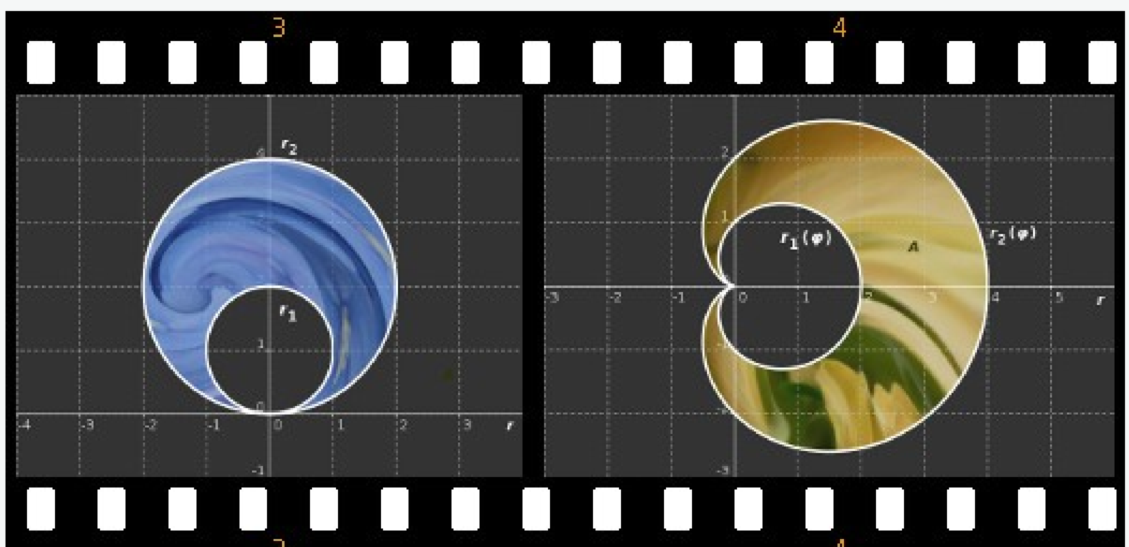
Flächen in Polarkoordinaten

“Flächeninhalt”





