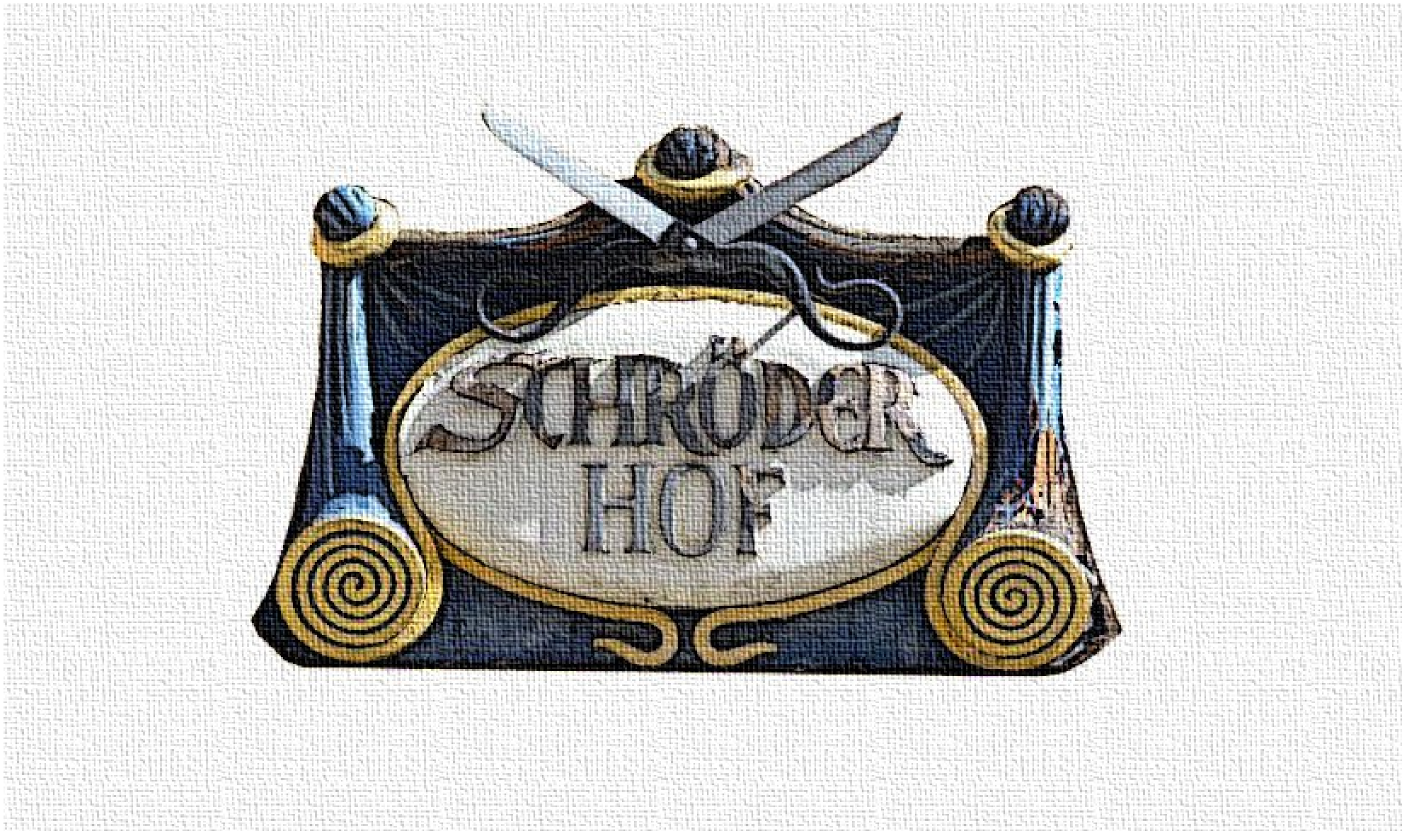


*Flächeninhalt: Aufgaben 10-18*

# Flächeninhalt: Aufgaben 10-13

Gesucht ist die Fläche, die durch die folgenden Funktionen begrenzt wird:

Aufgabe 10:

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 3, \qquad y = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3\pi$$

Aufgabe 11:

a) $f(x) = 3 + \frac{3}{5}\,|\sin x|, \qquad y = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 4\pi$

b) $f(x) = 4 + |\sin x|, \qquad y = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

Aufgabe 12:

$$f(x) = \frac{1}{2}\,|\cos x| - \frac{1}{2}, \qquad g(x) = 2\,|\cos x|$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

Aufgabe 13: $x = y^2, \qquad x = 1$

# Flächeninhalt: Aufgaben 14-17

**Aufgabe 14:**

$$f(x) = 4 + \cos x, \quad g(x) = 2 - \cos x, \quad I = [\pi, 3\pi]$$

**Aufgabe 15:**

$$f(x) = 2 - \cos x, \quad g(x) = 2 + \cos x, \quad I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

**Aufgabe 16:**

$$f(x) = 2 - \cos x, \quad g(x) = 2 + \cos x, \quad I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$$

