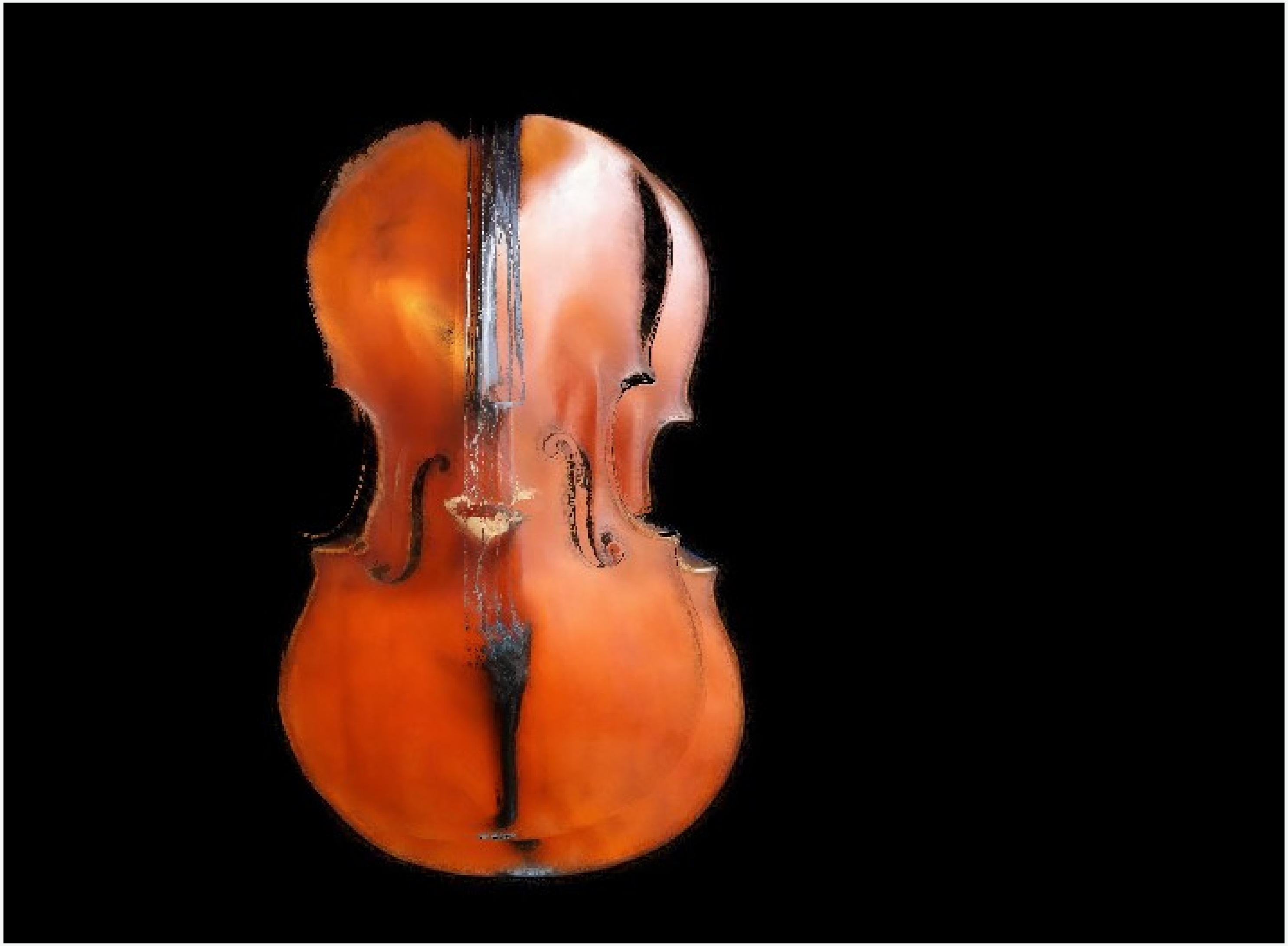
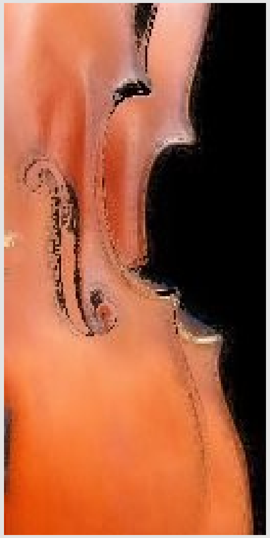


Mehrfachintegrale


FUJI RTP



Die Erweiterung des Integralbegriffs führt zu den Mehrfachintegralen, die in den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen u.a. bei der Berechnung der folgenden Größen auftreten:

– Flächeninhalt

– Schwerpunkt einer Fläche

– Flächenmomente

– Volumen und Masse eines Körpers

– Schwerpunkt eines Körpers

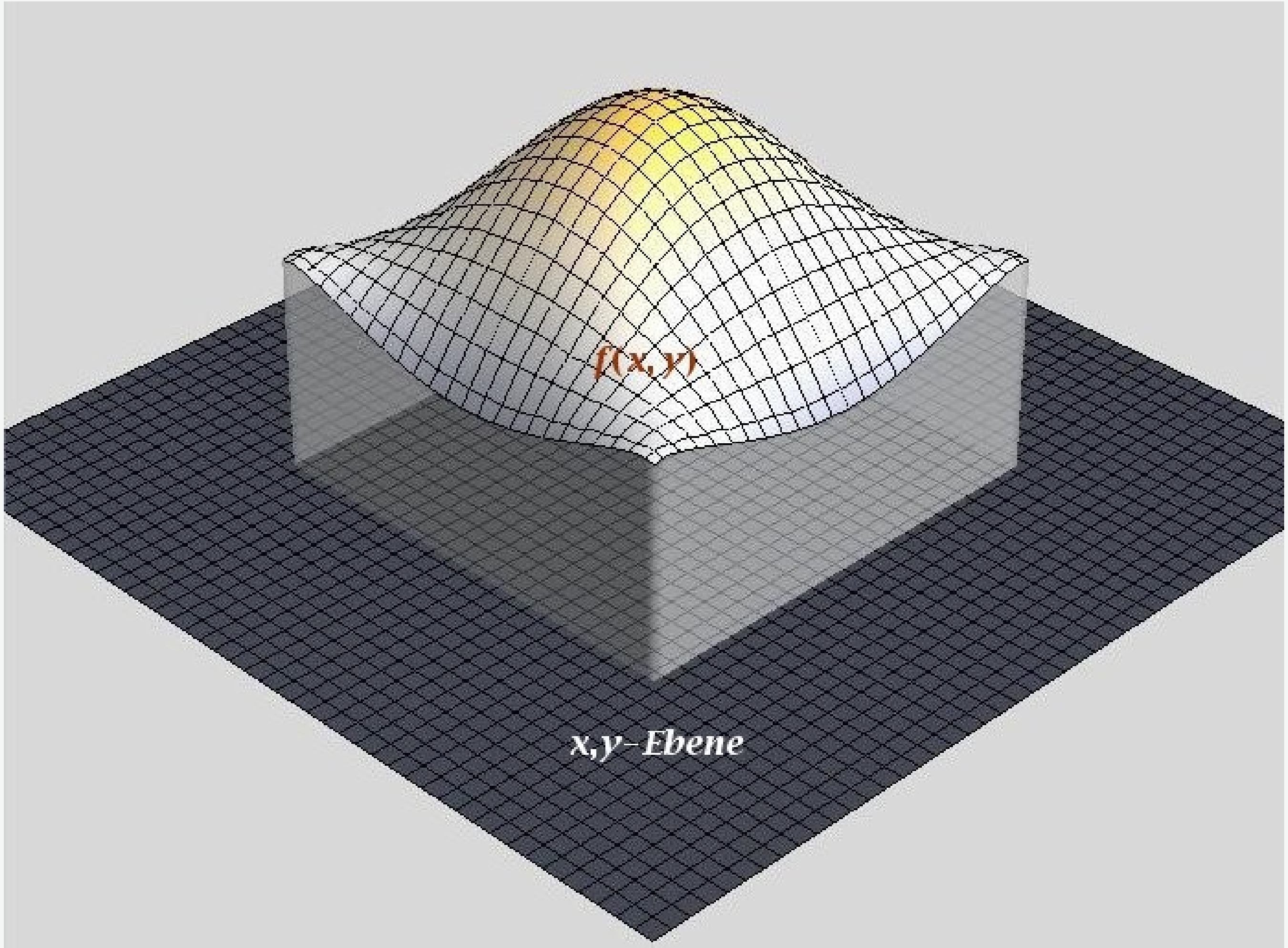


Abb. 1-1: Fläche einer Funktion $z = f(x, y)$ über einem rechteckigen Bereich und die x,y-Ebene

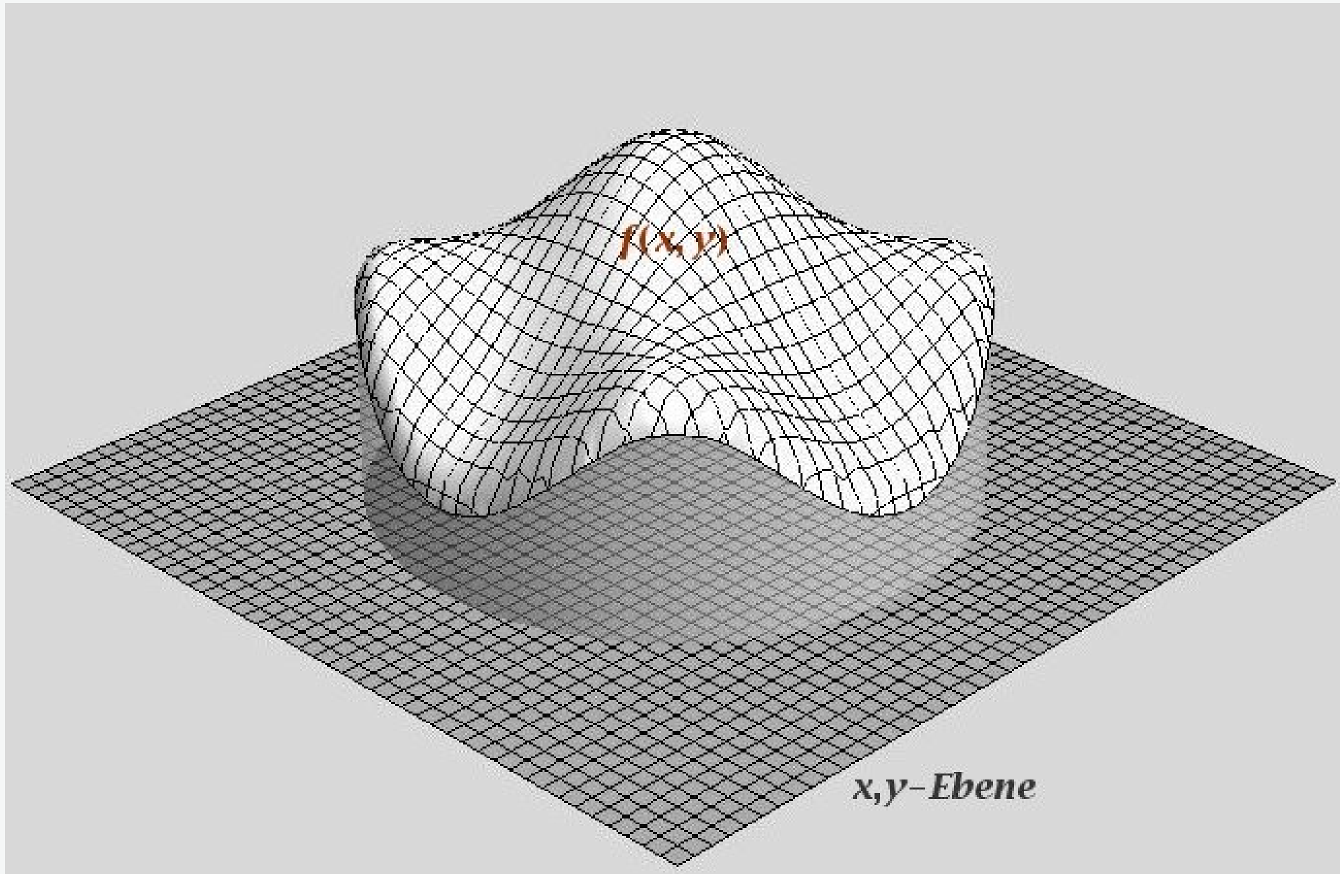


Abb. 1-2: Fläche einer Funktion $z = f(x, y)$ über einem kreisformigen Bereich und die x,y-Ebene

Unser Ziel ist es, das Doppelintegral über dem Bereich D zu definieren

$$\iint_R f(x, y)\, dy\, dx$$

Abb. 2-1: Fläche zwischen der Funktion y = f(x) und der x-Achse im Intervall [*a, b*]

Die Lösung solcher Aufgaben, wie z.B. die Fläche zwischen einer Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse zu bestimmen, führte uns zum Begriff eines bestimmten Integrals.

