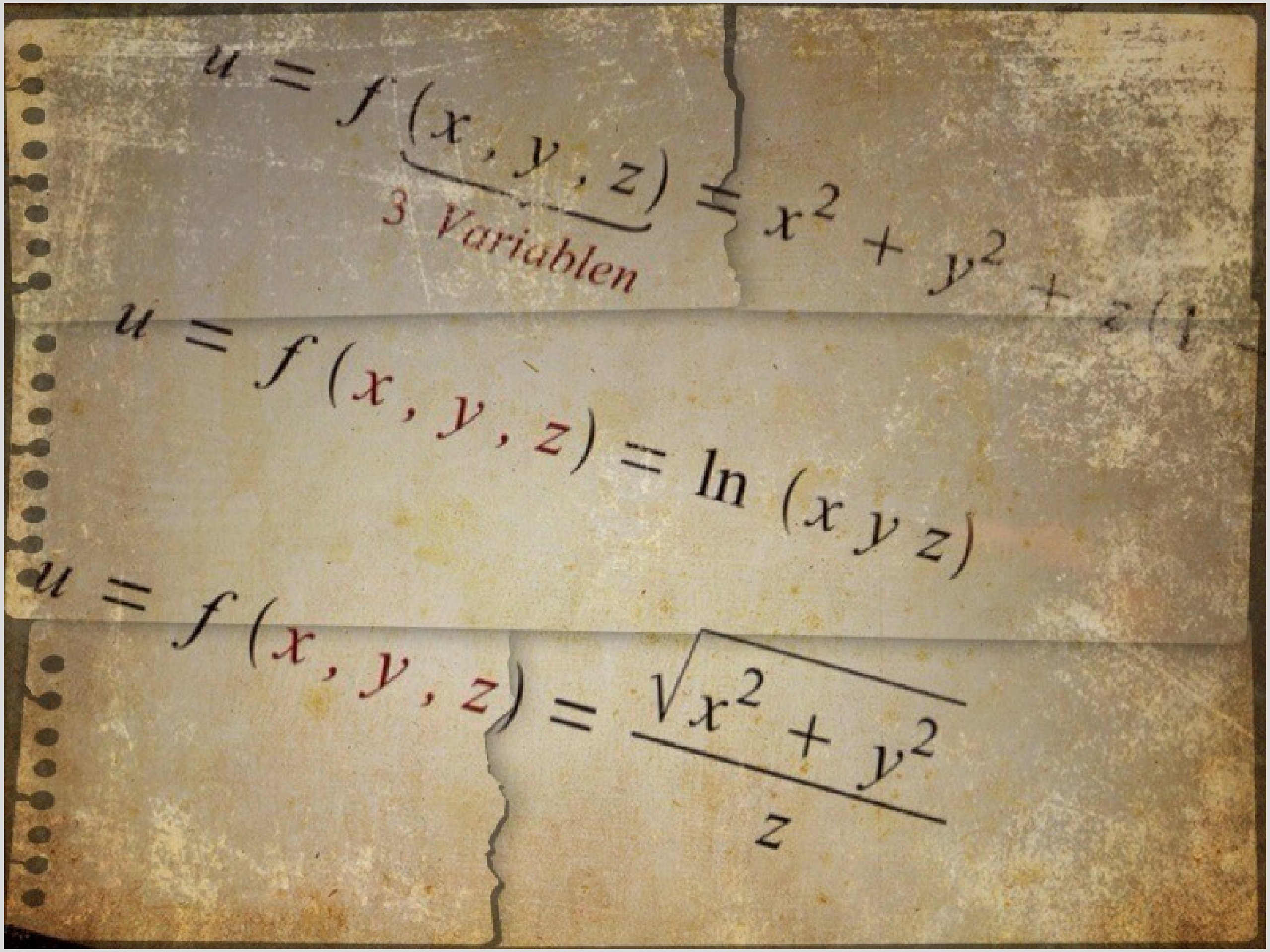
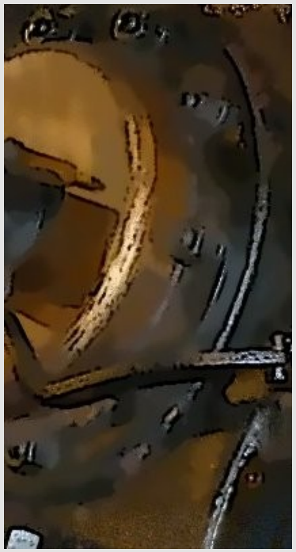


