Die Fläche eines Hufeisens

Beschreiben Sie die Fläche eines Hufeisens näherungsweise mit Funktionen und berechnen Sie diese Fläche.

Die Fläche eines Hufeisens

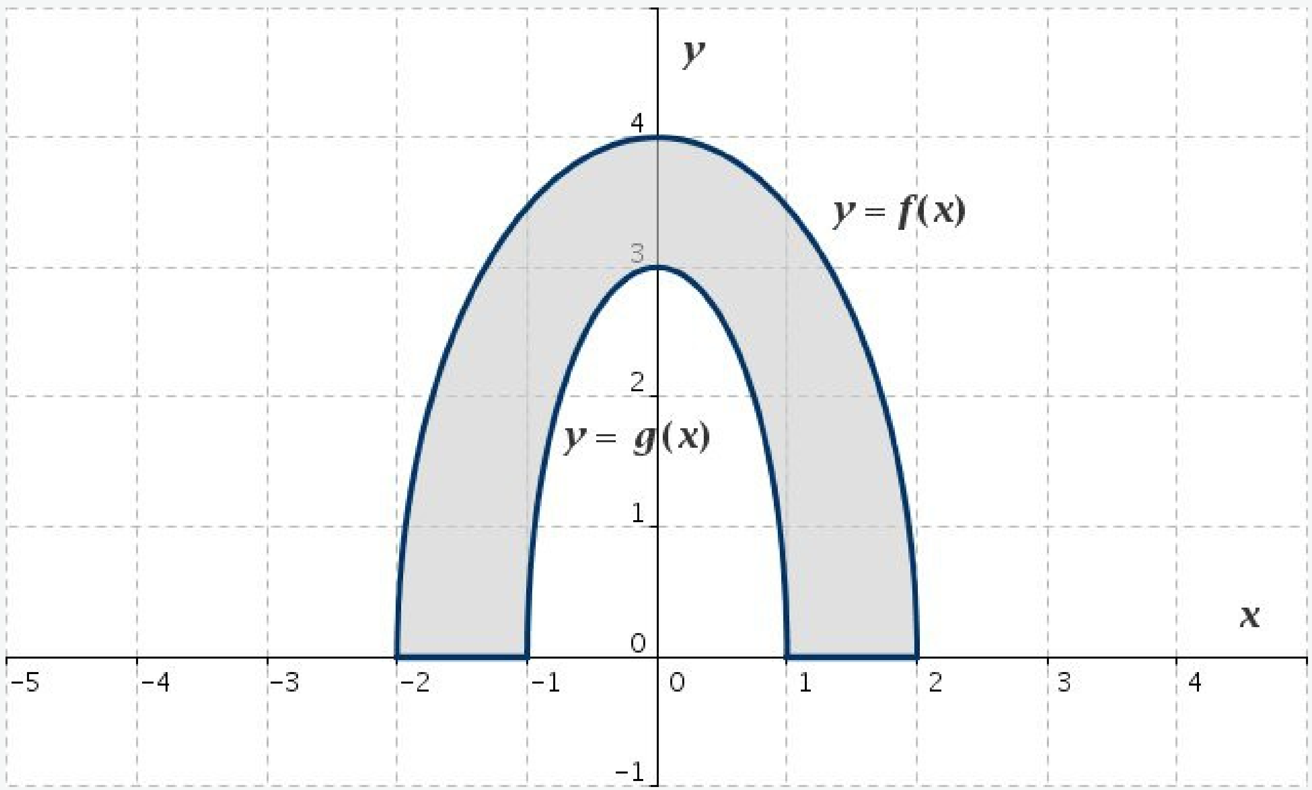

Abb. 1-1a: Die zwischen den Funktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ und der x-Achse eingeschlossene Fläche