**Aufgabe 17:**

$$f(x) = |\cos x|, \quad g(x) = 2 + \cos x, \quad I = [-\pi, \pi]$$

http://www.flickr.com/photos/sigfrid/3338725528/

*Abb. L10-1: Typ einer Fläche der Aufgabe*


*Abb. L10-2: Die Fläche A zwischen der Funktion y = f (x) und x-Achse (0 ≤ x ≤ 3 π)*

$$A = \int_{x=0}^{3\pi} \int_{y=0}^{3+\sin(x/2-1)} dy\ dx = \int_0^{3\pi} \left( 3 + \sin\left( \frac{x}{2} - 1 \right) \right) dx =$$

$$= 9\pi + 2\ (\cos(1) + \sin(1)) \simeq 31.038\ (\text{FE})$$

http://www.flickr.com/photos/sigfrid/162996901/

*Abb. L11a-1: Typ einer Fläche der Aufgabe*

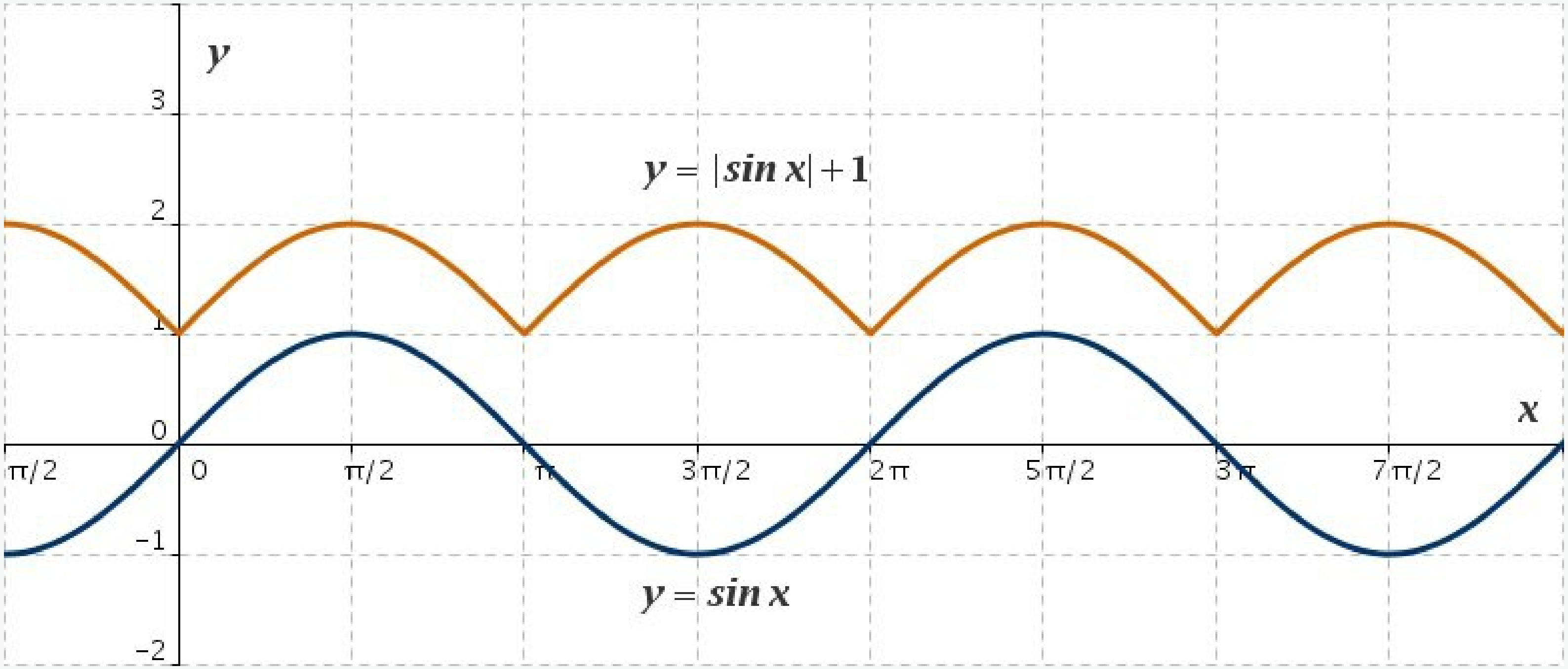


*Abb. L11a-2: Funktionen $y = \sin x$ und $y = |\sin x| + 1$*


*Abb. L11a-3: Die Fläche A zwischen der Funktion y = f (x) und x-Achse (0 ≤ x ≤ 4 π)*

$$f\,(x) = 3 + \frac{3}{5}\,|\,\sin x\,|, \qquad y = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 4\,\pi$$

$$A = \int\limits_{x=0}^{4\,\pi} \int\limits_{y=0}^{3+0.\,6\,|\,\sin x\,|} dy\,dx = 4 \int\limits_{x=0}^{\pi} \int\limits_{0}^{3+0.\,6\,\sin x} dy\,dx = 12 \int\limits_{x=0}^{\pi} \left(1 + \frac{1}{5}\,\sin x\right) dx\,dy =$$

$$= \frac{24}{5} + 12\,\pi = 42.499$$

# Flächeninhalt: Lösung 11b

*Abb. L11b: Typ einer Fläche A der Aufgabe*

$$A = \int_{x=0}^{2\pi} \int_{y=0}^{4+|\sin x|} dy\ dx = 2 \int_{x=0}^{\pi} \int_{y=0}^{4+\sin x} dy\ dx = 2 \int_{x=0}^{\pi} (4 + \sin x)\ dx =$$