Funktionen von mehreren Variablen

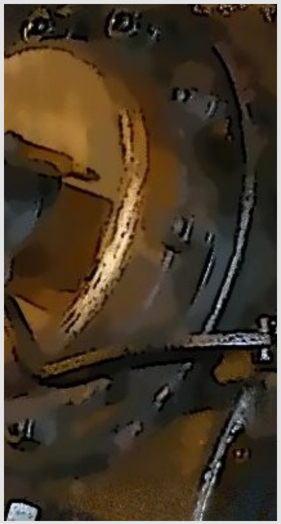
Definition, Definitions- und Wertebereich



Was möchten wir über Funktionen von mehreren Variablen wissen:

- Wie definiert man eine Funktion von mehreren Variablen?
- Wie bestimmt man für solche Funktionen Definitions- und Wertebereiche?
- Wie wird eine Funktion graphisch dargestellt?
- Wie sieht im Mehrdimensionalen die Stetigkeit aus?

Wie definiert man eine Funktion von mehreren Variablen?



Definition:

Unter einer Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar *(x, y)* aus einer Menge *D* genau ein Element aus einer Menge *W* zuordnet.

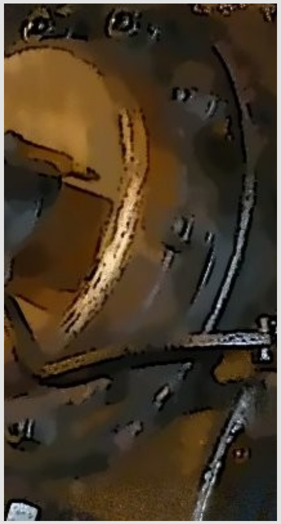
$$f: \quad (x, y) \rightarrow z = f(x, y)$$

x, y : unabhängige Veränderliche

z: abhängige Veränderliche

D : Definitionsbereich der Funktion

W : Wertebereich der Funktion



Beispiele:

$$z = f \underbrace{(x, y)}_{2\ Variablen} = x^2 + x\,y$$

$$z = f(x, y) = x^2 + y^4 - 3\,x\,y$$

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 - 2\,y}$$

Bestimmen Sie Funktionswerte in entsprechenden Punkten *(x, y)*:

$$a)\quad f(x,\ y) = x^2 + y^3, \qquad (x,\ y) = (2,\ 1)$$

$$b)\quad f(x,\ y) = 2\sin x + \cos y, \qquad (x,\ y) = \left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$c)\quad f(x,\ y) = x^2 \sin y, \qquad (x,\ y) = \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$a)\quad f(x, y) = x^2 + y^3, \qquad (x, y) = (2, 1)$

$$f(2, 1) = 2^2 + 1^3 = 4 + 1 = 5, \qquad (x, y, f(x, y)) = (2, 1, 5)$$

$b)\quad f(x, y) = 2\sin x + \cos y, \qquad (x, y) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 1$$

$c)\quad f(x, y) = x^2 \sin y, \qquad (x, y) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2$$

Wie auch im Fall der Funktion einer Variablen, können einzelne Punkte keinen Eindruck vom Verhalten der Funktion vermitteln. Um die Funktion visuell zu erfassen, brauchen wir eine graphische Darstellung.

Bestimmen Sie, welche z der Funktion entspricht

$a)\quad x^2 z - 4y^2 - 2xy = 3$

$b)\quad x z^2 - xy + y^2 = 4$

$c)\quad \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$

$d)\quad z - x \ln y - 2xz = 0$

Die Funktionen $z = f(x, y)$ entsprechen

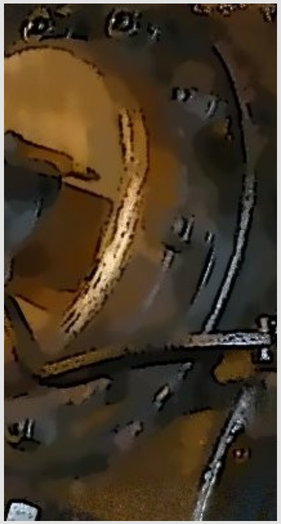
$$a)\quad x^2 z - 4y^2 - 2xy = 3, \qquad z = \frac{3}{x^2} + 4\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x}$$

$$d)\quad z(1 - 2x) - x\ln y = 0, \qquad z = \frac{x\ln y}{1 - 2x}$$

Keinen Funktionen $z = f(x, y)$ entsprechen

$$b)\quad x z^2 - xy + y^2 = 4, \quad z^2 = \frac{4}{x} + y - \frac{y^2}{x}, \quad z = \pm\sqrt{\frac{4}{x} + y - \frac{y^2}{x}}$$

$$c)\quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1, \qquad z = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$$



