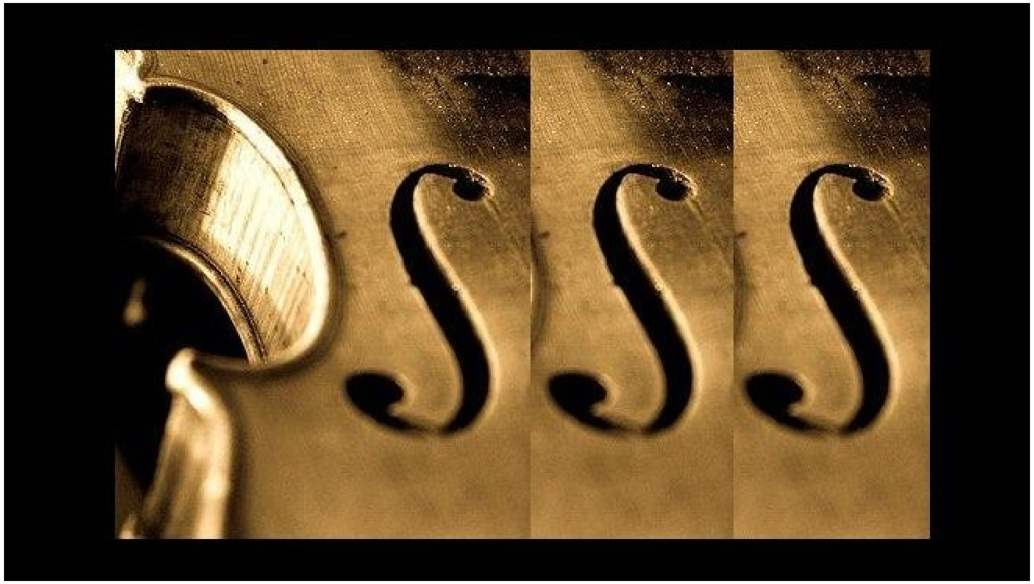


Dreifachintegrale

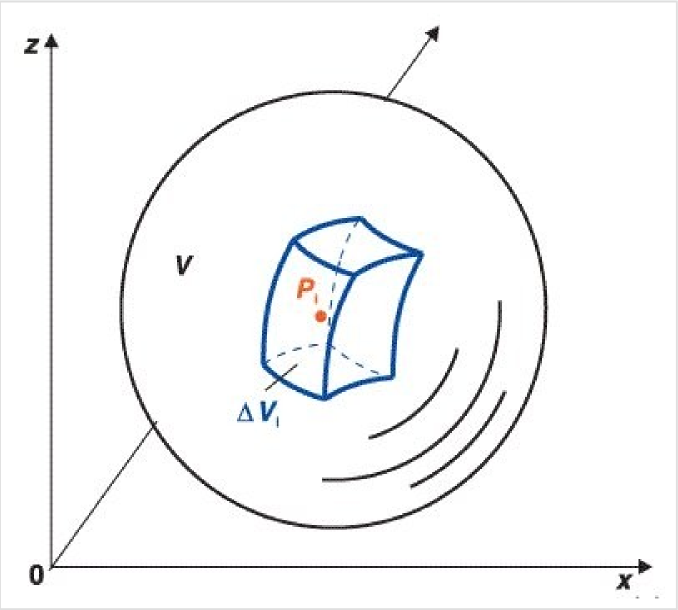


Abb. 1: Definitionsbereich einer Funktion $u = f(x, y, z)$ ist ein Körper im 3D-Raum (aus Bronstein)

Die Definition des Dreifachintegrals einer Funktion $f(x, y, z)$ von drei Variablen über einem dreidimensionalen Bereich erfolgt in Analogie zur Definition des Doppelintegrals.

1. Das Volumen V wird in Elementarvolumina zerlegt.

2. Der Punkt P liegt im Inneren oder auf dem Rande eines Elementarvolumens

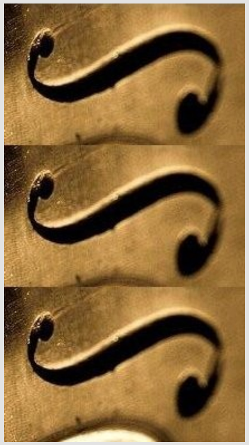
3. Produkte der Art $f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i$ werden gebildet.

