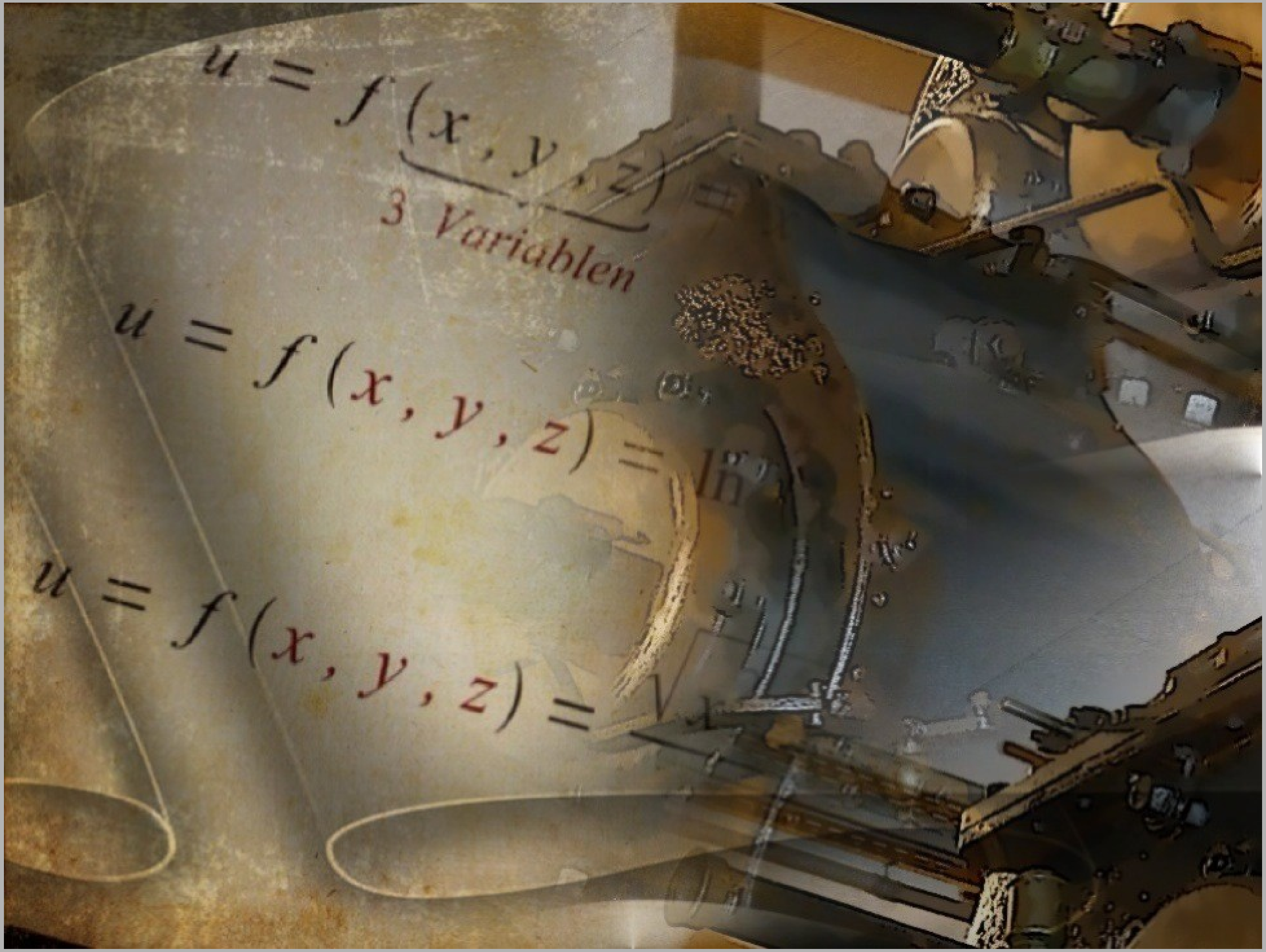
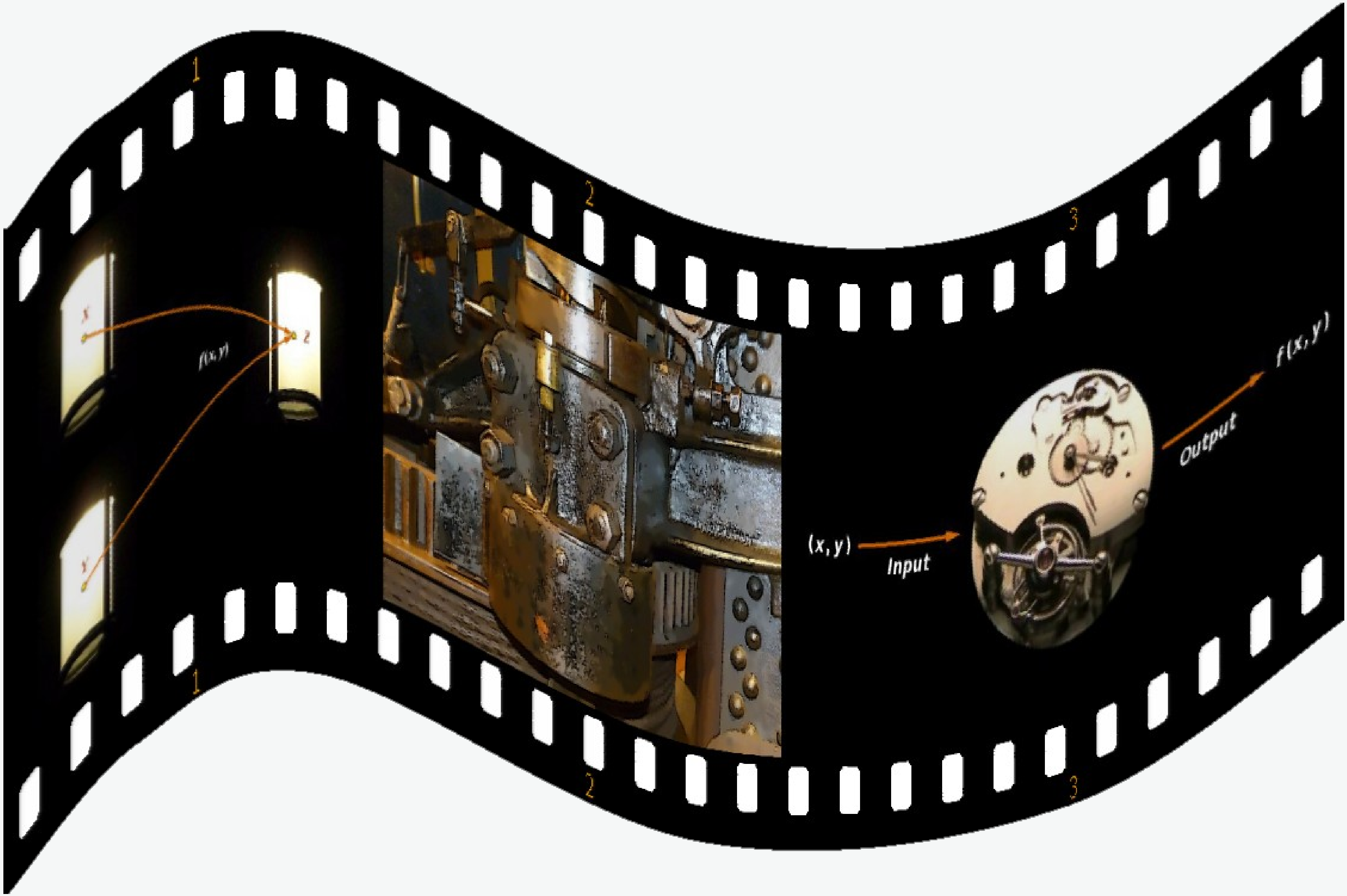