$$= 4\ (1 + 2\pi) \simeq 29.133$$

http://farm4.static.flickr.com/3253/3989154121_daa85ec12b.jpg

*Abb. L12-1: Typ einer Fläche der Aufgabe*

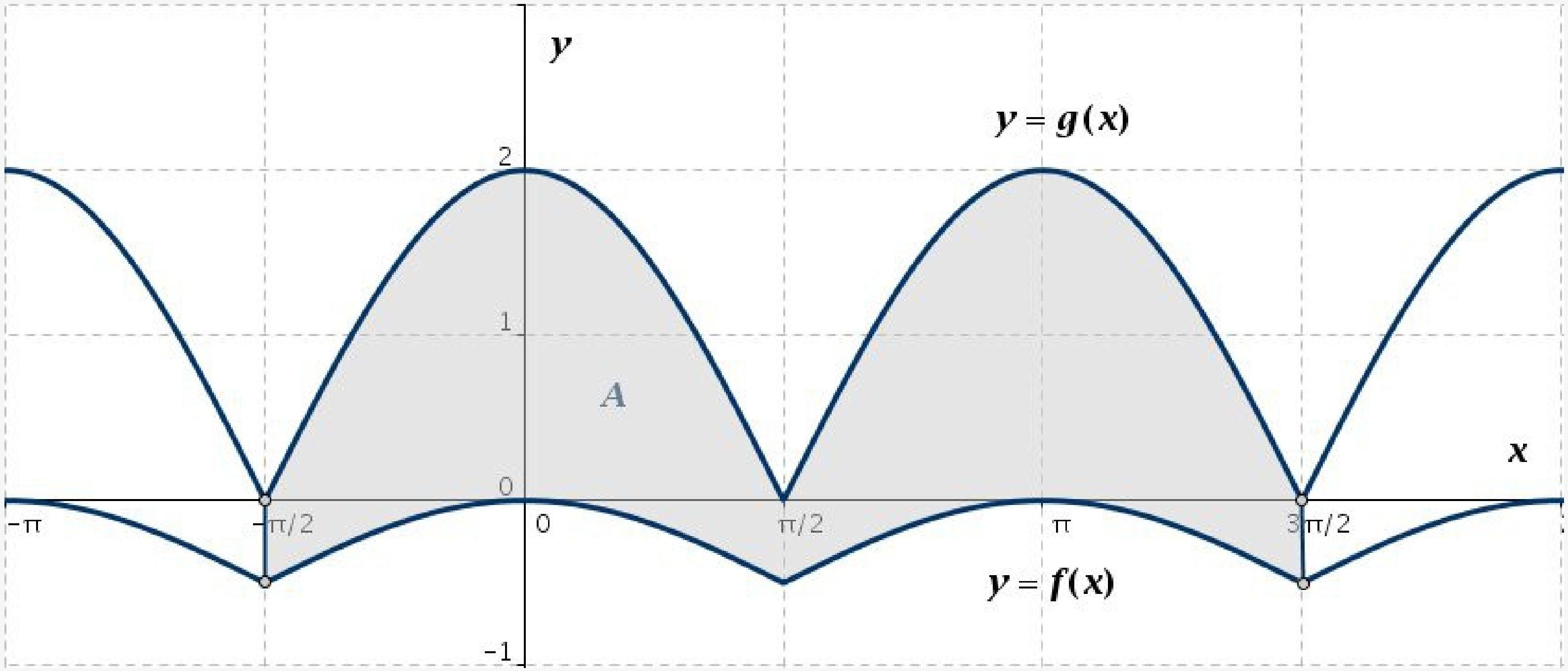


*Abb. L12-2: Die Fläche A zwischen den Funktionen f (x) = 0.5 | cos x | - 0.5 und g (x) = 2 | cos x |*

$$A = \int_{x=-\pi/2}^{3\pi/2} \int_{y=1/2\,|\cos x|-1/2}^{2\,|\cos x|} dy\ dx = 2 \int_{x=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{y=1/2\cos x - 1/2}^{2\cos x} dy\ dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x=-\pi/2}^{\pi/2} (3\cos x + 1)\ dx = 6 + \pi \simeq 9.14 \quad (\text{FE})$$