Wiederholung: Das bestimmte Integral als Flächeninhalt

Um eine anschauliche Deutung des Integralbegriffs zu geben, setzen wir voraus, dass

- $y = f(x)$ eine stetige Funktion ist;
- $y = f(x)$ im gesamten Intervall $a \leq x \leq b$ oberhalb der x-Achse verläuft.

Wir zerlegen die Fläche unter der Kurve durch Schnitte parallel zur y-Achse in n Streifen gleicher Breite Δx.

Jeder Streifen wird durch ein Rechteck ersetzt. Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist einfach zu berechnen, z.B.:

$$f_{min} \, \Delta x \leqslant A \leqslant f_{max} \, \Delta x$$

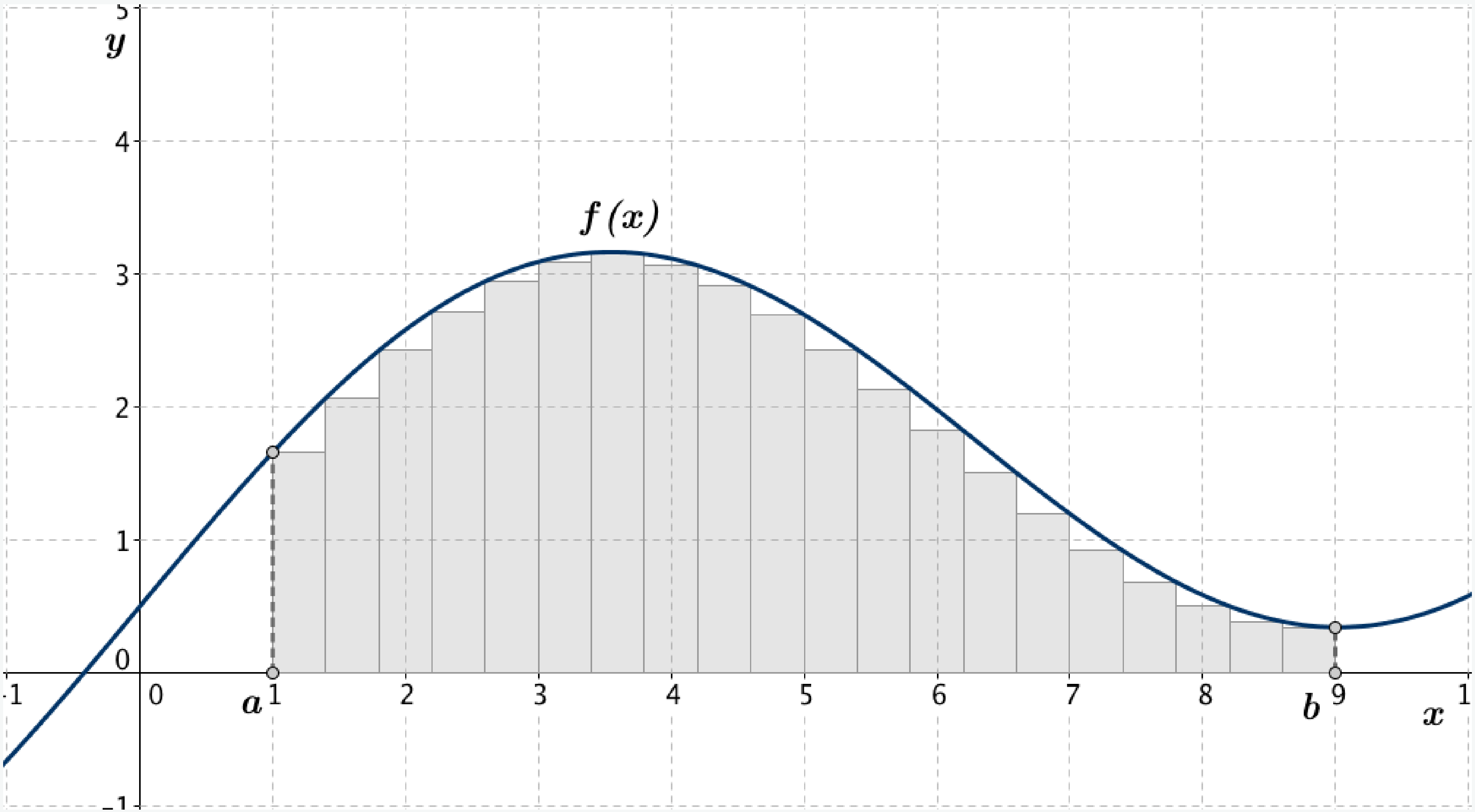


Abb. 2-2: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall [a, b] ($n = 20$, Untersumme)

Wir ersetzen jeden Streifen durch ein Rechteck, dessen Höhe dem minimalen Funktionswert entspricht. Die Summe dieser Rechtecksflächen bezeichnen wir als Untersumme.

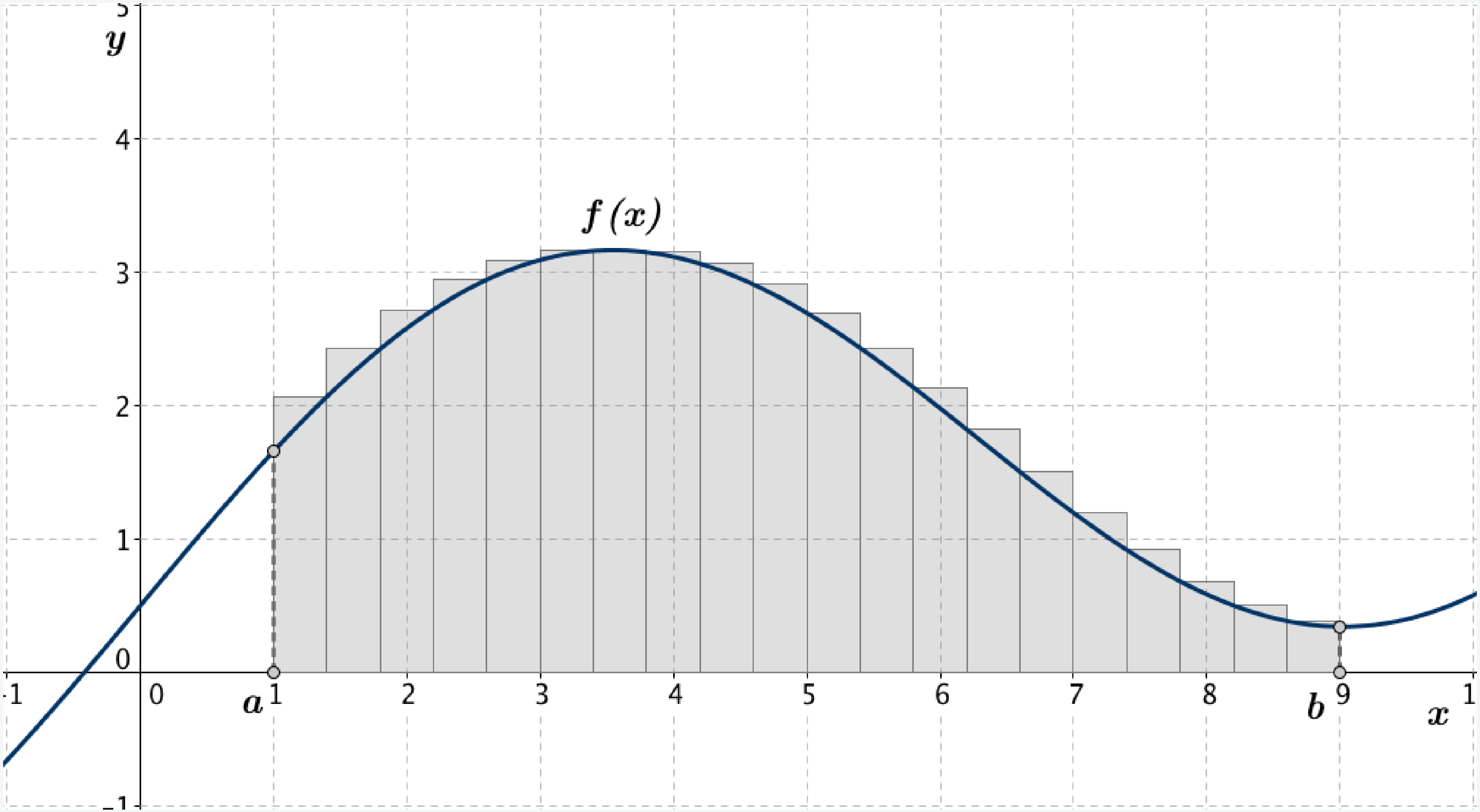


Abb. 2-3: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ ($n = 20$, Obersumme)

Wir ersetzen jeden Streifen durch ein Rechteck, dessen Höhe dem maximalen Funktionswert entspricht. Die Summe dieser Rechtecksflächen bezeichnen wir als Obersumme.

Der gesuchte Flächeninhalt A liegt dabei zwischen Unter- und Obersumme: $U \leq A \leq O$.

Danach waren wir in der Lage, das Integral als diejenige eindeutig bestimmte Zahl I zu definieren, die die Ungleichung

$$U \leqslant I \leqslant O$$

für alle Zerlegungen P des Intervalls $[a, b]$ erfüllte.

Der Grenzwert, der zum bestimmten Integral führt, wird wie folgt gebildet:

1. Schritt:

Das Intervall $[a, b]$ wird durch $n - 1$ beliebige Teilpunkte in n Elementarintervalle zerlegt:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

2. Schritt:

Im Inneren jedes der Elementarintervalle wird eine Zahl ausgewählt:

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$$

3. Schritt:

Die Werte der Funktion $f(x)$ in diesen Punkten werden mit den Längen der Teilintervalle multipliziert

$$f(\xi_i)\, \Delta x_i, \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

4. Schritt: Alle n Produkte $f(\xi_i)\, \Delta x_i$ werden addiert.

Von der Zerlegungssumme (Riemann-Summe): $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i$

wird der Grenzwert für den Fall berechnet: $\Delta x_i \to 0, \quad n \to \infty$

Wenn dieser Grenzwert existiert und unabhängig ist von der Wahl der Zahlen x_i und ξ_i, dann heißt er das bestimmte Riemannsche Integral:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\Delta x_i \to 0,\ n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i$$