4. Das Dreifachintegral ist der Grenzwert der Summe solcher Produkte für alle n Elementarvolumina, in die das Volumen V zerlegt wurde, und zwar für den Fall:

$$\Delta V_i \to 0\,, \qquad n \to \infty$$

$$\boxed{\int\limits_V f(x, y, z)\; dV = \lim_{\Delta V_i \to 0,\; n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i}$$

Dieser Grenzwert soll unabhängig von der speziellen speziellen Zerlegung existieren.



$$\int_V f(x, y, z)\, dV = \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

x, y, z – die Integrationsvariablen

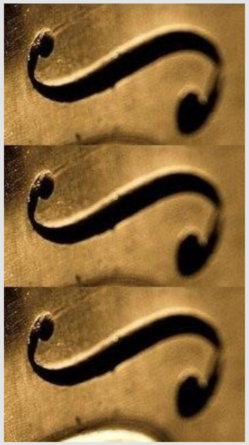
$f(x, y, z)$ – der Integrand

dV – das Volumenelement

V – der Integrationsbereich

Existenzsatz:

Das Dreifachintegral existiert, wenn die Funktion $f(x, y, z)$ im gesamten Integrationsgebiet stetig ist.



Die Berechnung des Dreifachintegrals erfolgt durch drei nacheinander auszuführende gewöhnliche Integrationen:

$$\int_V f(x, y, z)\, dV =$$

$$= \underbrace{\int_a^b \underbrace{\left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\underbrace{\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz}_{\text{1. Integration}} \right] dy \right\}}_{\text{2. Integration}} dx}_{\text{3. Integration}} =$$

$$= \int_{x=a}^{b} \int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{z=\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\ dy\ dx$$

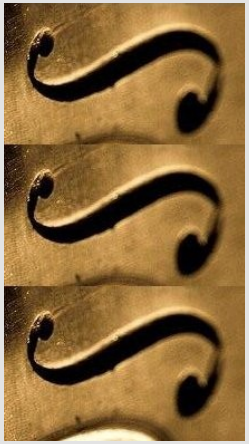
Reihenfolge der Integration – von innen nach außen

$$I = \int_1^4 \int_1^3 \int_0^2 \left(x^2 - 2\,y\,z\right) dz\ dy\ dx$$

$$I = \int_1^4 \int_1^3 \left[\int_0^2 \left(x^2 - 2\,y\,z\right) dz \right] dy\ dx = \int_1^4 \int_1^3 \left[\, x^2 z - y\,z^2 \,\right]_{z_1=0}^{z_2=2} dy\ dx =$$

$$= 2 \int_1^4 \left[\int_1^3 \left(x^2 - 2\,y\right) dy \right] dx = 2 \int_1^4 \left[\left(x^2\,y - y^2\right) \right]_{y_1=1}^{y_2=3} dx =$$

$$= 4 \int_1^4 \left(x^2 - 4\right) dx = 4 \left[\frac{x^3}{3} - 4\,x \right]_{x_1=1}^{x_2=4} = 36$$



Aufgabe 1:

$$I_1 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \int_{z=-y^2}^{x^2} (1+x)\; dz\; dy\, dx$$

Aufgabe 2:

$$I_2 = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{y=0}^{1} \int_{z=y}^{y^2} \sin x \cdot y\, z\; dz\; dy\, dx$$

Aufgabe 3:

$$I_3 = \int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{x} \int_{z=0}^{x-y} y \cdot e^z\; dz\; dy\, dx$$