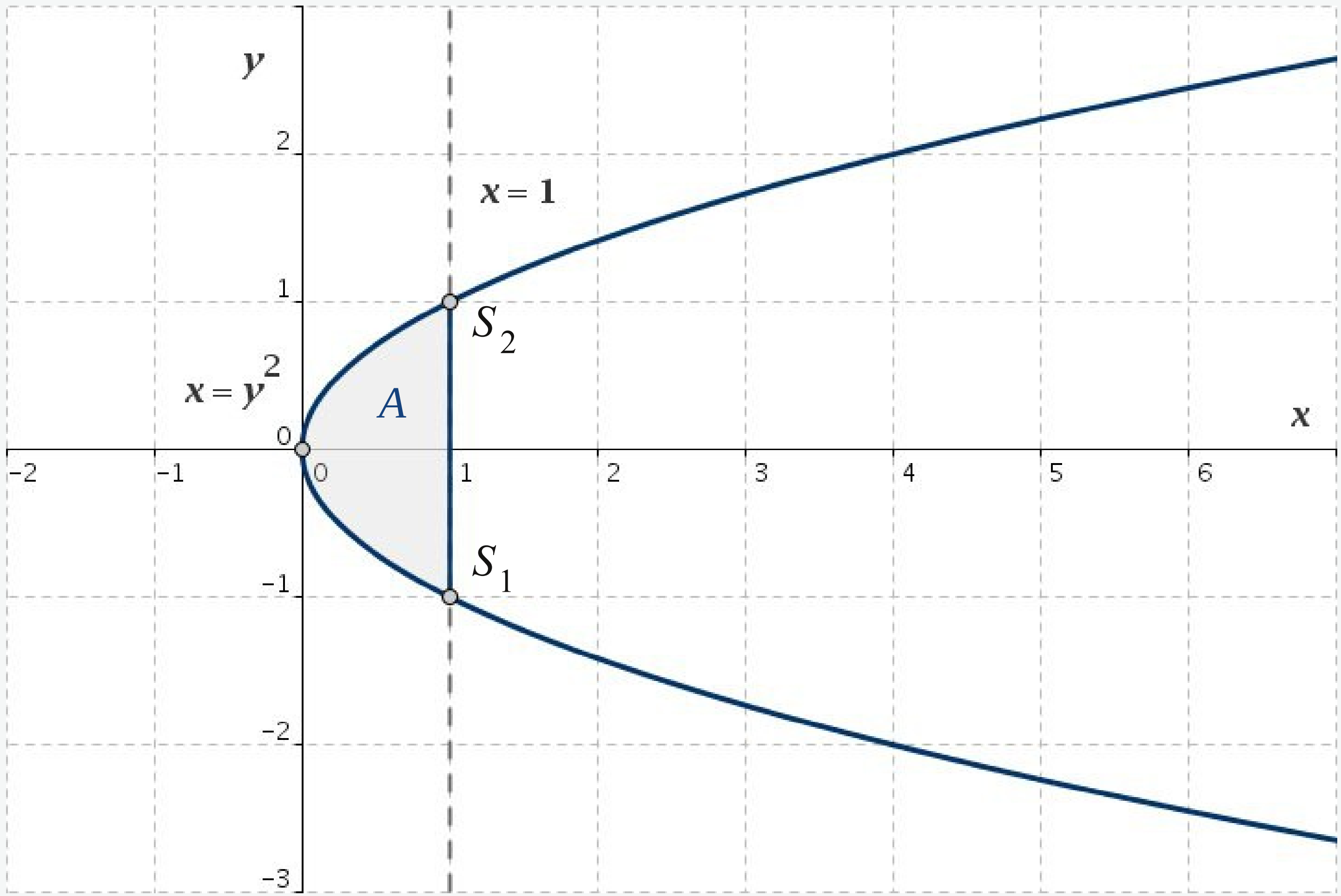


*Abb. L13: Die Fläche A zwischen den Funktionen y = x² und x = 1*

$$x = 1\,, \quad x = y^2\,, \qquad S_1 = (1,\,-1)\,, \qquad S_2 = (1,\,1)$$

1 Variante:

$$A = \int\limits_{x=0}^{1} dx \int\limits_{y=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy = 2 \int\limits_{x=0}^{1} dx \int\limits_{y=0}^{\sqrt{x}} dy = 2 \int\limits_{0}^{1} \sqrt{x}\, dx = \frac{4}{3} \quad (\text{FE})$$

2 Variante:

$$A = \int\limits_{y=-1}^{1} dy \int\limits_{x=y^2}^{1} dx = 2 \int\limits_{0}^{1} (1 - y^2)\, dy = \frac{4}{3} \quad (\text{FE})$$