Der Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)}$$

F (x) – Stammfunktion, *f (x)* – Integrand

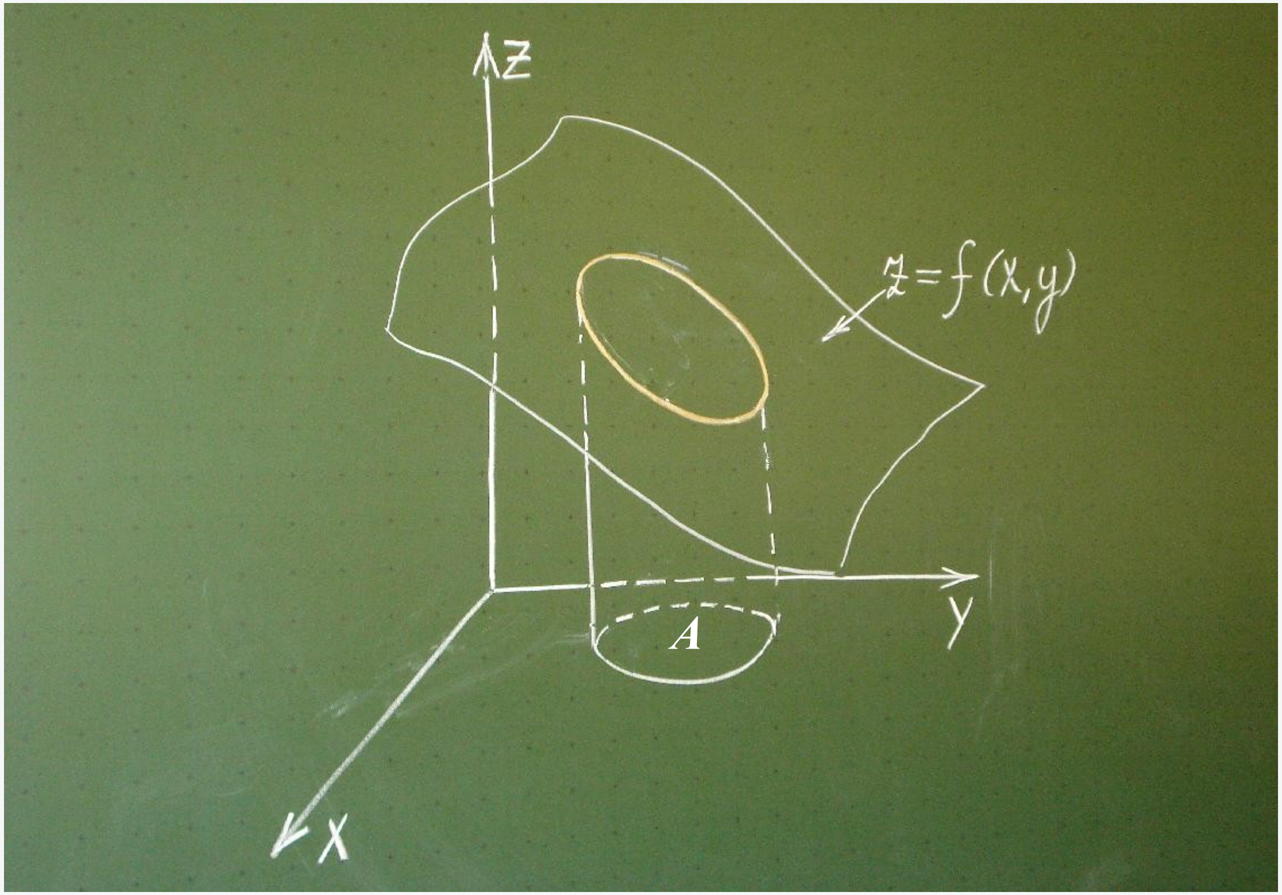


Abb. 3: Zylindrischer Körper mit der "Deckelfläche $z = f(x, y)$

Das Doppelintegral einer Funktion von zwei Variablen $z = f(x, y)$ über einem Flächenstück A wird folgendermaßen geschrieben

$$\int_A f(x, y)\, dA = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy$$

Der Zahlenwert des Doppelintegrals einer Funktion $f = f\,(x, y)$ wird auf folgende Weise ermittelt:

1. Beliebige Zerlegung der Fläche A in n Elementarflächen.

2. Auswahl eines beliebigen Punktes P im Innern einer jeden Elementarfläche.

3. Multiplikation des Funktionswertes in diesem Punkt mit dem Inhalt der entsprechenden Elementarfläche.

4. Addition aller so gewonnenen Produkte $f\,(x_i\,, y_i)\,\Delta\,A_i$.

5. Berechnung des Grenzwertes der Summe $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i$

für den Fall: $\Delta A_i \to 0, \quad n \to \infty$.

$$\int_A f(x, y)\, dA = \lim_{\Delta A_i \to 0,\ n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i$$

x, y – die Integrationsvariablen

$f(x, y)$ – der Integrand

dA – das Flächenelement

A – der Integrationsbereich

Existiert dieser Grenzwert, dann ist er unabhängig von der speziellen Zerlegung.

Abb. 4-1: Eine Schneefläche als Fläche einer stetigen Funktion $z = f(x, y)$

Existenzsatz:

Das Doppelintegral existiert, wenn die Funktion $f(x, y)$ im gesamten Integrationsgebiet stetig ist.

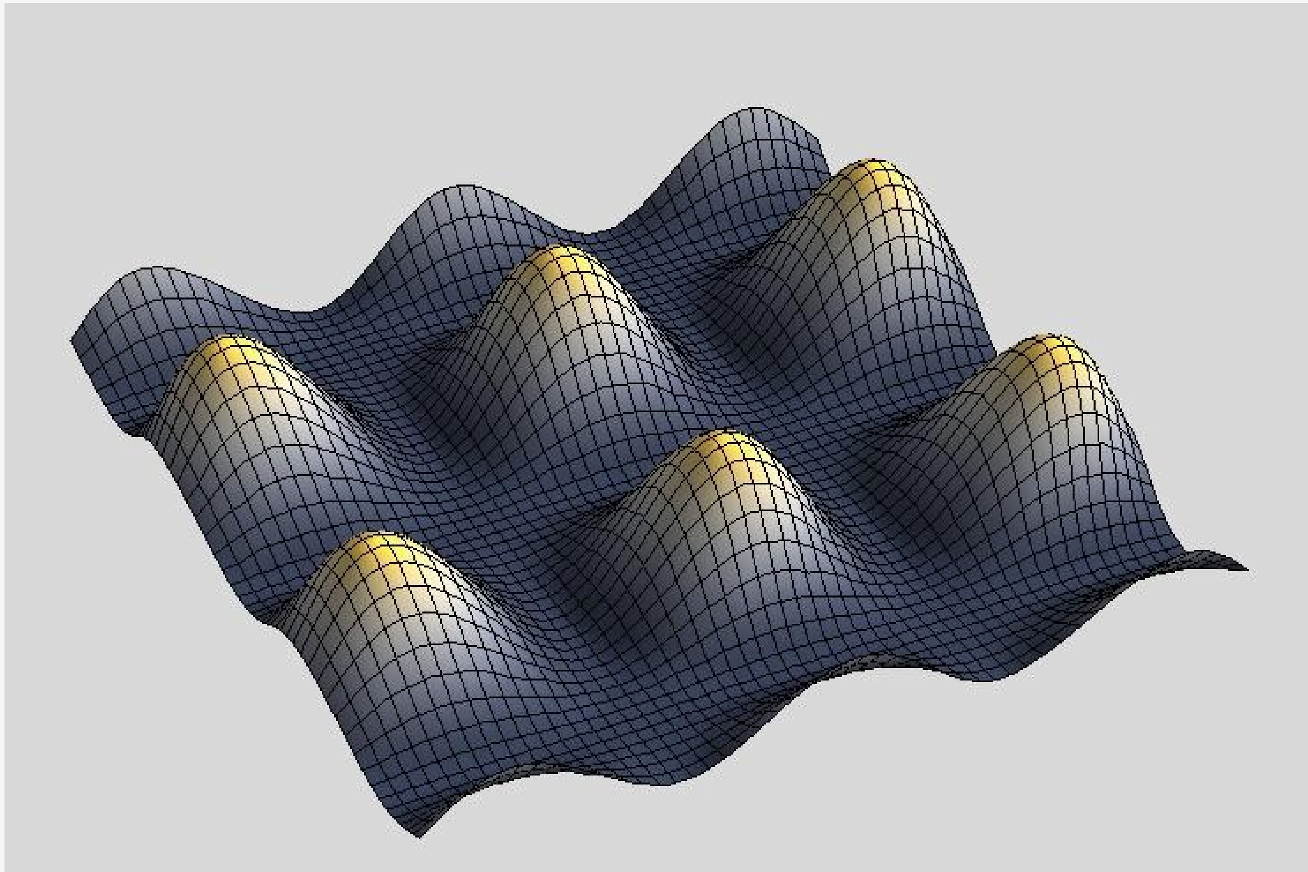


Abb. 4-2: Beispiel einer stetigen Funktion $z = f(x, y)$

$$f(x, y) = \sin^2 x \cdot \cos^2 y, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad W(f) = [0, 1]$$

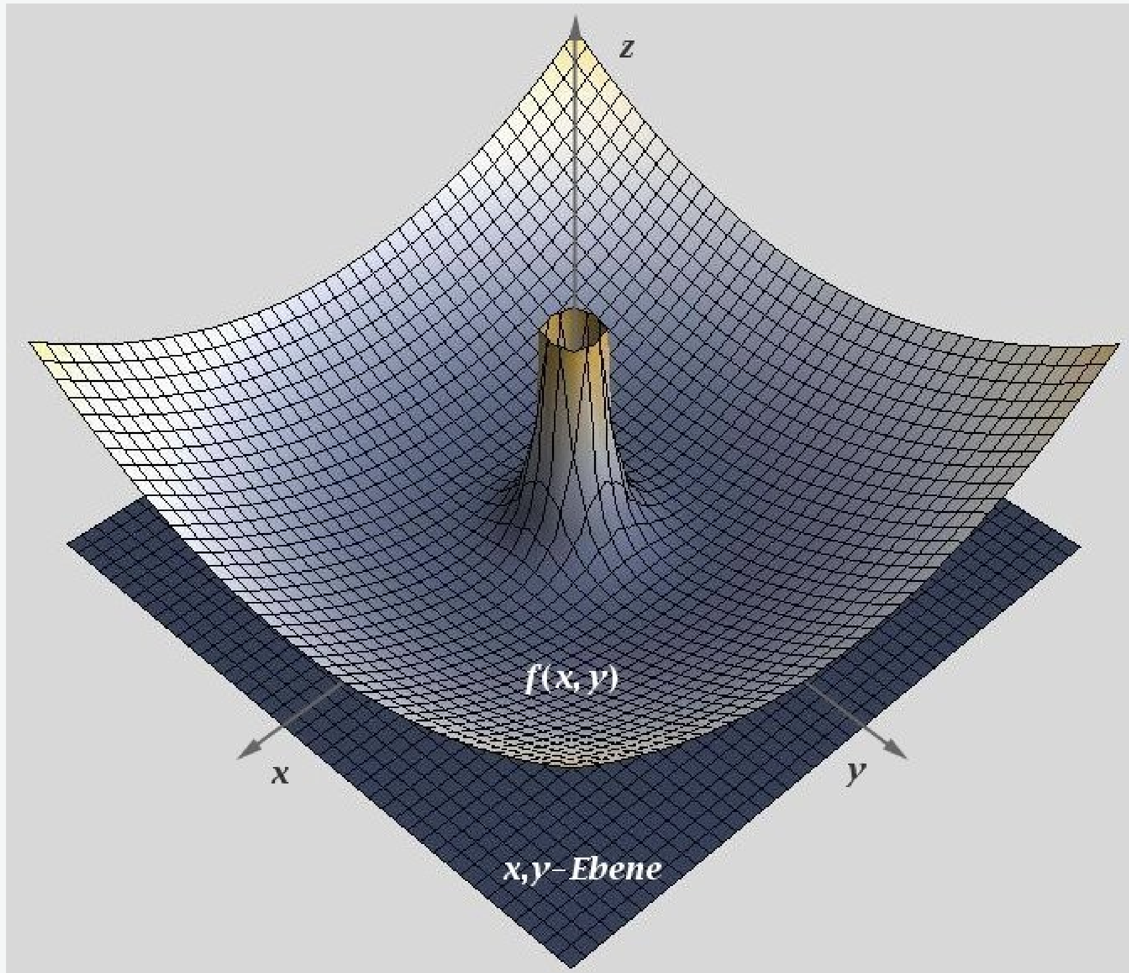


Abb. 4-3: Beispiel einer nicht stetigen Funktion $z = f(x, y)$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 + y^2}, \qquad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \qquad W = [0, \infty)$$