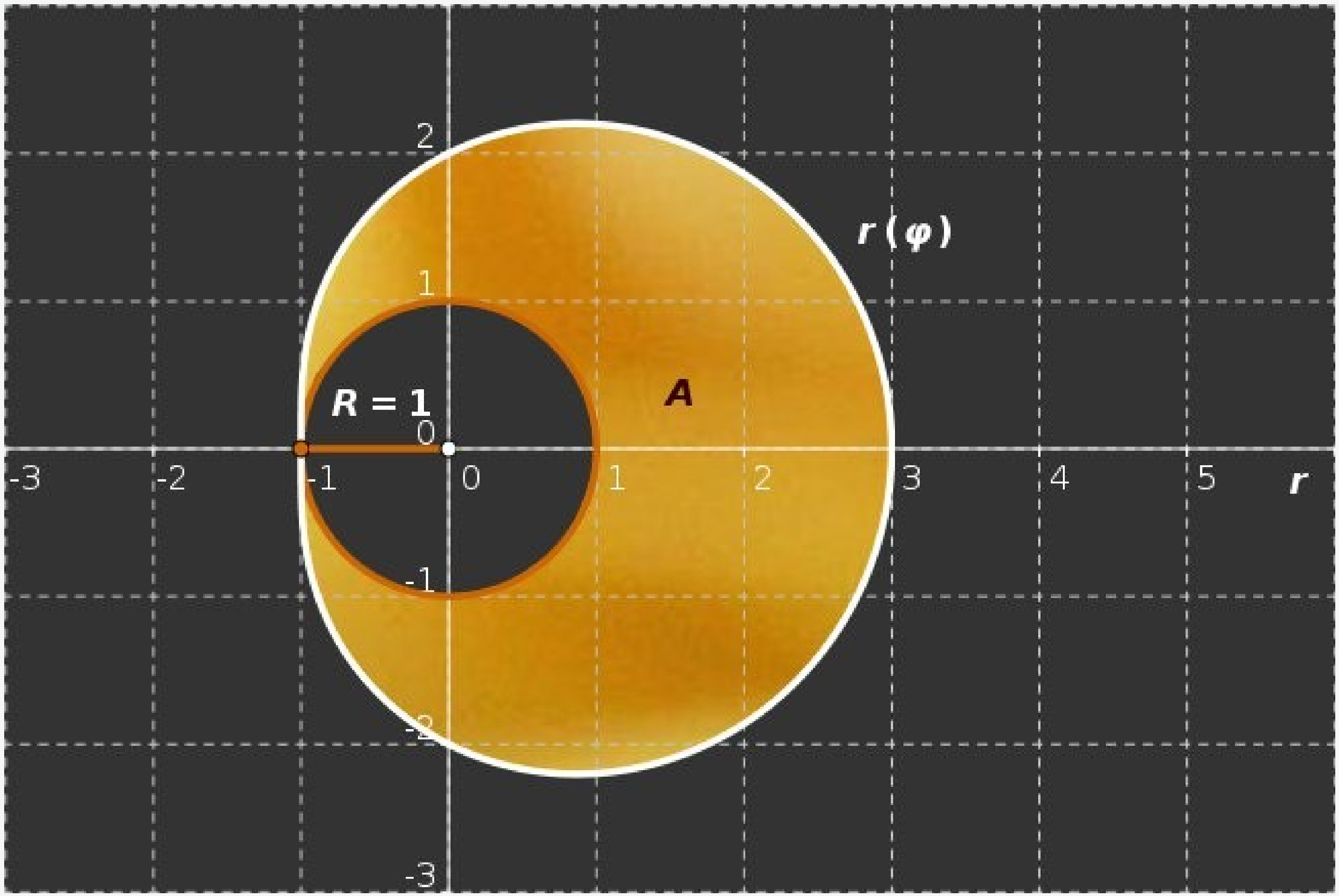


Abb. L4: Die Fläche der Aufgabe

Bestimmen Sie die Fläche A, die innerhalb der Kurve $r(\varphi) = 2 + \cos\varphi$ liegt und gleichzeitig ausserhalb eines Ursprungskreises mit Radius $R = 1$.

$$r(\varphi) = 2 + \cos\varphi\,, \qquad R = 1$$

$$A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{2+\cos\varphi} r\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^{2+\cos\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left((2 + \cos\varphi)^2 - 1 \right) d\varphi =$$

$$= \left[\frac{7}{4}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos\varphi\,\sin\varphi \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{7}{2}\pi \text{ FE}$$