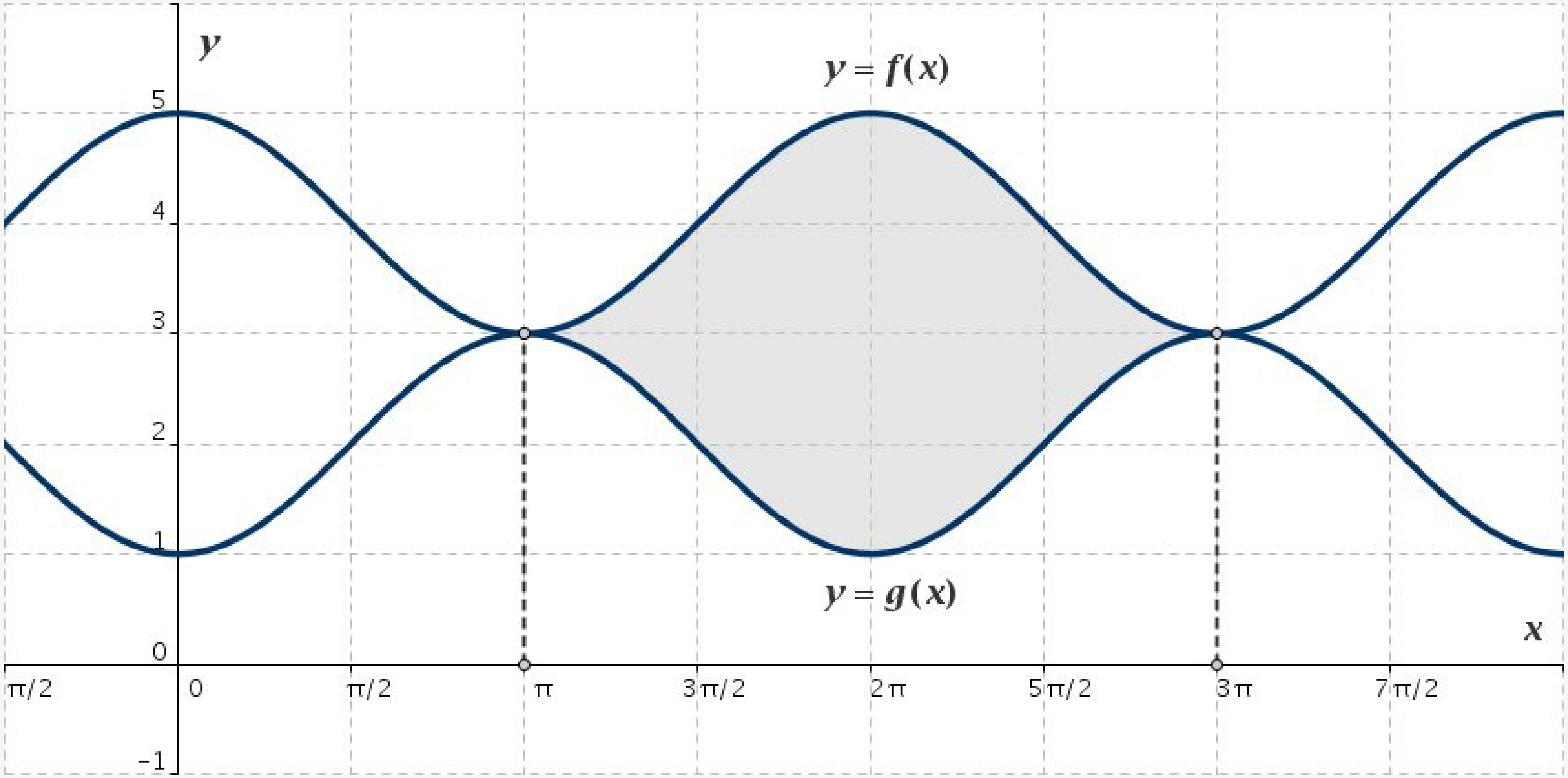


*Abb. L14: Die Fläche zwischen den Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ im Intervall $I = [\pi, 3\pi]$*

$$f(x) = 4 + \cos x\,, \quad g(x) = 2 - \cos x\,, \quad I = [\pi\,,\ 3\pi]$$

$$A = \int_{x=\pi}^{3\pi} \int_{y=g(x)}^{f(x)} dy\,dx = \int_{x=\pi}^{3\pi} \int_{y=2-\cos x}^{4+\cos x} dy\,dx = 2\int_{\pi}^{3\pi} (1 + \cos x)\,dx = 4\pi \simeq 12.57\ \text{(FE)}$$