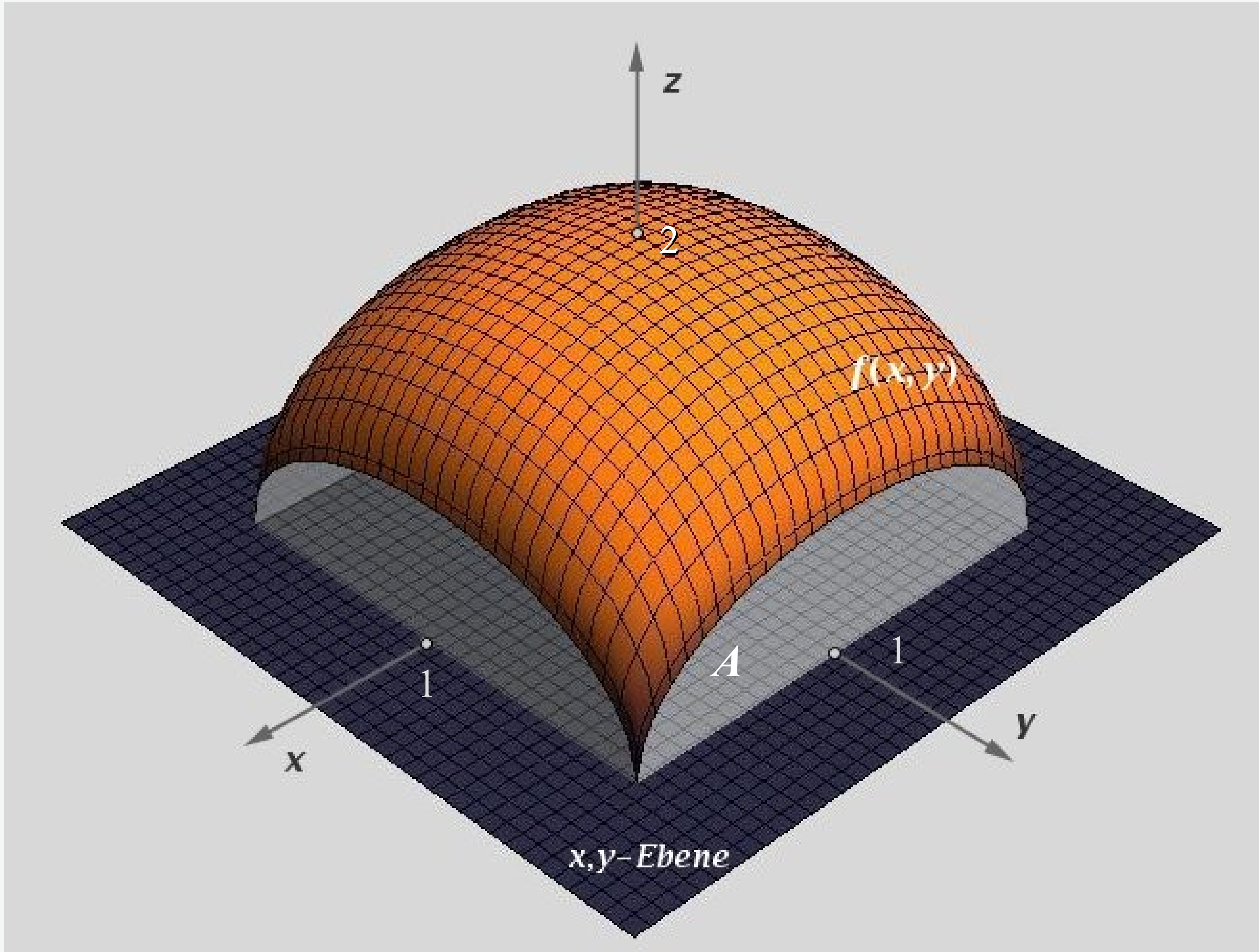
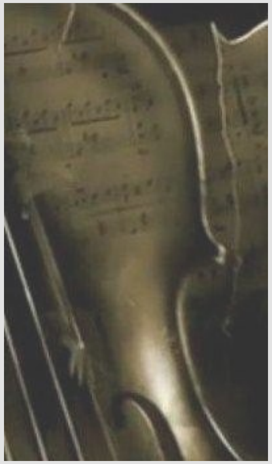


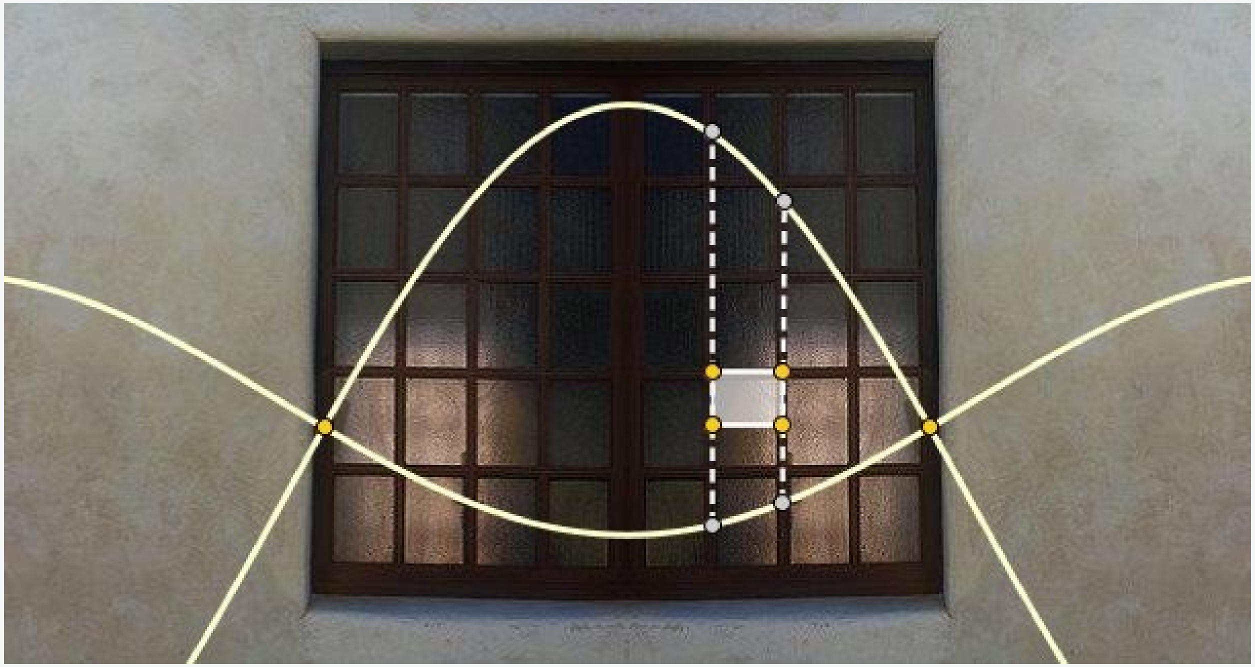
Abb. 4-4: Graphische Darstellung einer Funktion z = f (x, y) mit positiven Funktionswerten

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}, \qquad W(f) = [0, 2]$$

$$D(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1 \}$$



Die Bedingung $f\,(x, y) \geq 0$ ist für die algebraische Definition des Doppelintegrals nicht erforderlich, sondern nur für die geometrische Interpretation als Volumen zwischen dem Graphen von f und A.



Berechnung eines Doppelintegrals

Es wird gezeigt, wie man ein Doppelintegral durch zwei nacheinander auszuführende gewöhnliche Integrationen berechnen kann.

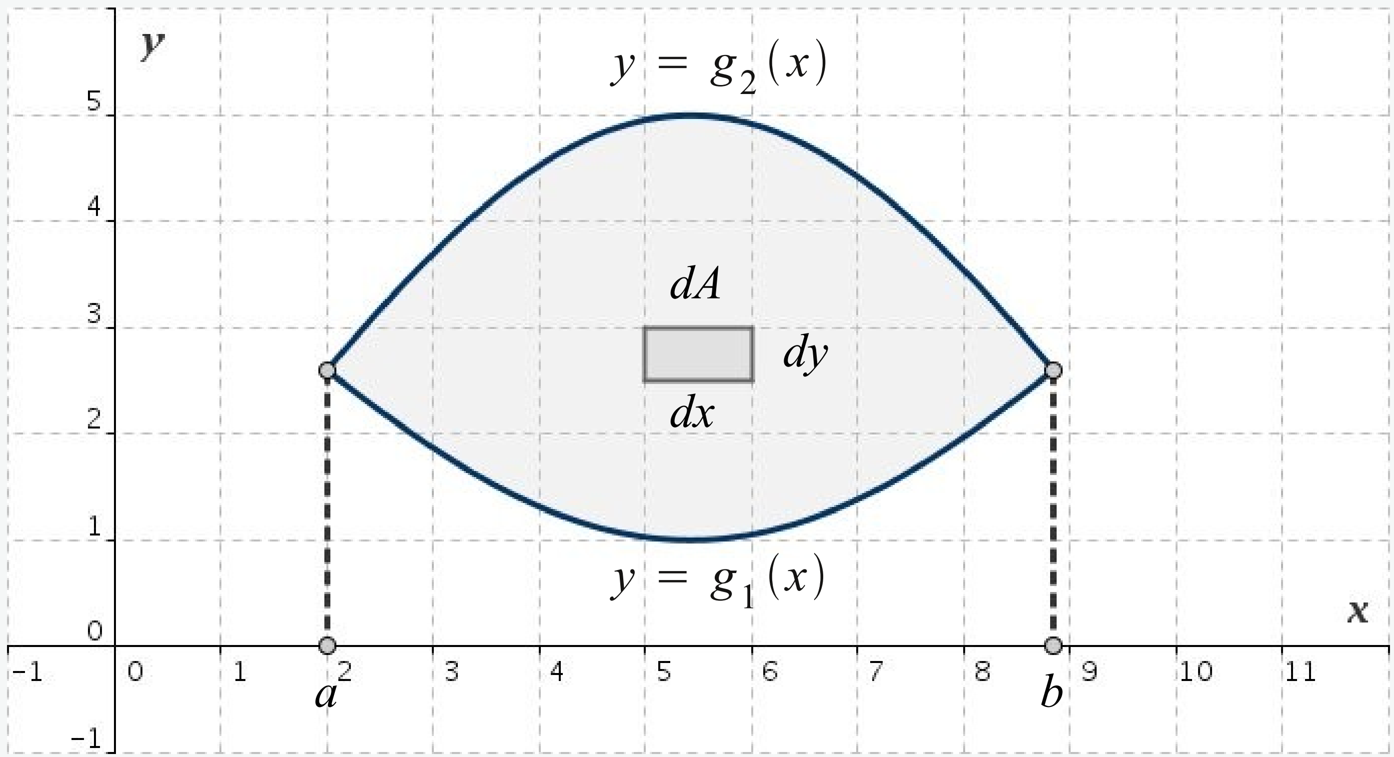


Abb. 6-1: Integrationsbereich (A) mit eingezeichnetem Flächenelement $dA = dx\,dy$

$$g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

Das Flächenelement $dA = dx\,dy$ besitzt die Form eines Rechtecks mit den infinitesimal kleinen Seitenlängen dx und dy. Über diesem Flächenelement liegt eine Säule mit dem infinitesimal kleinen Rauminhalt