1 Variante: $f(x) = 2\sqrt{4 - x^2}, \qquad g(x) = 3\sqrt{1 - x^2}$

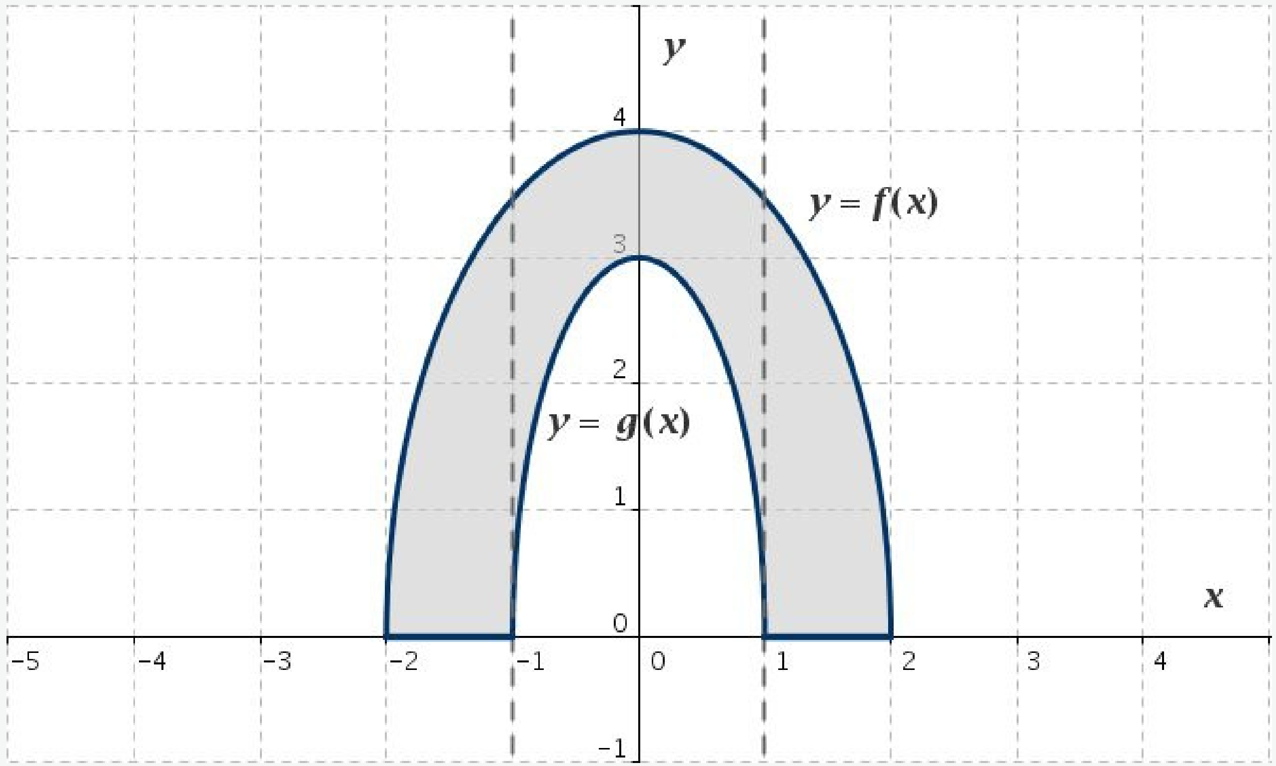

Abb. 1-1b: Die zwischen den Funktionen y = f (x), y = g (x) und der x-Achse eingeschlossene Fläche

$$A = 2 \int_{x=0}^{1} dx \int_{y=g(x)}^{f(x)} dy + 2 \int_{x=1}^{2} dx \int_{y=0}^{f(x)} dy$$

Die Fläche eines Hufeisens

$$A = 2 \int_{x=0}^{1} dx \int_{y=3\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{4-x^2}} dy + 2 \int_{x=1}^{2} dx \int_{y=0}^{2\sqrt{4-x^2}} dy$$

$$\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a > 0)}$$

$$2 \int_{x=0}^{1} dx \int_{y=3\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{4-x^2}} dy = 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$$

$$2 \int_{x=1}^{2} dx \int_{y=0}^{2\sqrt{4-x^2}} dy = -2\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}$$

$$A = 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} + \left(-2\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{2} \quad \text{(FE)}$$