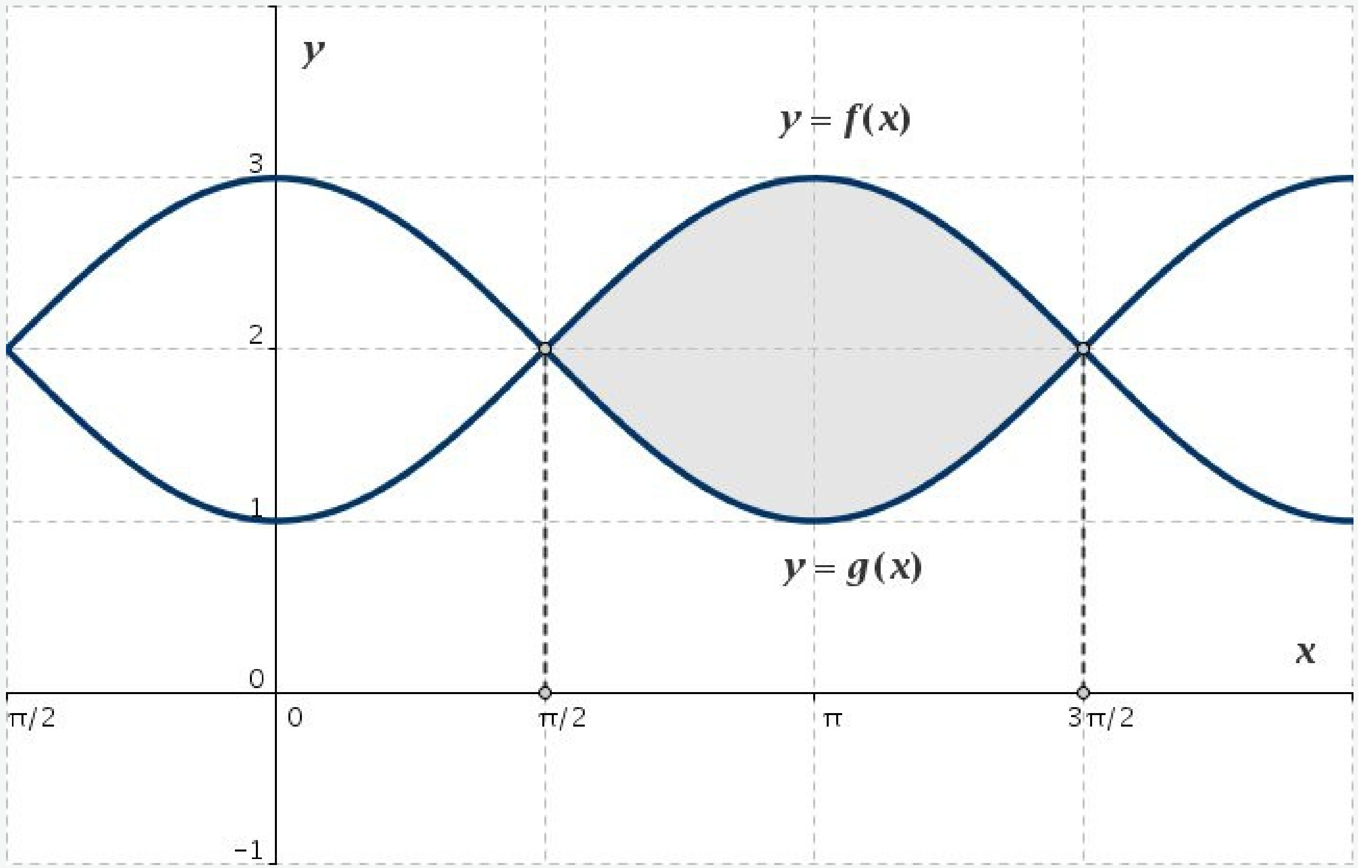


*Abb. L15: Die Fläche zwischen den Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ im Intervall $I$*

$$f(x) = 2 - \cos x\,, \quad g(x) = 2 + \cos x\,, \quad I = \left[\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$A = \int_{x=\pi/2}^{3\pi/2} \int_{y=g(x)}^{f(x)} dy\, dx = \int_{x=\pi/2}^{3\pi/2} \int_{y=2+\cos x}^{2-\cos x} dy\, dx = -2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x\ dx = 4\ (\text{FE})$$

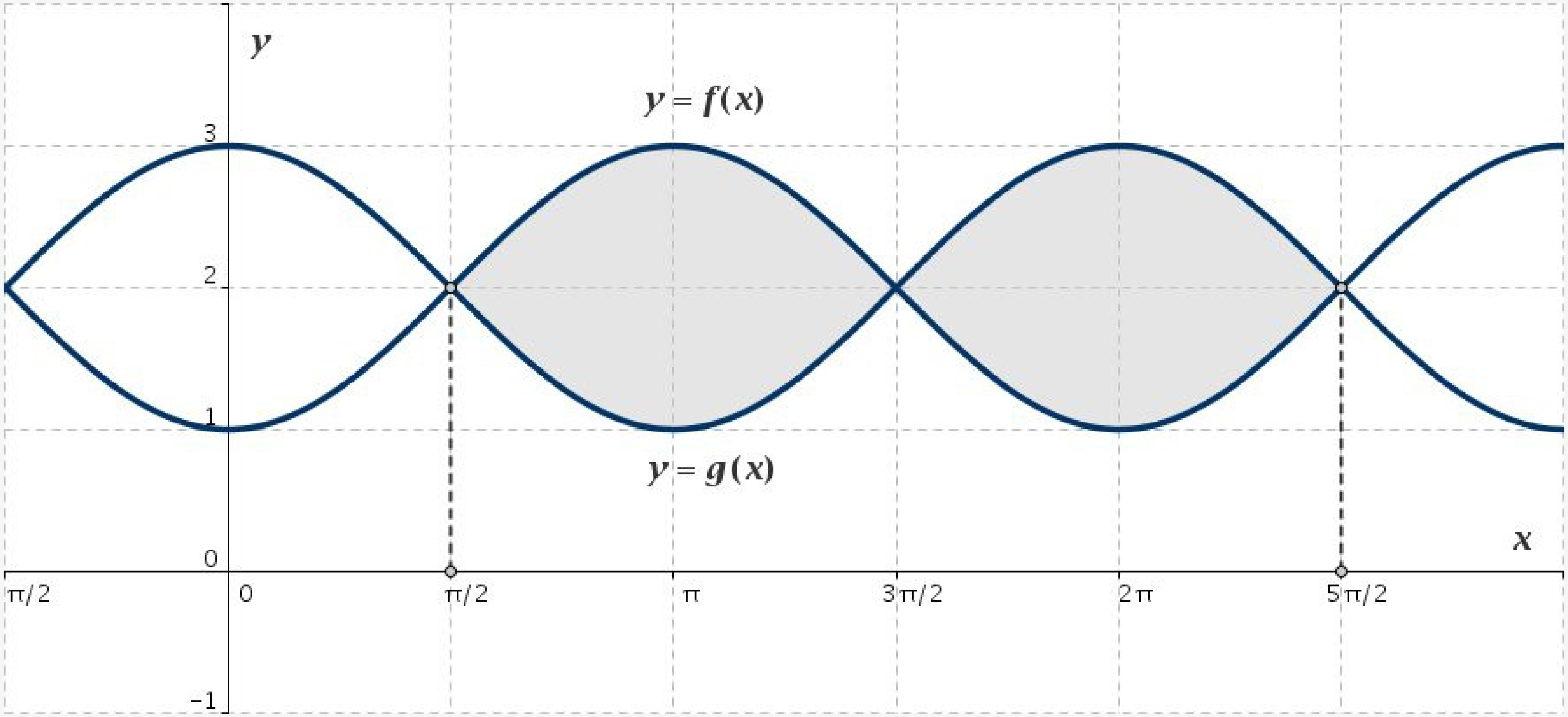


*Abb. L16-1: Die Fläche zwischen den Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ im Intervall $I$*