$$dV = z\;dA = f(x, y)\;dx\;dy$$

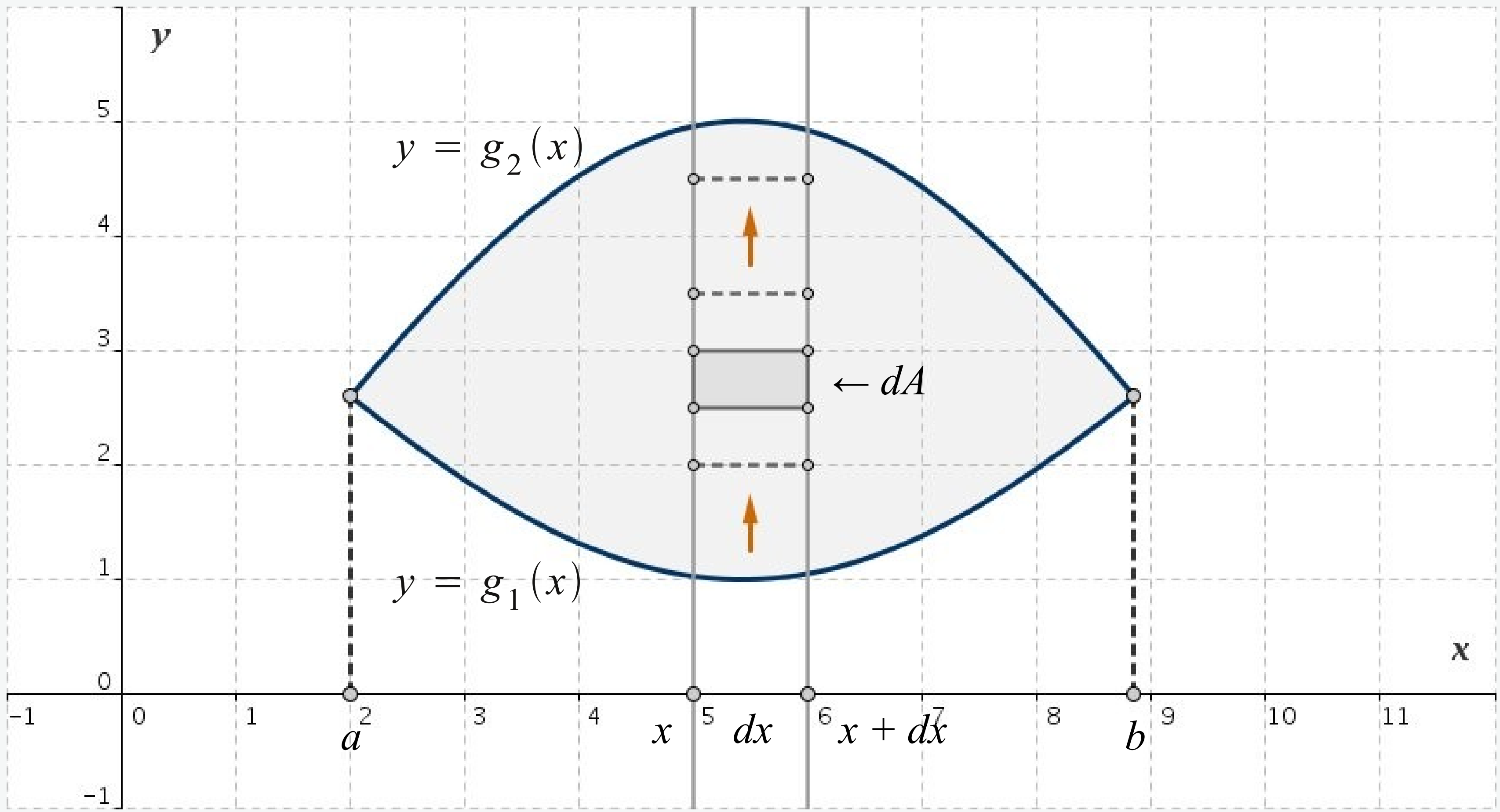


Abb. 6-2: Die über den Flächenelementen dA errichteten Säulen dV ergeben durch Summation über y eine Volumenschicht der Dicke dx

Das Volumen der Scheibe erhalten wir durch Summation aller in der Schicht gelegener Säulenvolumina, d.h. durch Integration von $dV = f(x, y)\, dy\, dx$ in der y-Richtung zwischen der unteren Grenze und der oberen Grenze

$$dV_{Scheibe} = \int\limits_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} dV = \left(\int\limits_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Die Funktion $f(x, y)$ wird während der Integration nach y als eine nur von y abhängige Funktion angesehen.

Wir summieren, d.h. integrieren in der x-Richtung über alle zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ liegenden Scheiben

$$V = \iint\limits_S f(x, y)\, dS = \int\limits_{x=a}^{b} dV_{Scheibe} = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Die Berechnung des Doppelintegrals erfolgt durch zwei nacheinander auszuführende gewöhnliche Integrationen:

$$\iint_A f(x, y)\, dy\, dx = \overbrace{\int_{x=a}^{b} \underbrace{\left(\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right)}_{\substack{\text{Inneres Integral} \\ x = const}} dx}^{\text{Äußeres Integral}}$$

Man integriert <u>von innen nach außen</u>:

1. Innere Integration (nach der Variablen y):
   - x wird konstant gehalten
   - die Integrationsgrenzen des inneren Integrals sind von x abhängige Funktionen

2. Äußere Integration (nach der Variablen x):
   - die Integrationsgrenzen des äußeren Integrals sind Konstanten.

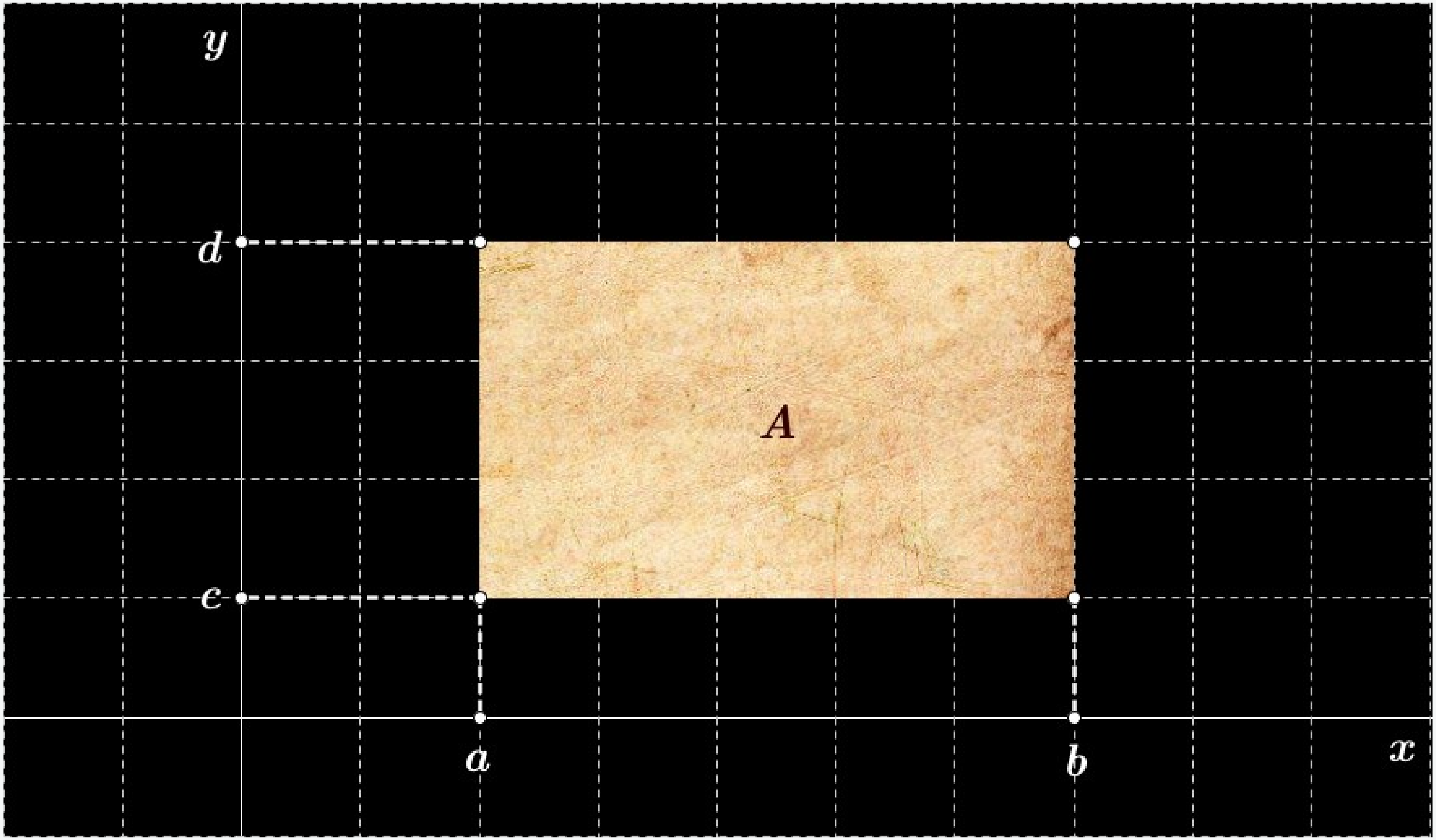


Abb. 7-1: Ein Integrationsbereich mit konstanten Integrationsgrenzen

Die Reihenfolge der Integration ist durch die Reihenfolge der Differentiale *dx* und *dy* von innen nach außen festgelegt. Sie ist vertauschbar, wenn sämtliche Integrationsgrenzen konstant sind (rechteckiger Integrationsbereich)

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{y=c}^{d} \int_{x=a}^{b} f(x, y)\, dx\, dy$$

Bei einer Vertauschung der Integrationsreihenfolge in einem Doppelintegral müssen die Integrationsgrenzen neu bestimmt werden

$$\int_A f(x, y)\, dy\, dx =$$

$$= \overbrace{\int_{x=a}^{b} \underbrace{\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy}_{\substack{\text{Inneres Integral } 1 \\ x = const}}\, dx}^{\text{Äußeres Integral } 1} = \overbrace{\int_{y=\alpha}^{\beta} \underbrace{\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)\, dx}_{\substack{\text{Inneres Integral } 2 \\ y = const}}\, dy}^{\text{Äußeres Integral } 2}$$

Das eigentliche <u>Problem</u> bei der Berechnung von Doppelintegralen besteht in der Definition der Funktionen

$$f_i(x), \quad g_i(y), \quad i = 1, 2$$

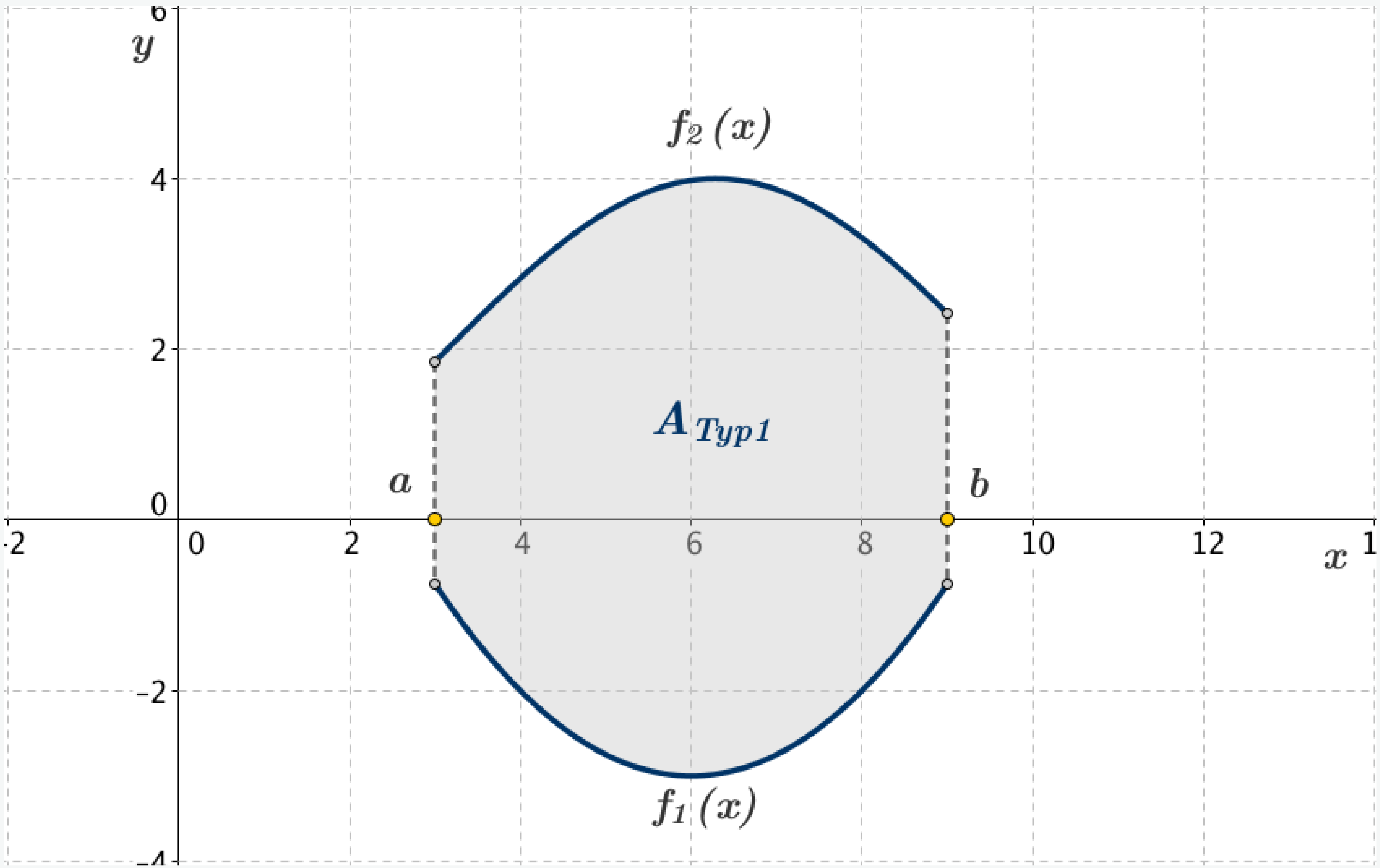
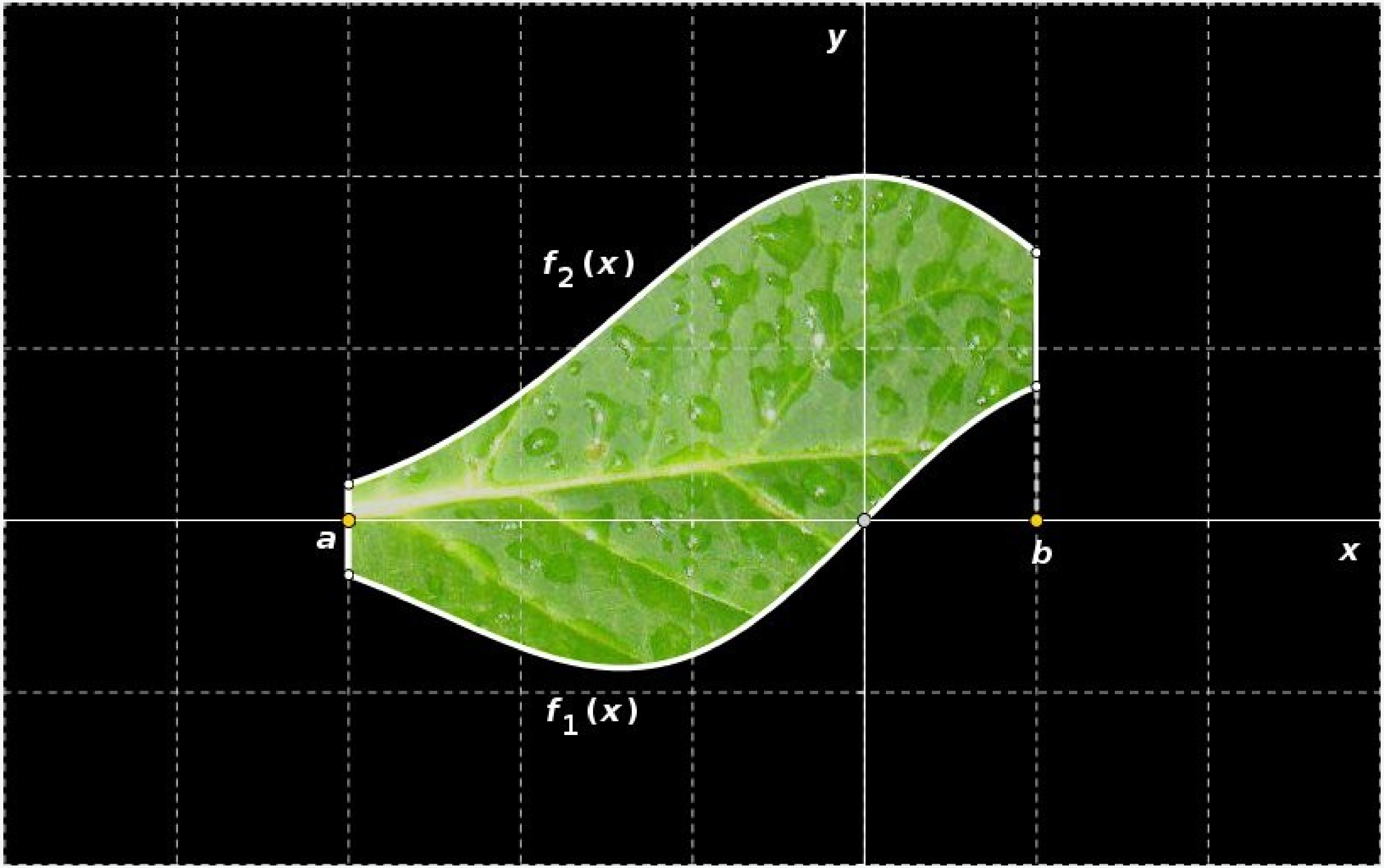


