http://www.sagen.at/texte/sagen/oesterreich/steiermark/images/st_stefan_hofkirchen_hufeisen.jpg

Einige Anwendungen von Doppelintegralen

Wir beschreiben eine dünne Materieverteilung, im Folgenden Scheibe genannt, durch einen Bereich in der *x,y*-Ebene. Wenn die Massenbelegung der Scheibe konstant ist, dann ist die Gesamtmasse der Scheibe durch das Produkt der Flächendichte ρ mit der Fläche A der Scheibe gegeben:

$$M = \rho \times A$$

Ändert sich die Dichte von Punkt zu Punkt, ist also

$$\rho = \rho\,(x\,,\,y)$$

so wird die Masse der Scheibe durch folgendes Integral bestimmt

$$M = \iint_A \rho\,(x\,,\,y)\;dx\,dy$$

Aufgabe 1:

Gegeben sei eine halbkreisförmige Scheibe vom Radius R. Bestimmen Sie die Masse der Scheibe, wenn die Massenbelegung proportional zum Abstand vom Mittelpunkt ist.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Masse eines Ringes mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2, wenn die Massenbelegung des des Ringes

$$\rho\,(x\,,\,y) = \frac{k}{d^{\,2}}$$

ist, wobei d der Abstand vom Zentrum des Mittelpunktes des Kreises ist.

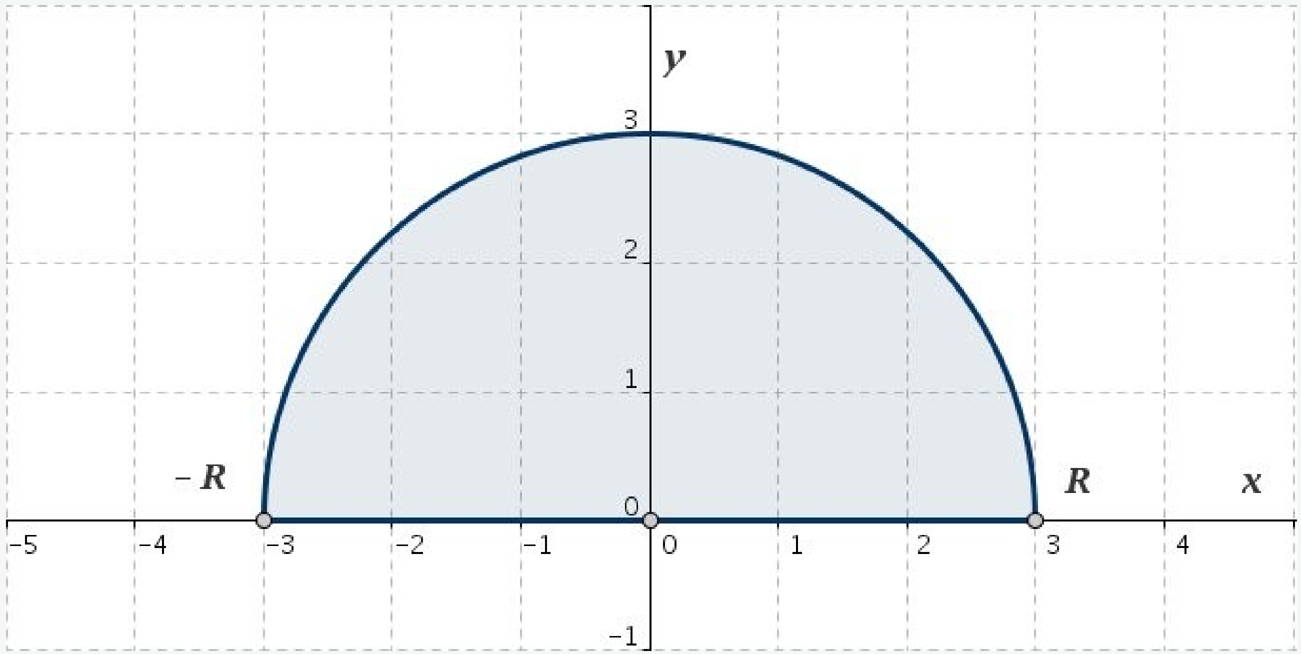

Abb. 1: Eine halbkreisförmige Scheibe vom Radius R

$$A: \quad -R \leqslant x \leqslant R\,, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}$$