$$f(x) = 2 - \cos x\,, \quad g(x) = 2 + \cos x\,, \quad I = \left[\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{5\,\pi}{2}\right]$$

$$A = \int_{x=\pi/2}^{3\pi/2} \int_{y=g(x)}^{f(x)} dy\,dx + \int_{x=3\pi/2}^{5\pi/2} \int_{y=f(x)}^{g(x)} dy\,dx = 2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{y=g(x)}^{f(x)} dy\,dx = 8\ (\mathrm{FE})$$

*Abb. L16-2: Der Flächentyp der Aufgabe (Haus, Fragment, Celle)*

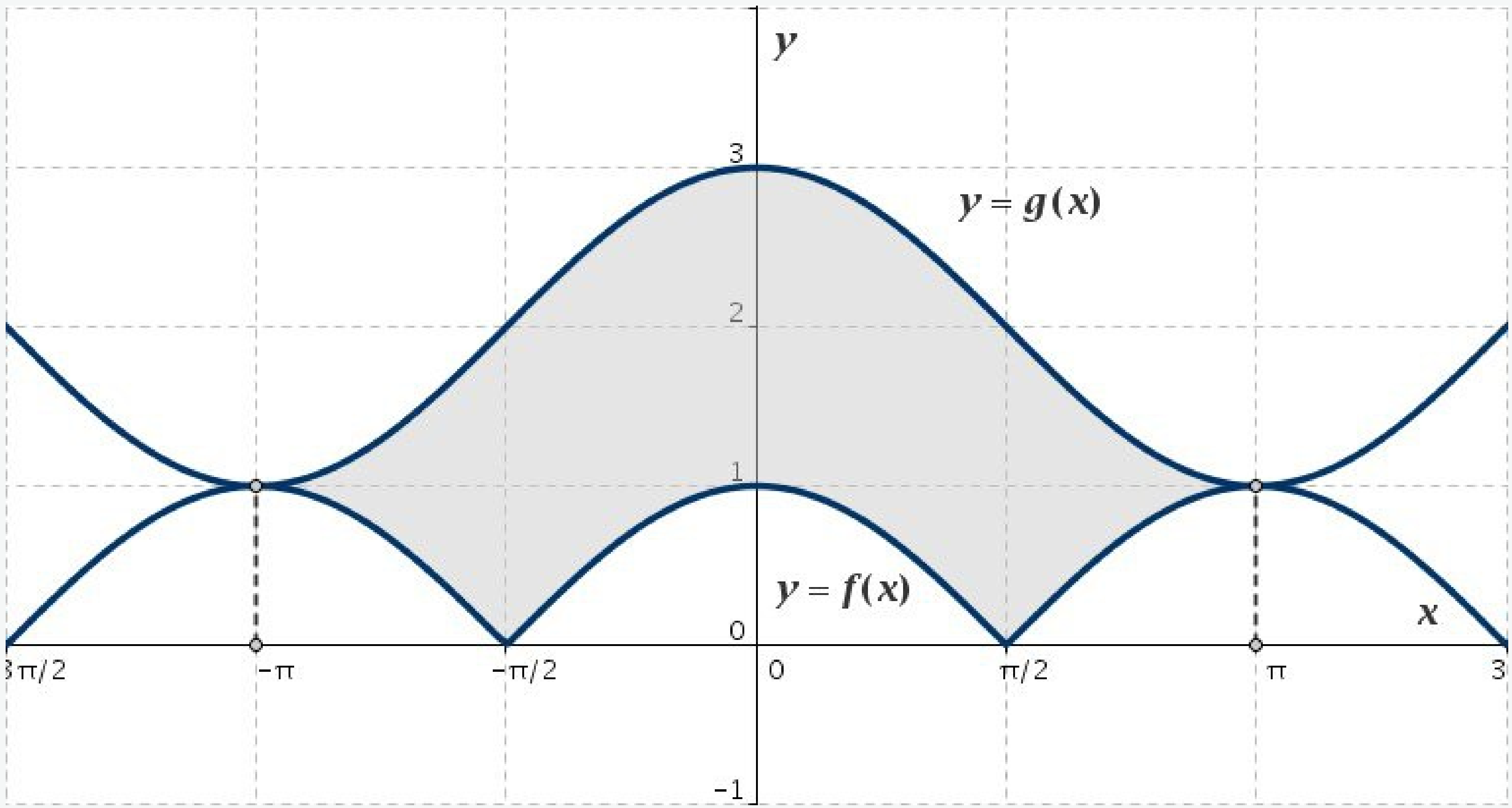


*Abb. L17-1: Die Fläche zwischen den Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ im Intervall $I$*

$$f(x) = |\cos x|, \quad g(x) = 2 + \cos x, \quad I = [-\pi, \pi]$$

$$A = \int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=f(x)}^{g(x)} dy\, dx = \int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=|\cos x|}^{2+\cos x} dy\, dx$$