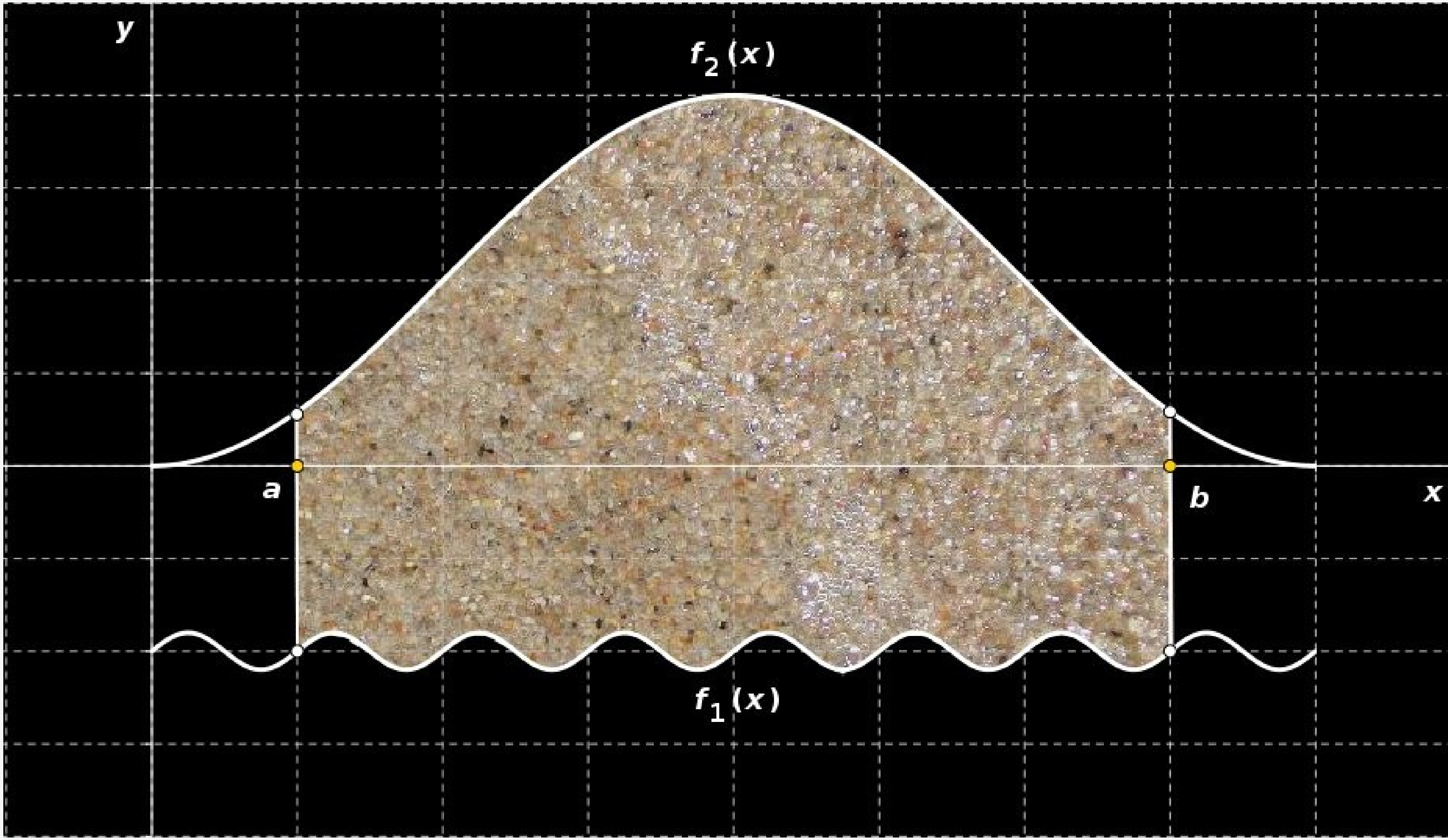
Abb. 7-2: Integrationsbereich vom Typ 1

Eine Menge A heißt ein Normalbereich vom Typ 1, wenn die x-Werte zwischen zwei festen Werten a und b und die y-Werte zwischen zwei stetigen Funktionen liegen

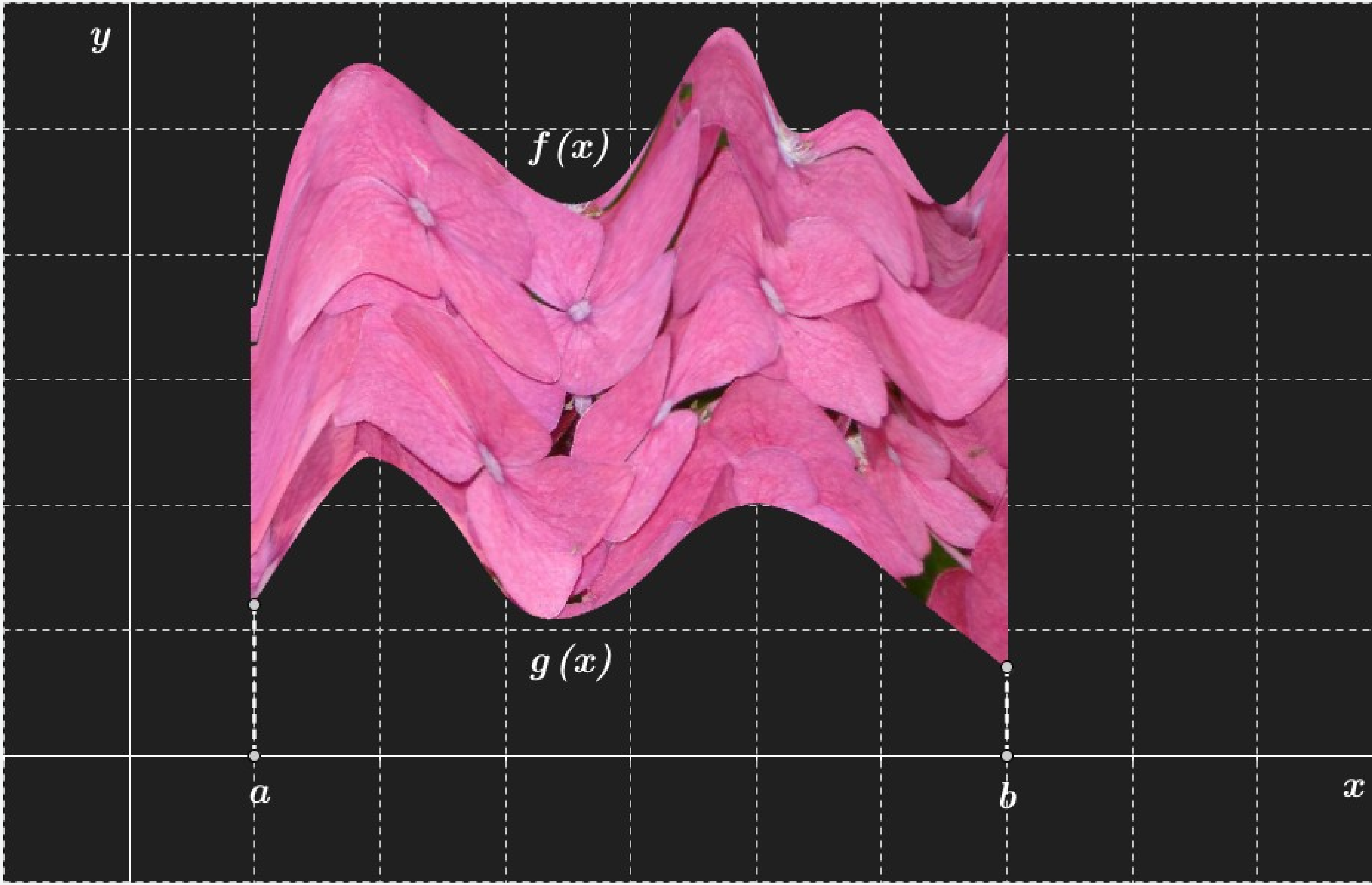
$$A_{\text{Typ 1}} = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \quad f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}, \quad A_{\text{Typ 1}} \in \mathbb{R}^2$$