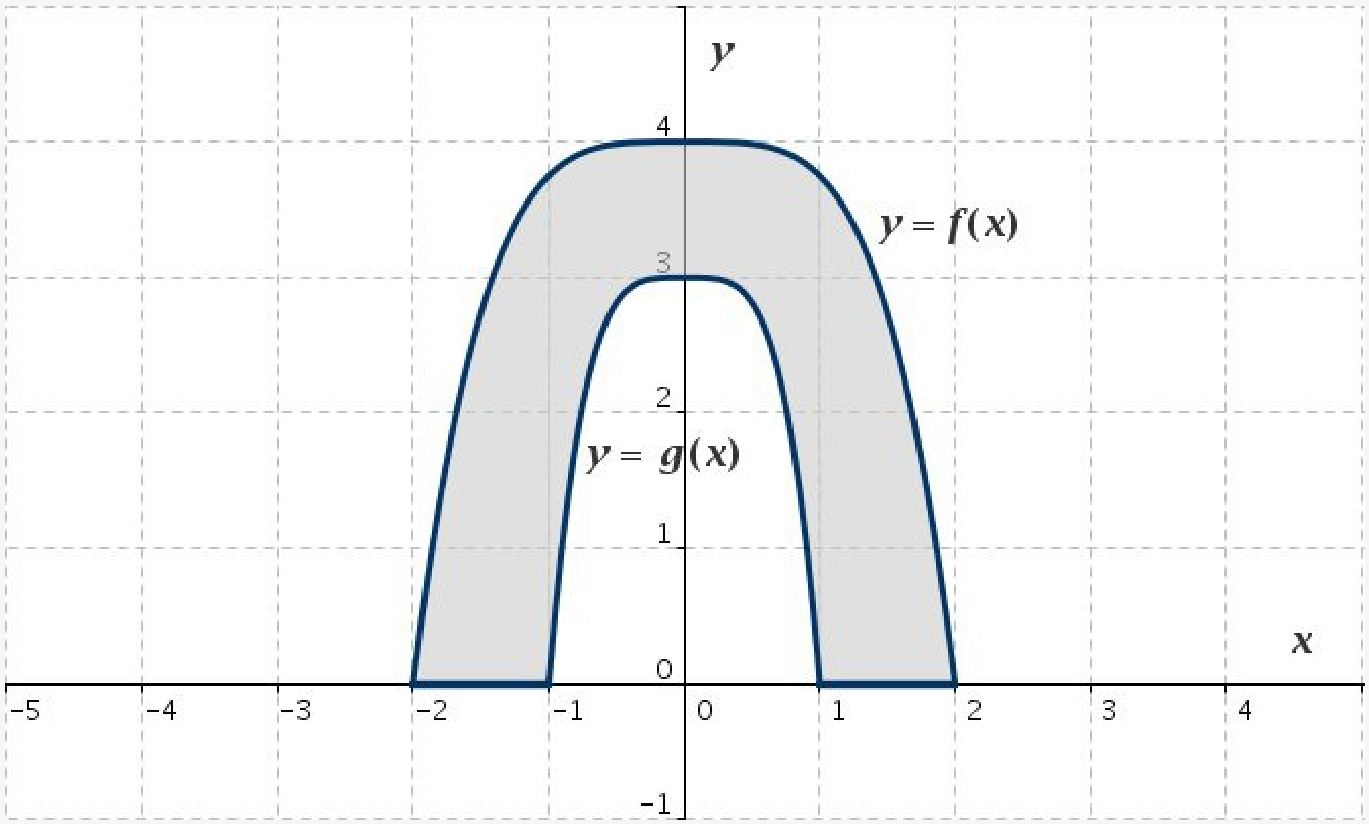

Abb. 1-2a: Die zwischen den Funktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ und der x-Achse eingeschlossene Fläche