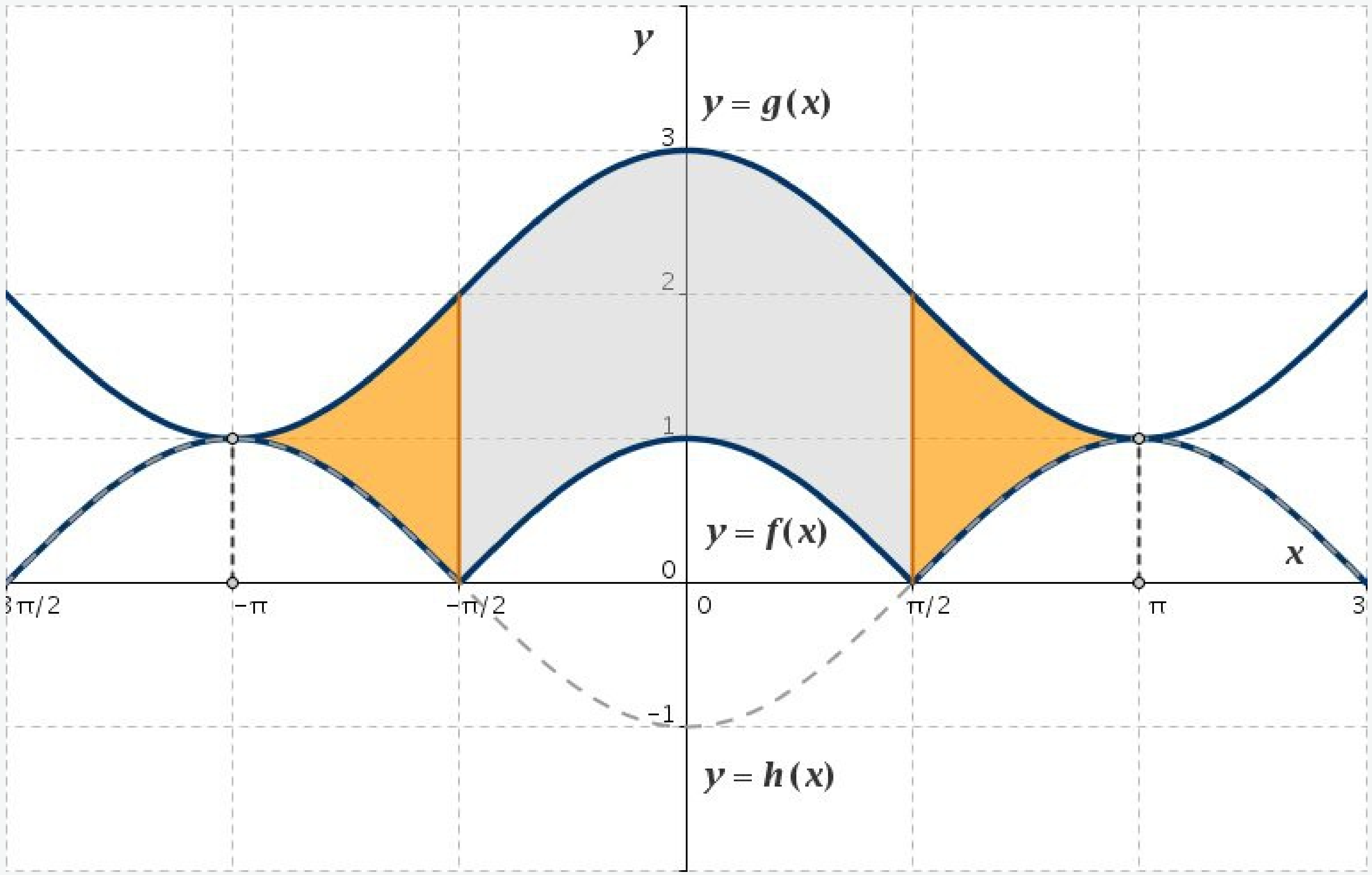


*Abb. L17-2: Die Fläche der Aufgabe mit drei Integrationsbereichen*

$$f(x) = |\cos x|, \quad g(x) = 2 + \cos x, \quad I = [-\pi, \pi]$$

$$A = \int\limits_{x=-\pi}^{\pi} \int\limits_{y=|\cos x|}^{2+\cos x} dy\, dx =$$

$$= \int\limits_{x=-\pi}^{-\pi/2} \int\limits_{y=-\cos x}^{2+\cos x} dy\, dx + \int\limits_{x=-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_{y=\cos x}^{2+\cos x} dy\, dx + \int\limits_{x=\pi/2}^{\pi} \int\limits_{y=-\cos x}^{2+\cos x} dy\, dx =$$

$$= \int\limits_{x=-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_{y=\cos x}^{2+\cos x} dy\, dx + 2 \int\limits_{x=\pi/2}^{\pi} \int\limits_{y=-\cos x}^{2+\cos x} dy\, dx =$$

$$= 2 \int\limits_{x=-\pi/2}^{\pi/2} dx + 4 \int\limits_{x=\pi/2}^{\pi} (1 + \cos x)\, dx =$$

$$= 2\pi + (2\pi - 4) \simeq 8.57 \quad (\text{FE})$$