Definition:

Unter einer Funktion von drei unabhängigen Veränderlichen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Tripel (x, y, z) aus einer Menge D genau ein Element aus einer Menge W zuordnet

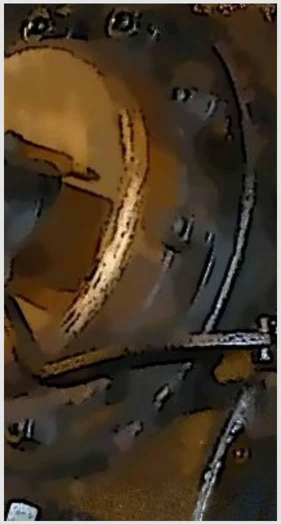
$$f: \quad (x, y, z) \quad \rightarrow \quad u = f(x, y, z)$$

x, y, z: unabhängige Veränderliche

u: abhängige Veränderliche

D: Definitionsbereich der Funktion

W: Wertebereich der Funktion



Beispiele:

$$u = f\underbrace{(x, y, z)}_{3\ \text{Variablen}} = x^2 + y^2 + z(1 - x)$$

$$u = f(x, y, z) = \ln(x y z)$$

$$u = f(x, y, z) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

Bestimmen Sie Funktionswerte in den Punkten *(x, y, z)*:

$$a)\quad f(x, y, z) = x + 2y - 3z, \qquad (x, y, z) = (-3,\ 1,\ 2)$$

$$b)\quad f(x, y, z) = \frac{4\sin^2 x + \cos y}{z}, \qquad (x, y, z) = \left(\frac{\pi}{6},\ 0,\ 4\right)$$

$$c)\quad f(x, y, z) = e^x \sin y \cos z, \qquad (x, y, z) = \left(0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3}\right)$$

$$a)\quad f(x, y, z) = x + 2y - 3z, \qquad (x, y, z) = (-3,\ 1,\ 2)$$

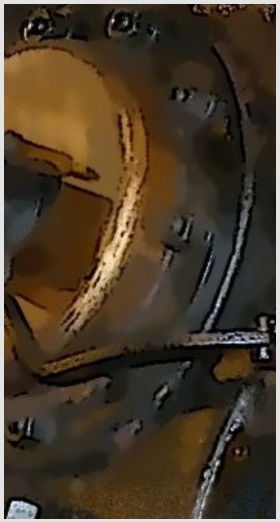
$$f(-3,\ 1,\ 2) = -3 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -7$$

$$b)\quad f(x, y, z) = \frac{4\sin^2 x + \cos y}{z}, \qquad (x, y, z) = \left(\frac{\pi}{6},\ 0,\ 4\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{6},\ 0,\ 4\right) = \frac{1}{4}\left(4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$c)\quad f(x, y, z) = e^x \sin y \cos z, \qquad (x, y, z) = \left(0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3}\right) = e^0 \sin\frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$



Definition:

Unter einer Funktion von n unabhängigen Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem Element des Definitionsbereiches

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$$

genau einen Wert in $\mathbb{R}$ zuordnet

$$f: \quad D \to \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Der Definitionsbereich D ist dabei eine Menge von n-Tupeln

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

reeller Zahlen, die in den Funktionsausdruck eingesetzt werden.

Beispiele:

$$y = f\underbrace{(x_1, x_2, x_3, x_4)}_{4\ \textit{Variablen}} = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1 x_4 + x_2 x_4$$

$$y = f\underbrace{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)}_{5\ \textit{Variablen}} = \ln\,(x_1 x_2 x_3) + \frac{x_1 x_2}{x_4^2 + x_5^2}$$