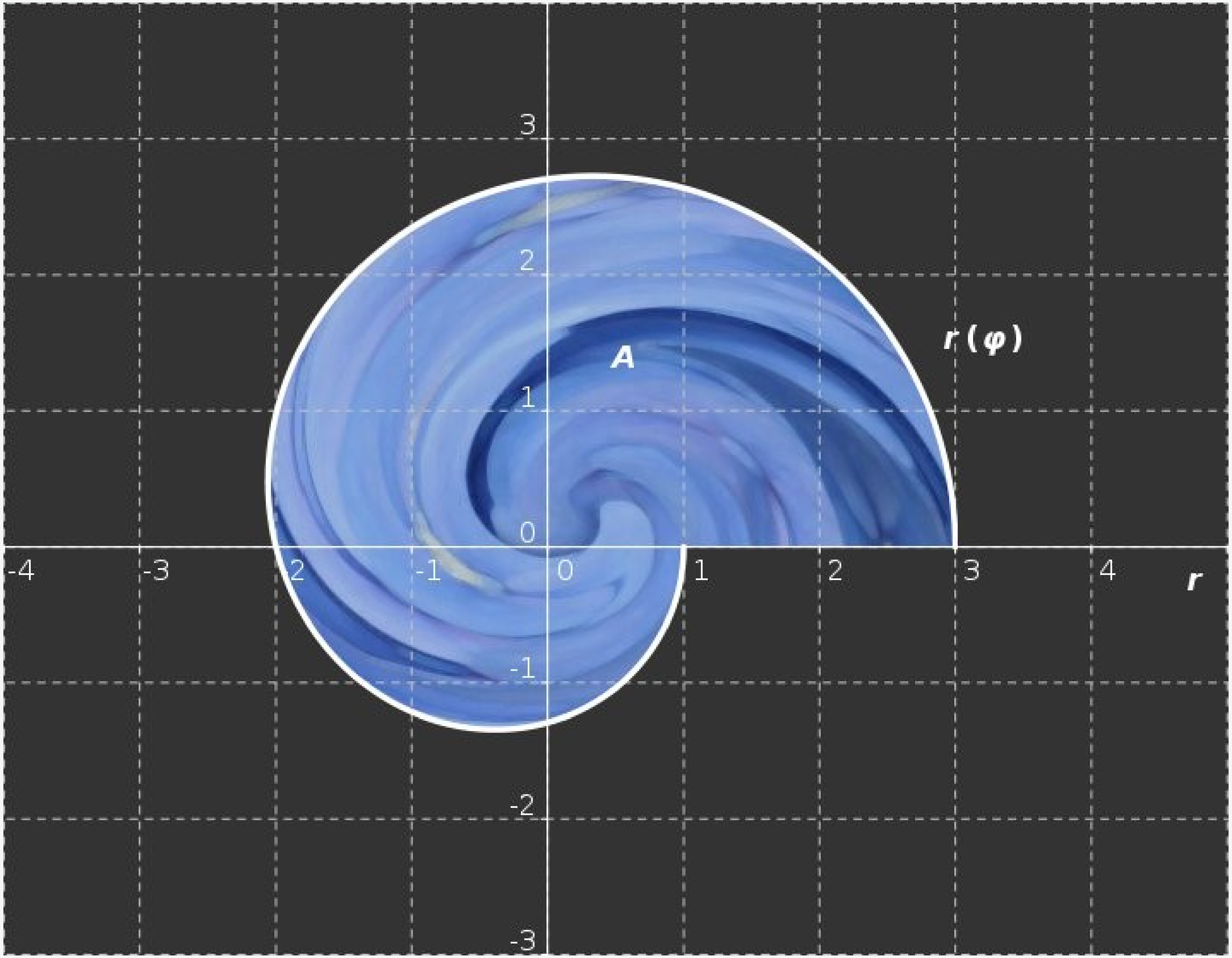


Abb. L5: Die Fläche der Aufgabe

Bestimmen Sie die Fläche zwischen der Kurve $r = r\,(\varphi)$ und der x-Achse

$$r\,(\varphi) = 2 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$r(\varphi) = 2 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2+\cos(\varphi/2)} r \, dr \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(2 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(4 + 8\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(4 + \frac{1}{2} + 8\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos(\varphi)\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{9}{2} + 8\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos(\varphi)\right) d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2}\pi \text{ FE}$$