Integrationsbereich vom Typ 1



Integrationsbereich vom Typ 1



Integrationsbereich vom Typ 1

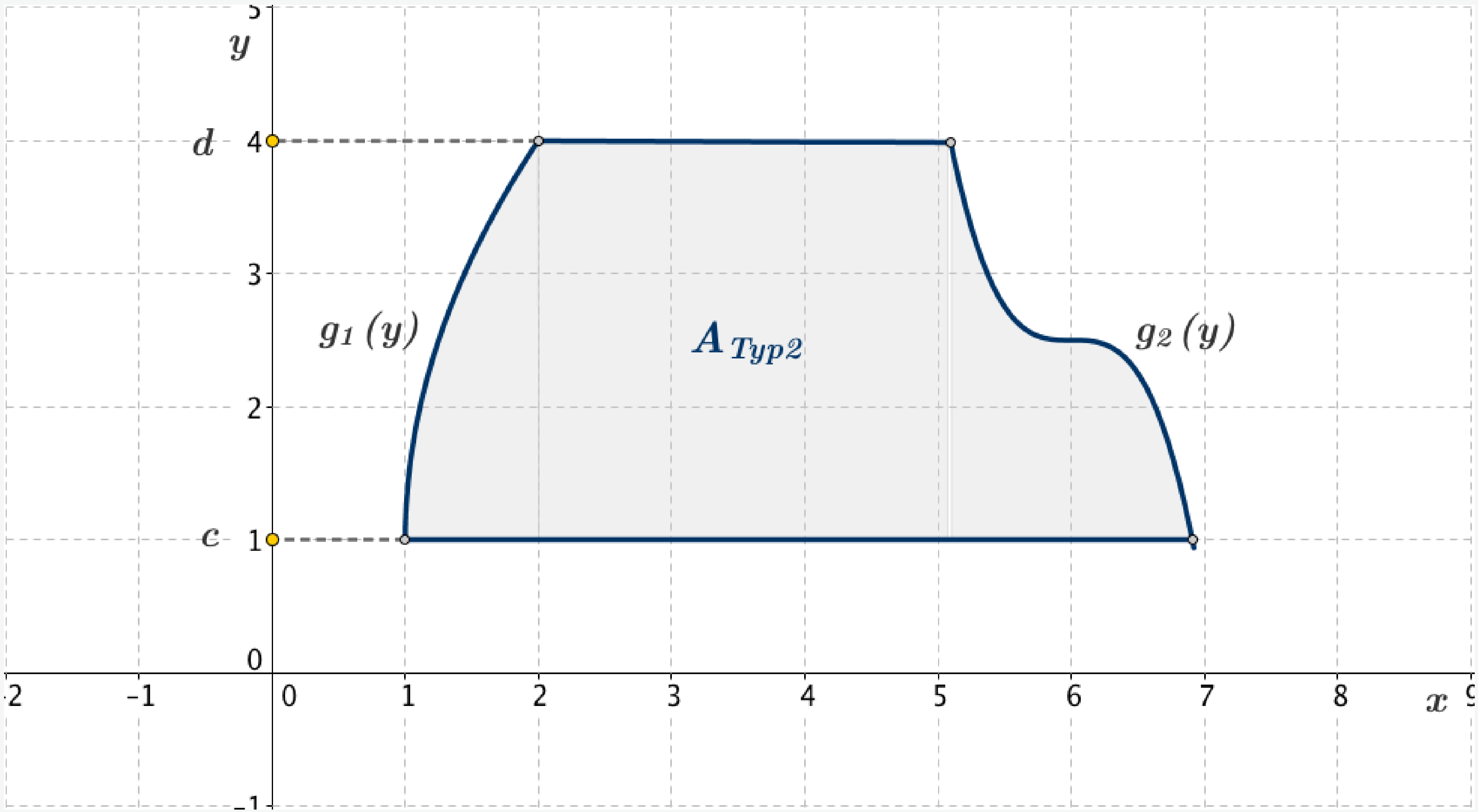
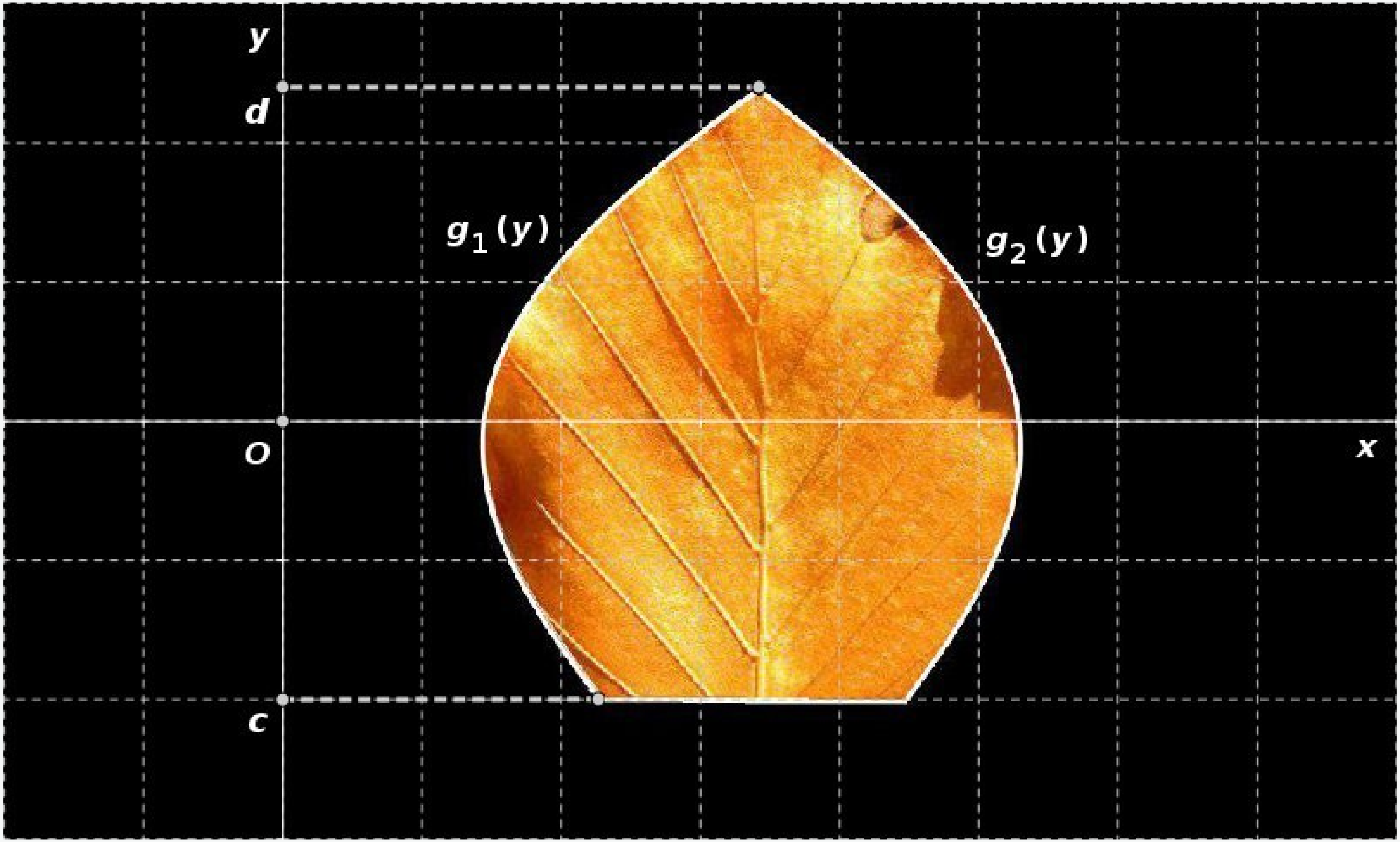


Abb. 7-6: Integrationsbereich vom Typ 2

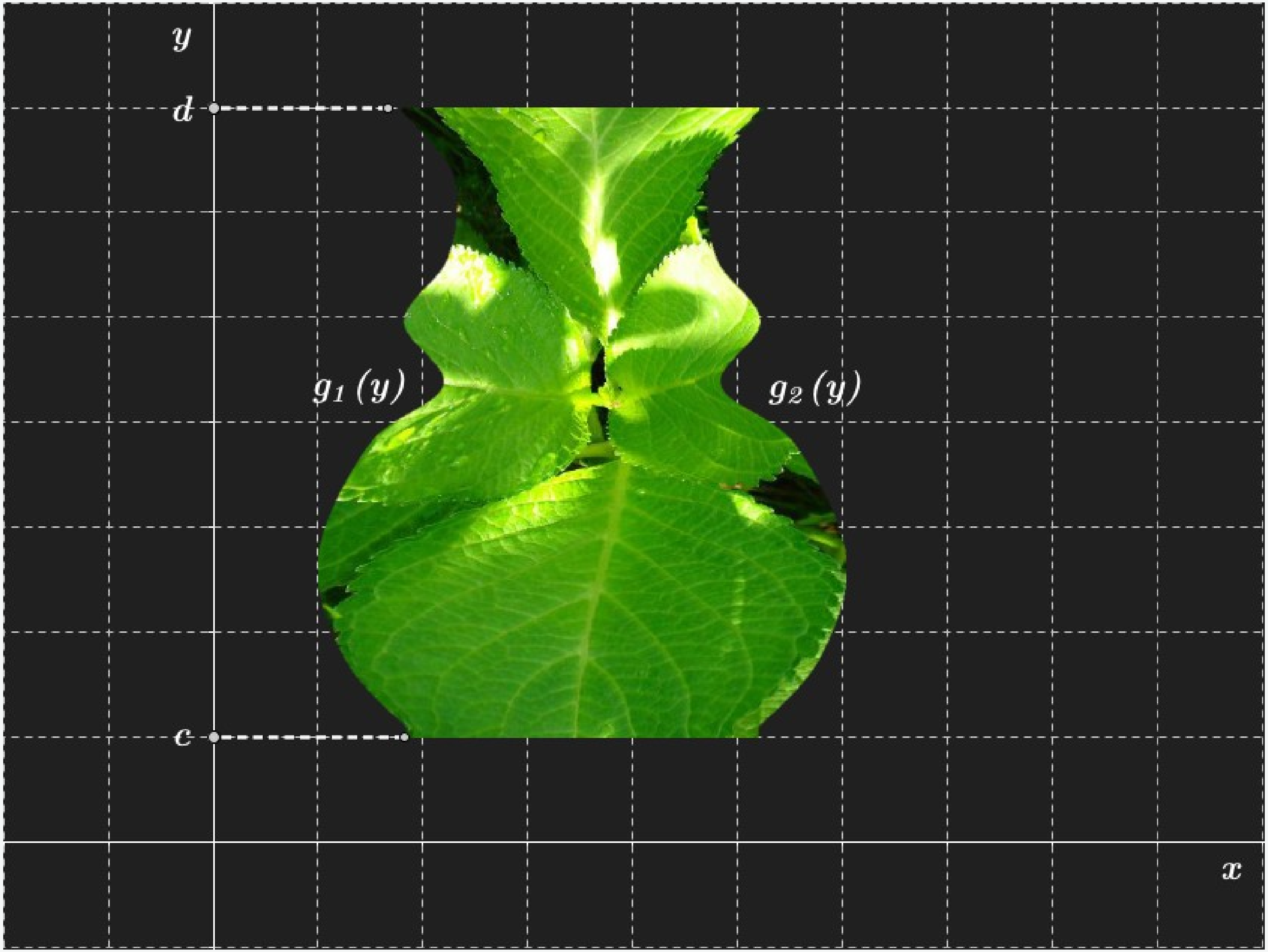
Eine Menge A heißt ein Normalbereich vom Typ 2, wenn die y-Werte zwischen zwei festen Werten c und d und die x-Werte zwischen zwei stetigen Funktionen liegen

$$A_{\text{Typ } 2} = \{(x, y) \mid g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y), \quad c \leqslant y \leqslant d\}, \qquad A_{\text{Typ } 2} \in \mathbb{R}^2$$



Integrationsbereich vom Typ 2

Integrationsbereich vom Typ 2



Integrationsbereich vom Typ 2

1. $\iint\limits_A k \; f(x, y)\; dA = k \iint\limits_A f(x, y)\; dA \qquad (k \in \mathbb{R})$

2. $\iint\limits_A (f(x, y) \pm g(x, y))\; dA = \iint\limits_A f(x, y)\; dA \pm \iint\limits_A g(x, y)\; dA$

3. $\iint\limits_A f(x, y)\; dA \geqslant 0,$ falls $f(x, y) \geqslant 0$ auf A

4. $\iint\limits_A f(x, y)\; dA \geqslant \iint\limits_A g(x, y)\; dA,$ falls $f(x, y) \geqslant g(x, y)$ auf A

5. $\iint\limits_A f(x, y)\; dA = \iint\limits_{A_1} f(x, y)\; dA + \iint\limits_{A_2} f(x, y)\; dA \qquad (A = A_1 + A_2)$