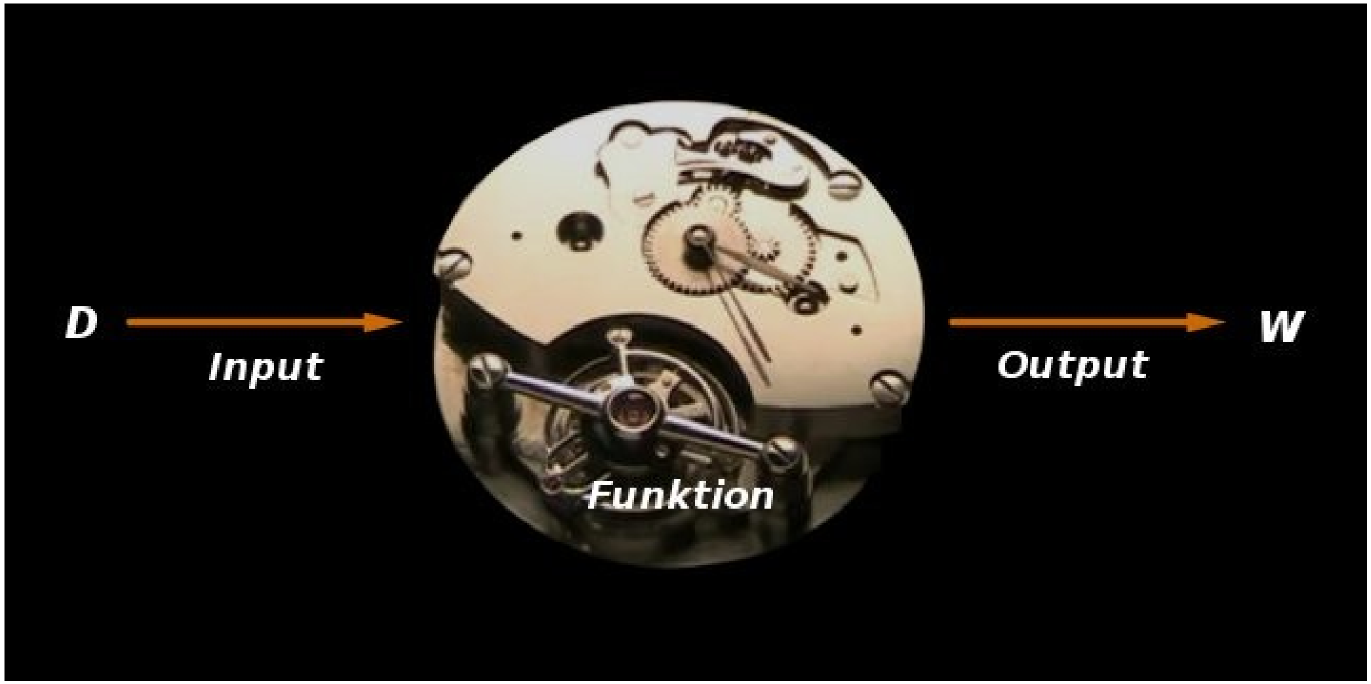
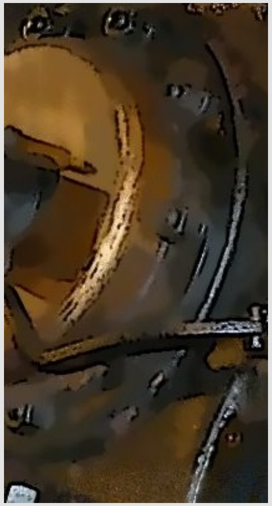


Abb.: Eine Sichtweise zur Darstellung des Definitions- und Wertebereiches einer Funktion

D : Definitionsbereich der Funktion, W : Wertebereich der Funktion



Definition:

Maximaler Definitionsbereich D einer reellen Funktion von n Variablen ist die Menge aller möglichen “Input”-Elemente, n-Tupel, die in den Funktionsausdruck eingesetzt, einen reellen “Output”, den Funktionswert, liefern.

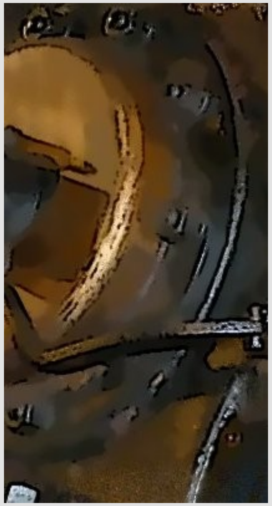
$$D \subset \mathbb{R}^n$$

Beispiele:

$$f(x) = \sqrt{x}\,, \qquad D = \{\, x \in \mathbb{R} \quad | \, x \geqslant 0 \,\}$$

$$f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}\,, \qquad D = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \, x, y \geqslant 0 \,\}$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x} + y\,z\,, \qquad D = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \, x \geqslant 0 \,\}$$



Definition:

Maximaler Wertebereich W einer reellen Funktion von n Variablen ist die Menge aller “Output”-Werte, die dem “Input” entsprechen

$$W \subset \mathbb{R}$$

Beispiele:

$$y = f(x) = \sqrt{x}\,, \qquad W = [\,0,\ \infty\,)$$

$$z = f(x,\ y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}\,, \qquad W = [\,0,\ \infty\,)$$

$$u = f(x, y, z) = \sqrt{x} + y\,z\,, \qquad W = \mathbb{R}$$