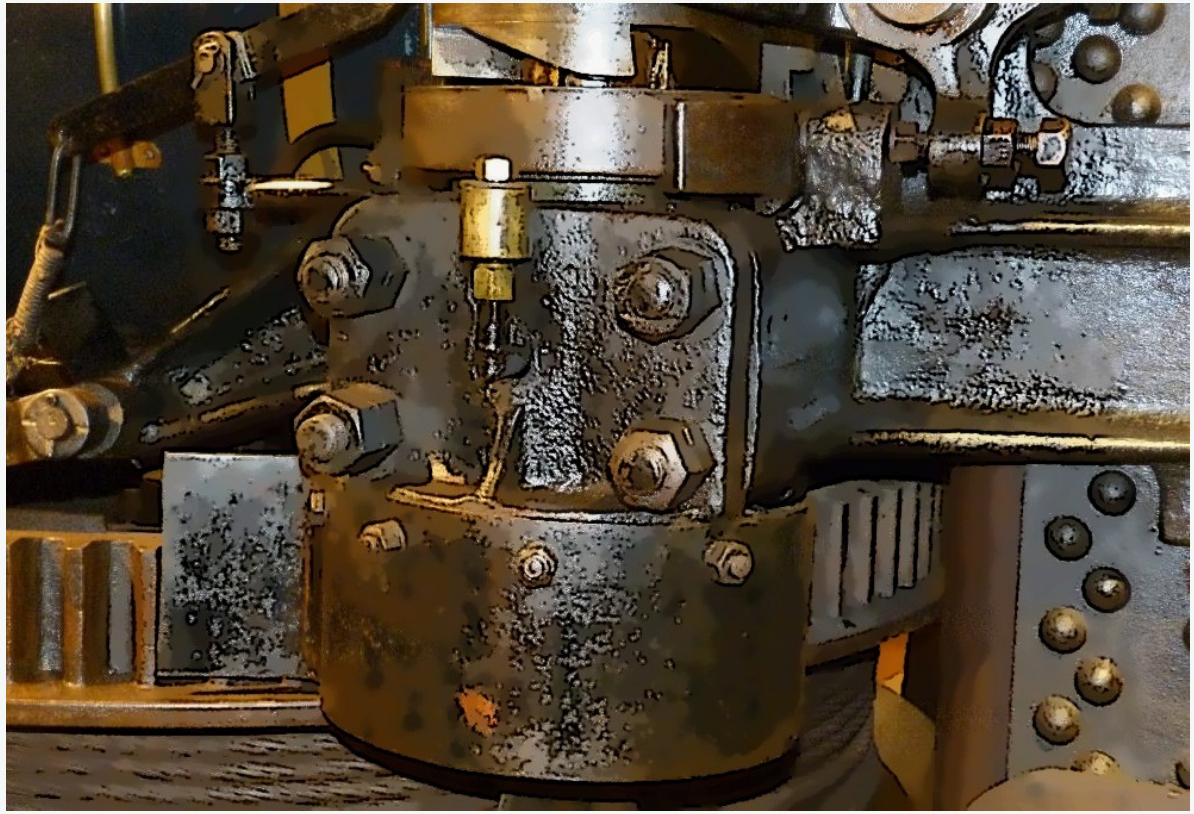