Die Massenbelegung der Scheibe ist proportional zum Abstand vom Mittelpunkt

$$\rho\,(x\,,\,y) = k\,\sqrt{x^2 + y^2}$$

Die Masse einer Scheibe: Lösung 1

$$M = \iint\limits_A k \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{R} (kr)\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= k \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{r=0}^{R} r^2\, dr = \frac{k}{3}\, \pi R^3$$

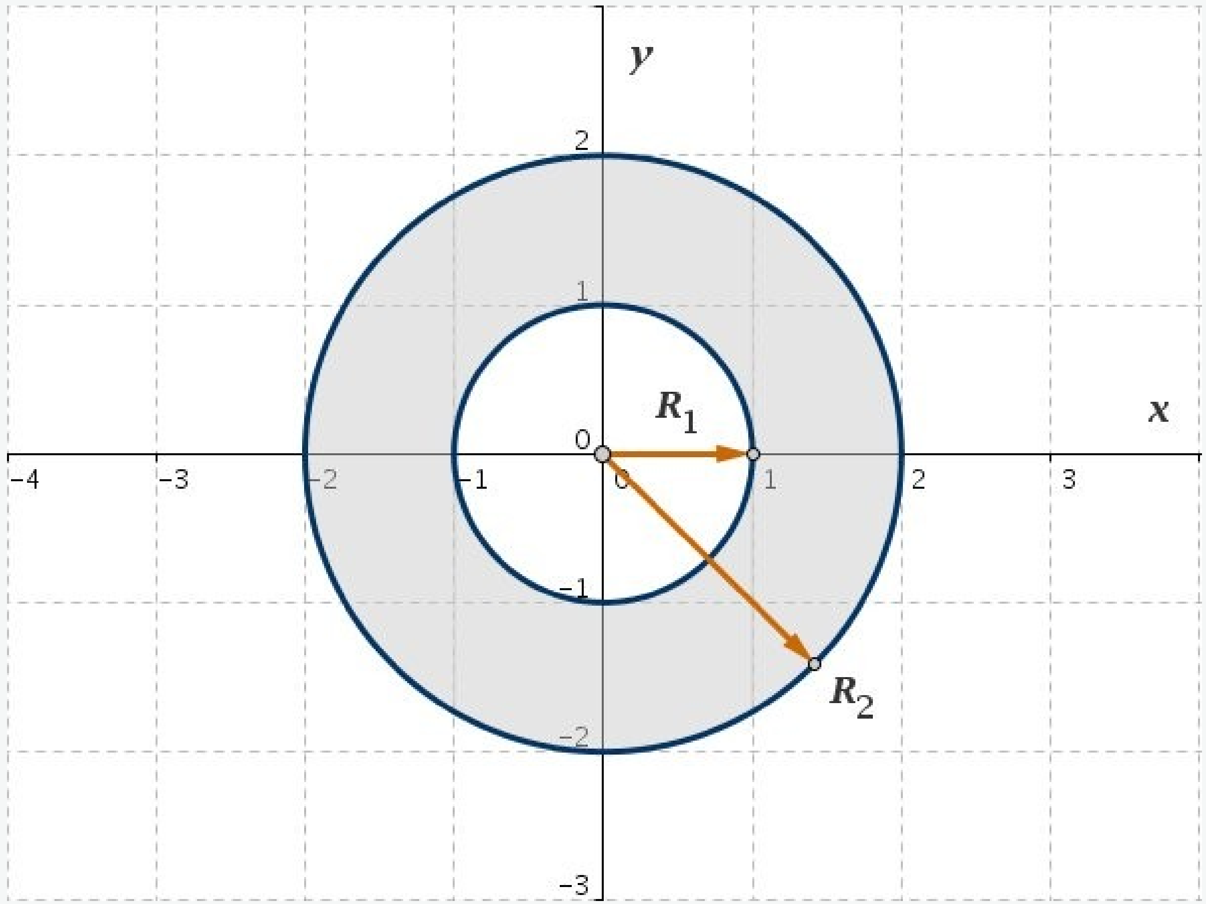

Abb. 2: Ein Ring – die Fläche der Aufgabe 2

$$M = \iint\limits_A \frac{k}{x^2 + y^2}\, dx\, dy = k \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r=R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = 2\pi k \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$