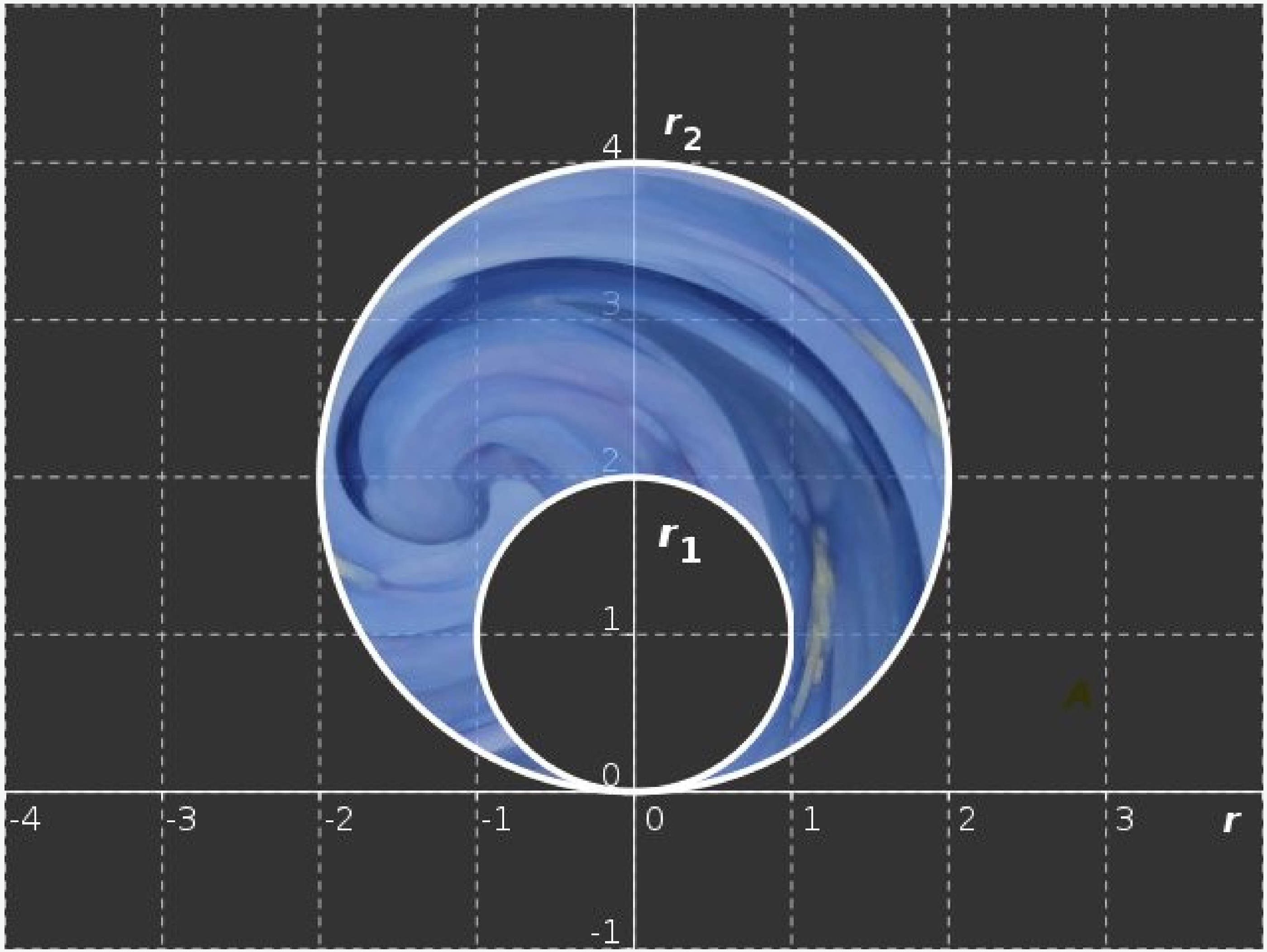


Abb. L6: Die Fläche der Aufgabe

Bestimmen Sie die Fläche A zwischen den Kurven

$$r_1(\varphi) = 2 \sin\varphi, \qquad r_2(\varphi) = 4 \sin\varphi$$

Flächen in Polarkoordinaten: Lösung 6

$$r_1(\varphi) = 2\sin\varphi, \qquad r_2(\varphi) = 4\sin\varphi$$

$$A = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r\,dr\,d\varphi =$$

$$= 2\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(16\sin^2\varphi - 4\sin^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= 12\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin^2\varphi\ d\varphi =$$