2 Variante: $f(x) = 4 - \dfrac{x^4}{4}, \qquad g(x) = 3 - 3x^4$

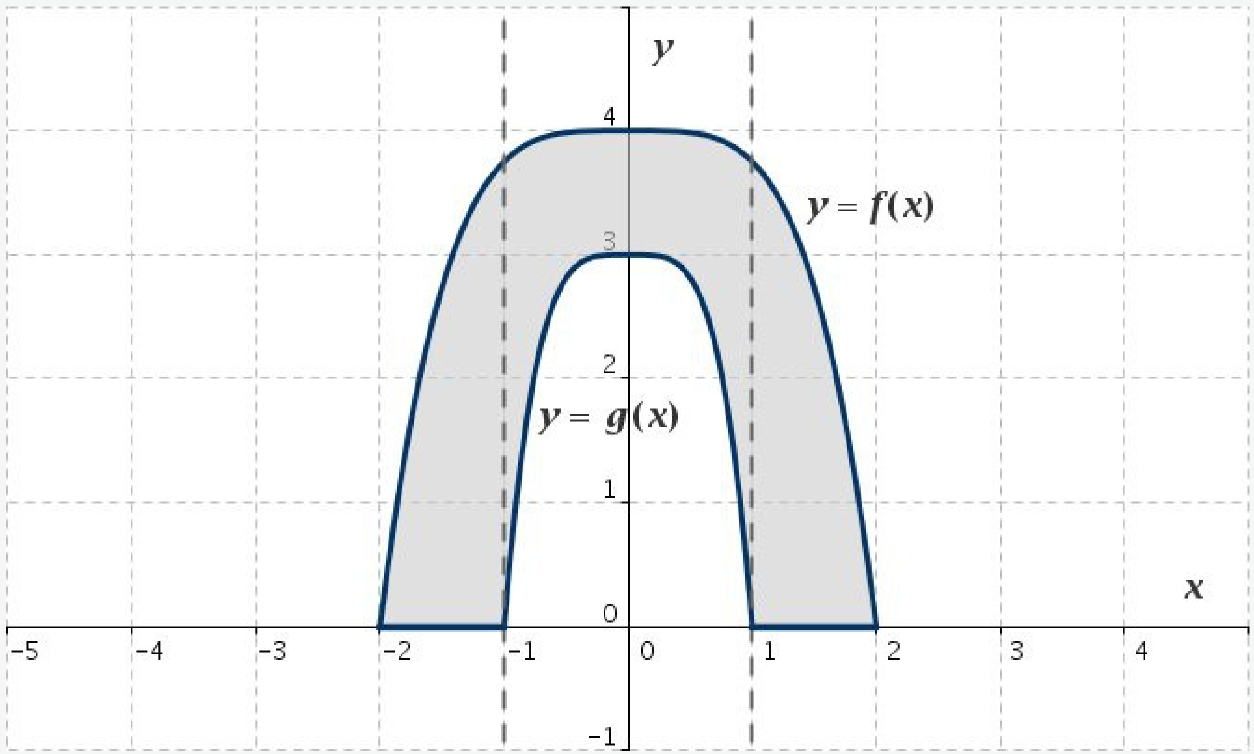

Abb. 1-2b: Die zwischen den Funktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ und der x-Achse eingeschlossene Fläche

$$A = 2 \int_{x=0}^{1} dx \int_{y=g(x)}^{f(x)} dy + 2 \int_{x=1}^{2} dx \int_{y=0}^{f(x)} dy$$

$$A = 2 \int\limits_{x=0}^{1} dx \int\limits_{y=3-3x^4}^{4-\frac{x^4}{4}} dy \; + \; 2 \int\limits_{x=1}^{2} dx \int\limits_{y=0}^{4-\frac{x^4}{4}} dy \; =$$

$$= 2 \int\limits_{x=0}^{1} \left(2 + \frac{11}{2} x^4 \right) dx + 2 \int\limits_{x=1}^{2} \left(4 - \frac{x^4}{4} \right) dx = \frac{31}{10} + \frac{49}{10} = 8 \;\; (\mathrm{FE})$$