Aufgabe 4:

$$I_4 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=-1}^{4} \int_{z=0}^{\pi} x^2 y \cdot \cos(y\, z)\; dz\; dy\, dx$$

$$I_1 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \int_{z=-y^2}^{x^2} (1+x)\, dz\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} (1+x)\,(x^2+y^2)\, dy\, dx = \frac{3}{5}$$

$$I_2 = \int_{x=0}^{\pi/2} \sin x\, dx \int_{y=0}^{1} y\, dy \int_{z=y}^{y^2} z\, dz = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\pi/2} \sin x\, dx \int_{y=0}^{1} (y^5 - y^3)\, dy = -\frac{1}{24}$$

$$I_3 = \int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{x} \int_{z=0}^{x-y} y \cdot e^z\, dz\, dy\, dx = \int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{x} y\,(e^{x-y} - 1)\, dy\, dx =$$

$$= \int_{x=1}^{2} \left(e^x \int_{y=0}^{x} y\, e^{-y}\, dy - \int_{y=0}^{x} y\, dy \right) dx = \int_{x=1}^{2} \left(e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 \right) dx =$$

$$= -e - \frac{11}{3} + e^2 \simeq 1.004$$

$$\boxed{\int u\, v'\, dx = u\, v - \int u'\, v\, dx}$$

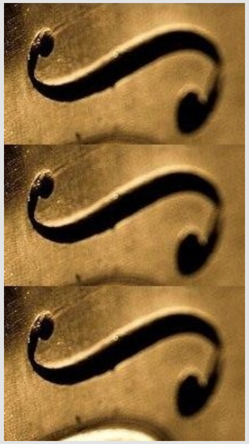
$$I_4 = \int_{x=0}^{1} x^2 \, dx \int_{y=-1}^{4} \int_{z=0}^{\pi} y \cos(y z) \, dz \, dy =$$

$$\int_{z=0}^{\pi} \cos(y z) \, dz = \frac{1}{y} \int_{u=0}^{\pi y} \cos u \; du = \frac{1}{y} \left[\sin(y z) \right]_{z=0}^{\pi} = \frac{\sin(\pi y)}{y}$$

$$u = y z$$

$$I_4 = \int_{x=0}^{1} x^2 \, dx \int_{y=-1}^{4} \sin(\pi y) \, dy = -\frac{1}{\pi} \int_{x=0}^{1} x^2 \, dx \cdot \left[\cos(\pi y) \right]_{y=-1}^{4} =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_0^1 x^2 \, dx = -\frac{2}{3\pi}$$



Aufgabe 5:

Berechnen Sie folgendes Dreifachintegral

$$I = \iiint_V \frac{dx\ dy\ dz}{1 - x - y}$$

wenn der Integrationsbereich durch die folgenden Flächen begrenzt wird

$$x + y + z = 1\,, \qquad x = 0\,, \qquad y = 0\,, \qquad z = 0$$

Aufgabe 6:

Berechnen Sie folgendes Dreifachintegral

$$I = \iiint_V \frac{dx\ dy\ dz}{(x + y + z + 1)^3}$$

wenn der Integrationsbereich durch die folgenden Flächen begrenzt wird

$$x + z = 3\,, \quad y = 2\,, \quad x = 0\,, \quad y = 0\,, \quad z = 0$$

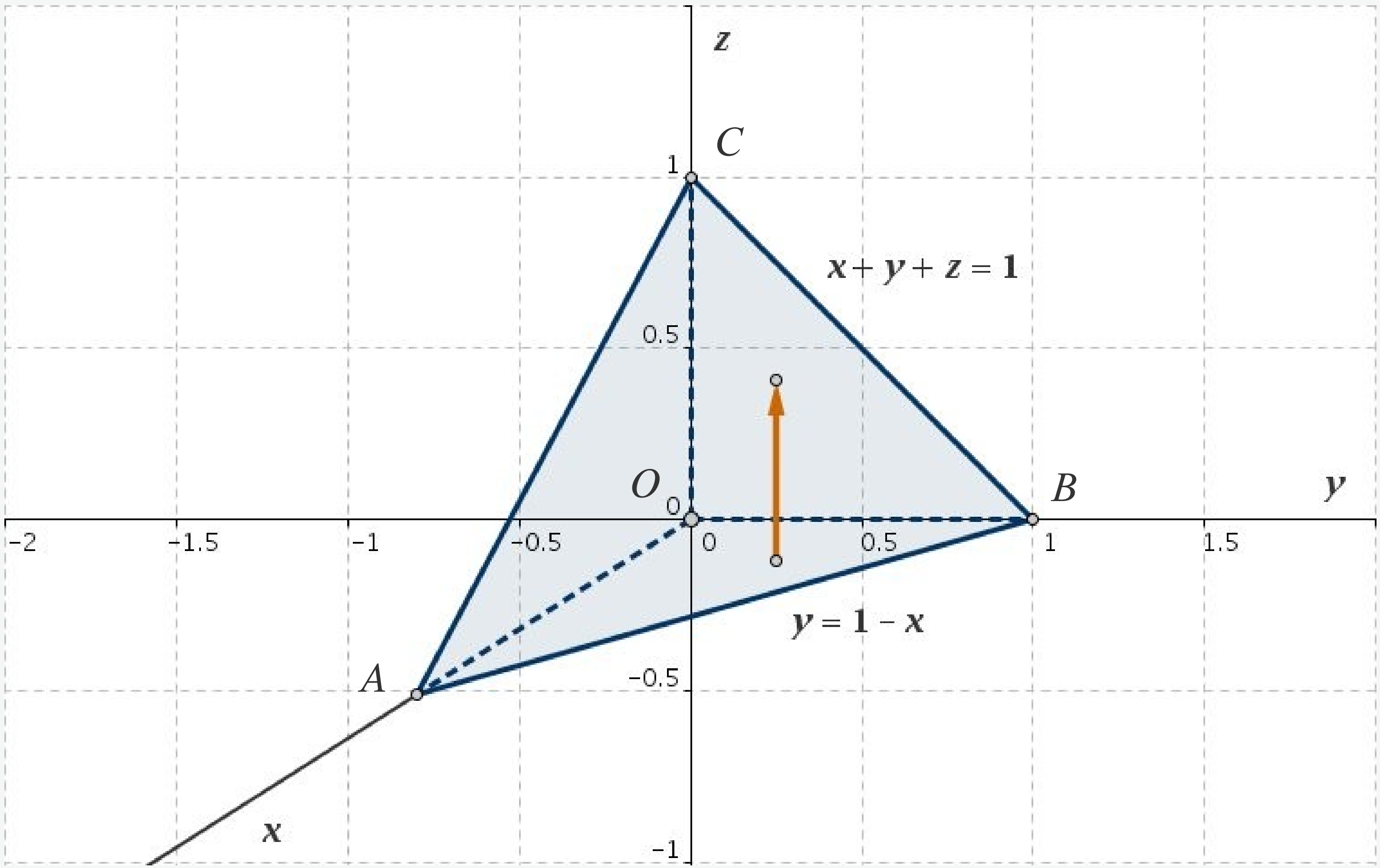


Abb. L5: Der Integrationsbereich ist ein Tetraeder OABC

$$I = \iint_{ABO} \frac{dx\,dy}{1-x-y} \int_{z=0}^{1-x-y} dz = \iint_{ABO} \frac{dx\,dy}{1-x-y} \left[\, z \,\right]_0^{1-x-y} = \iint_{ABO} dx\,dy = \frac{1}{2}\, AO \cdot BO = \frac{1}{2}$$