$$= 3\left[2\varphi - \sin(2\varphi)\right]_0^{\pi/2} = 3\pi\ \text{FE}$$

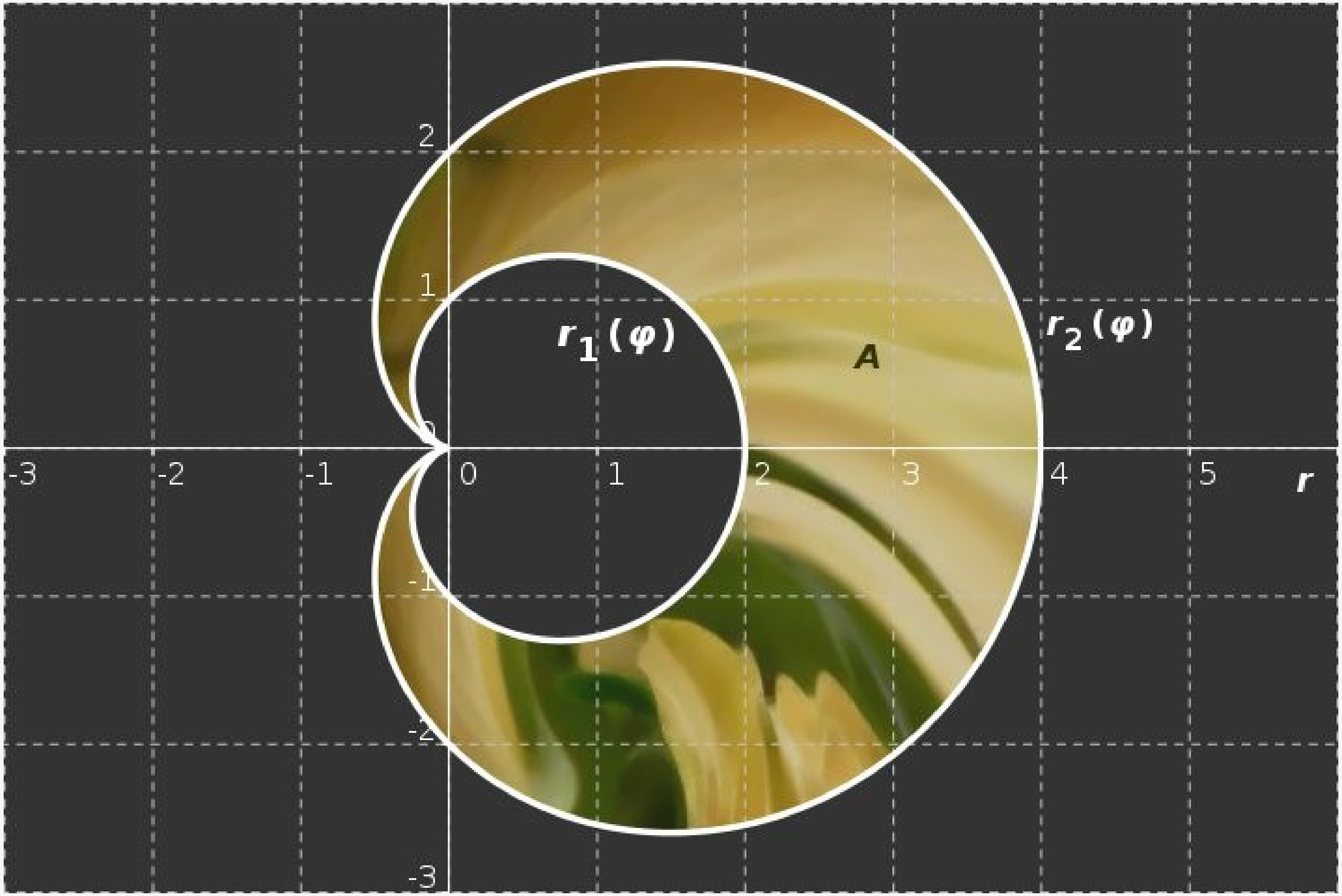


Abb. L7: Die Fläche der Aufgabe

Bestimmen Sie die Fläche A zwischen den Kurven

$$r_1(\varphi) = 1 + \cos\varphi, \qquad r_2(\varphi) = 2 + 2\cos\varphi$$

$$r_1(\varphi) = 1 + \cos\varphi\,, \qquad r_2(\varphi) = 2 + 2\cos\varphi$$

$$A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1+\cos\varphi}^{2+2\cos\varphi} r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left((2 + 2\cos\varphi)^2 - (1 + \cos\varphi)^2 \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(4\,(1 + \cos\varphi)^2 - (1 + \cos\varphi)^2 \right) d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2}\pi \ \text{FE}$$