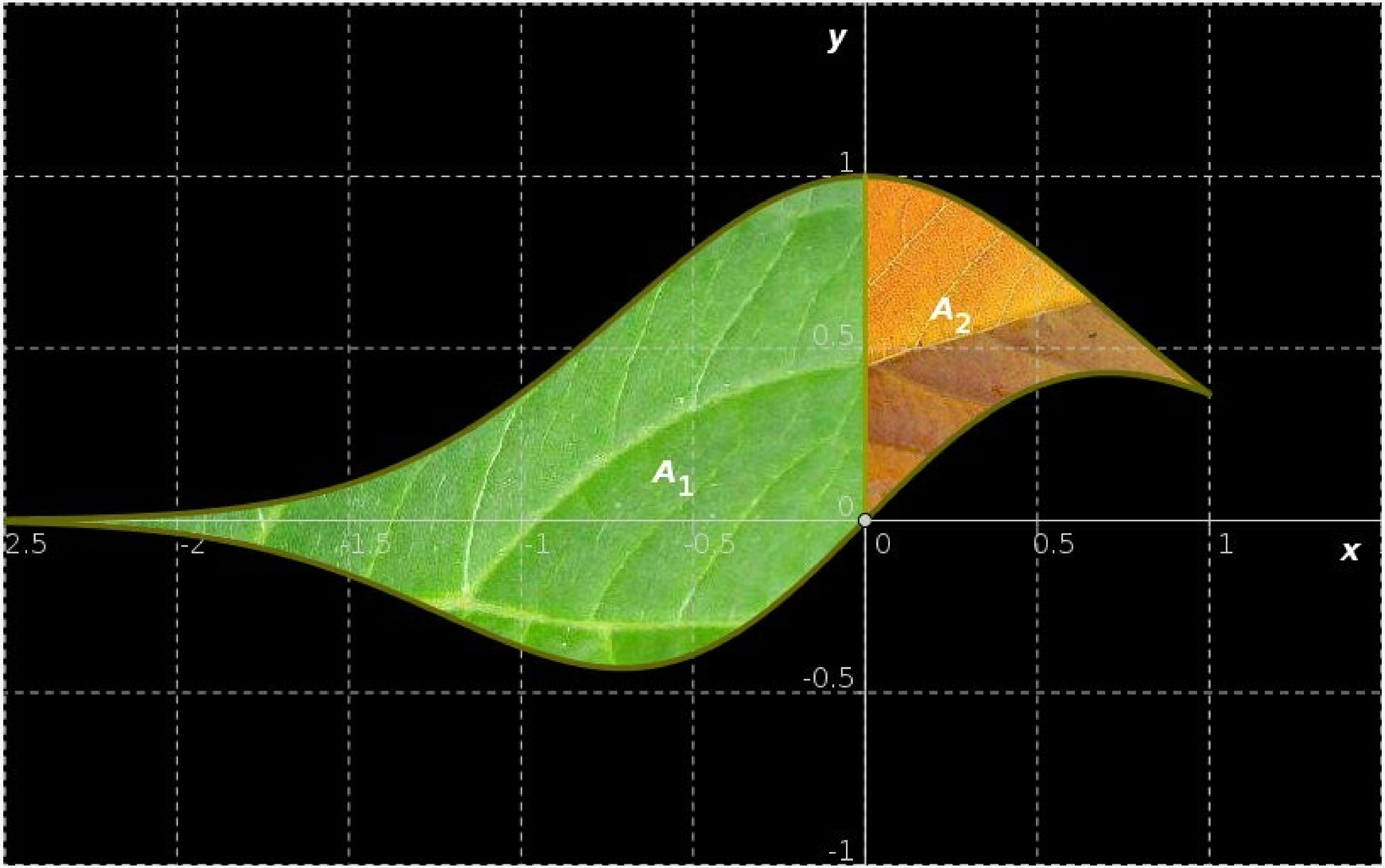


Abb. 8-1: Zur Illustration der Eigenschaften von Doppelintegralen

$$A = A_1 + A_2 \qquad : \iint_A f(x, y)\, dA = \iint_{A_1} f(x, y)\, dA + \iint_{A_2} f(x, y)\, dA$$

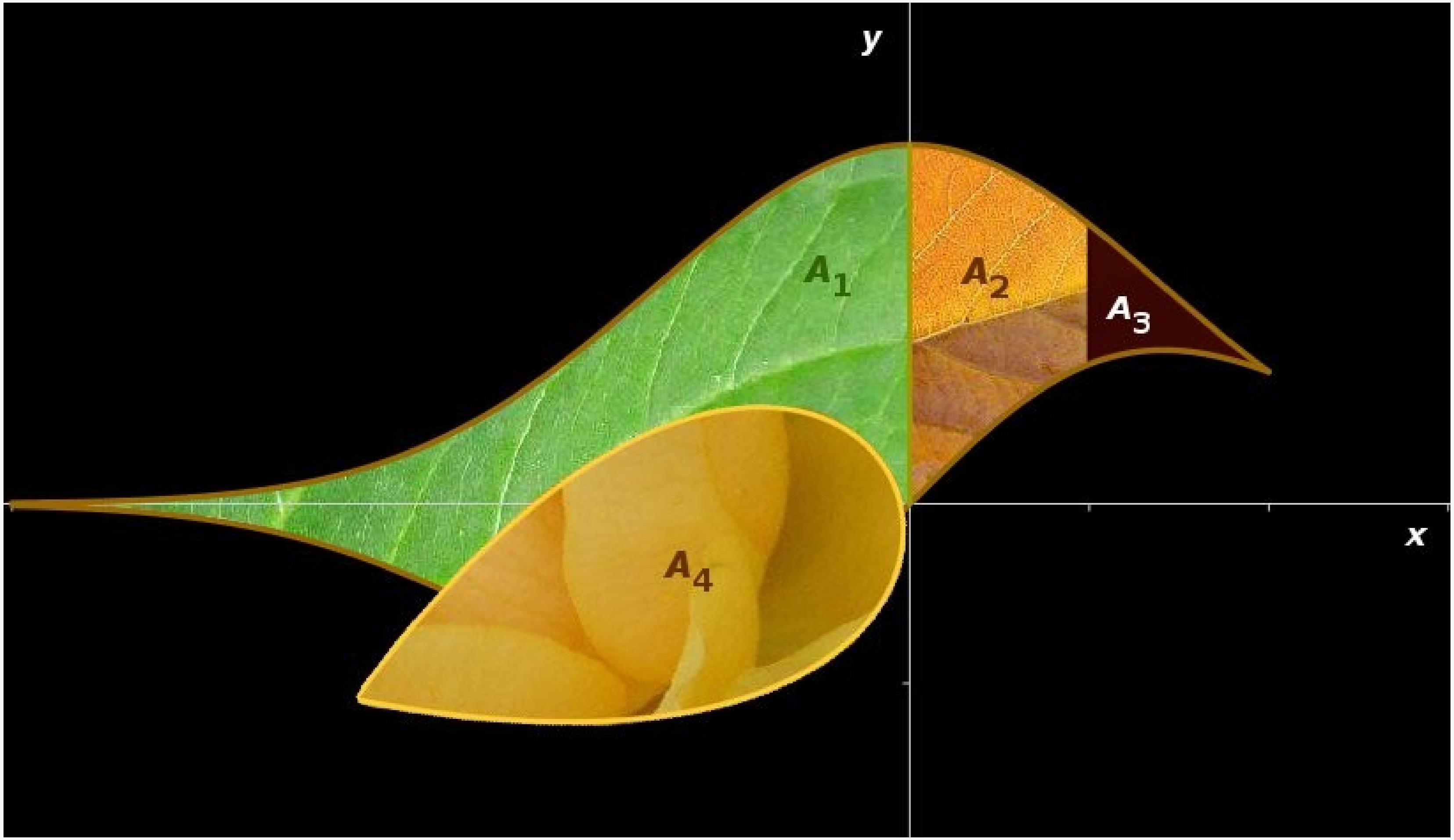


Abb. 8-2: Zur Illustration der Eigenschaften von Doppelintegralen

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$\iint\limits_{A} f(x, y)\, dA = \iint\limits_{A_1} f(x, y)\, dA + \iint\limits_{A_2} f(x, y)\, dA + \iint\limits_{A_3} f(x, y)\, dA + \iint\limits_{A_4} f(x, y)\, dA$$

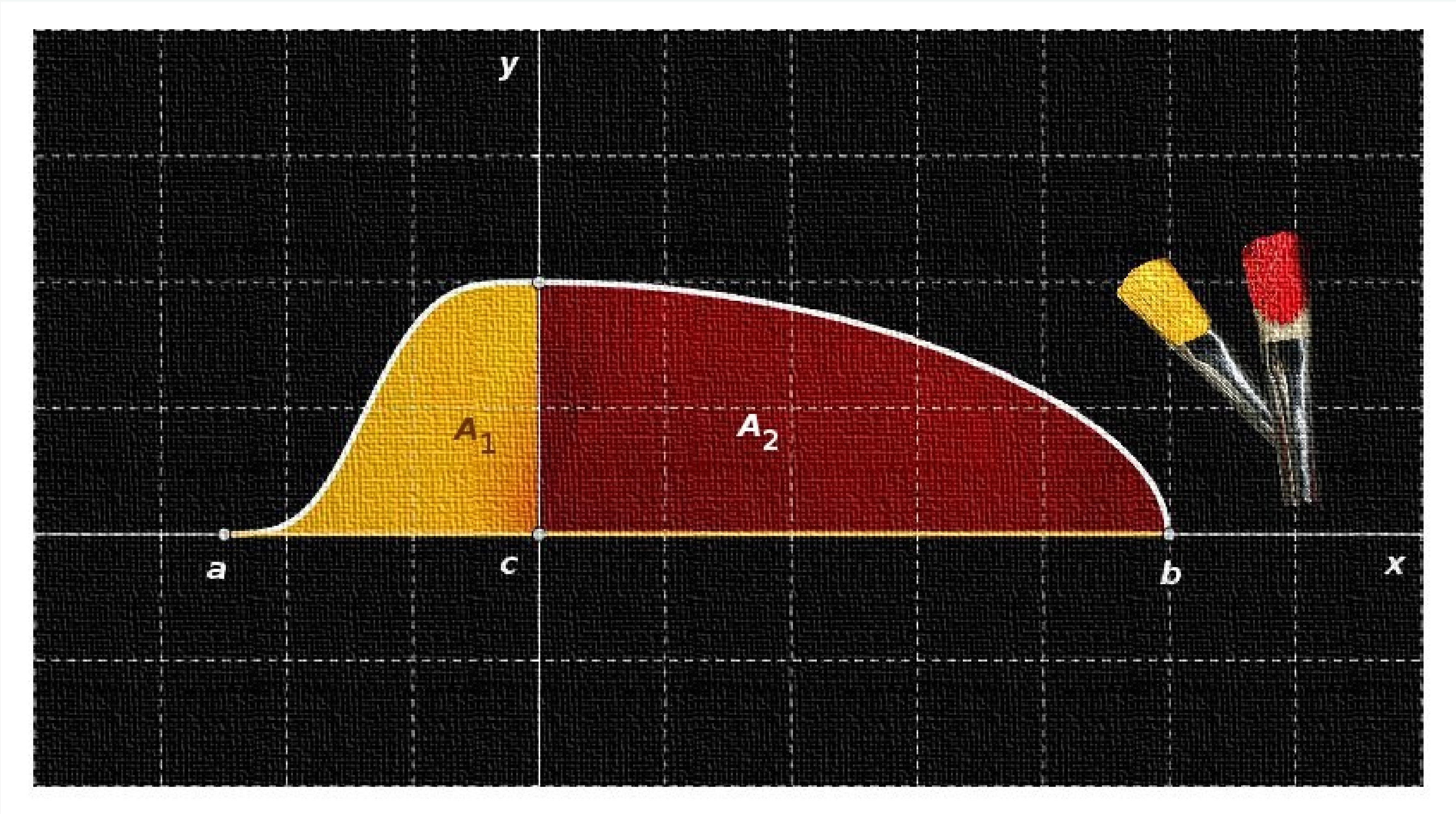


Abb. 8-3: Integrationsbereich A

$$A = A_1 + A_2$$

Abb. 8-4: Integrationsbereich A

$$A = A_1 + A_2$$


POSTA ROMANA
china
CANADA
china
80