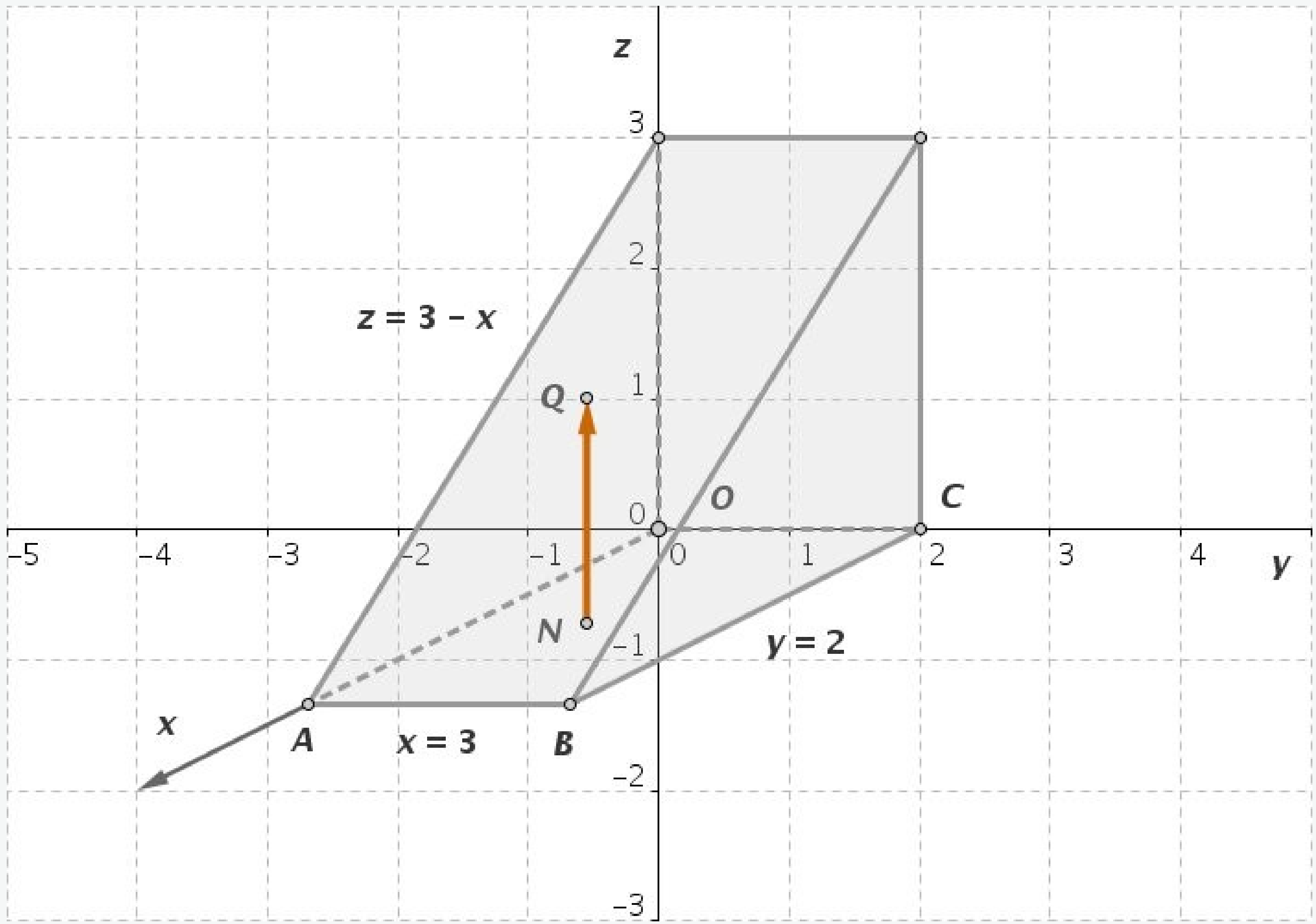


Abb. L6: Der Integrationsbereich ist ein Dreieckprisma

$$I = \iiint\limits_V \frac{dx\ dy\ dz}{(x+y+z+1)^3} = \iint\limits_{ABCO} \int\limits_{z_N=0}^{z_Q=3-x} (x+y+z+1)^{-3}\, dz\, dx\ dy =$$

$$I = \iint\limits_{ABCO} dx \; dy \int\limits_{z_N = 0}^{z_Q = 3 - x} (x + y + z + 1)^{-3} \, dz =$$

$$= -\frac{1}{2} \iint\limits_{ABCO} \Big[(x + y + z + 1)^{-2} \Big]_0^{3-x} \, dx \; dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{x=0}^{3} dx \int\limits_{y=0}^{2} \left[(x + y + 1)^{-2} - (y + 4)^{-2} \right] dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{3} \left[\frac{1}{y + 4} - \frac{1}{x + y + 1} \right]_0^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{x + 1}{x + 3} \right| - \frac{x}{12} \right]_0^3 = \frac{1}{8} \left(4 \ln 2 - 1 \right)$$