Funktionen mehrerer Variablen



x
y
z
f(x,y)
(x, y)
Input
Output
f(x, y)



Wahrscheinlich braucht man gar nicht zu sagen, dass Zusammenhänge nur in seltenen Fällen eindimensionaler Natur sind, d.h. von Funktionen nur einer Variablen beschrieben werden können. Fast alle Größen, mit denen man es in der Praxis zu tun hat, hängen in Wirklichkeit von verschiedenen Einflüssen ab – also von mehreren Variablen.

Die Zustandsgleichung eines idealen Gases:

$$p = p(V, T) = R\,\frac{T}{V}$$

p – Druck, T – Temperatur, V – Gasvolumen

R – universelle Gaskonstante

Ohmsches Gesetz:

$$U = U(R, I) = R\,I$$

U – Spannung, I – Stromstärke, R – Widerstand

Gerader Kreiszylinder:

Das Volumen eines Zylinders ergibt sich aus Grundfläche mal Höhe

$$V = f\,(r\,,\,h) = \mathit{Grundfläche} \cdot \mathit{Höhe} = \pi\, r^2\, h$$

Die Oberfläche besteht aus den zwei Kreisflächen und aus der Mantelfläche

$$A = g\,(r\,,\,h) = 2\,\mathit{Grundflächen} + \mathit{Mantelfläche} =$$

$$= 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, h$$

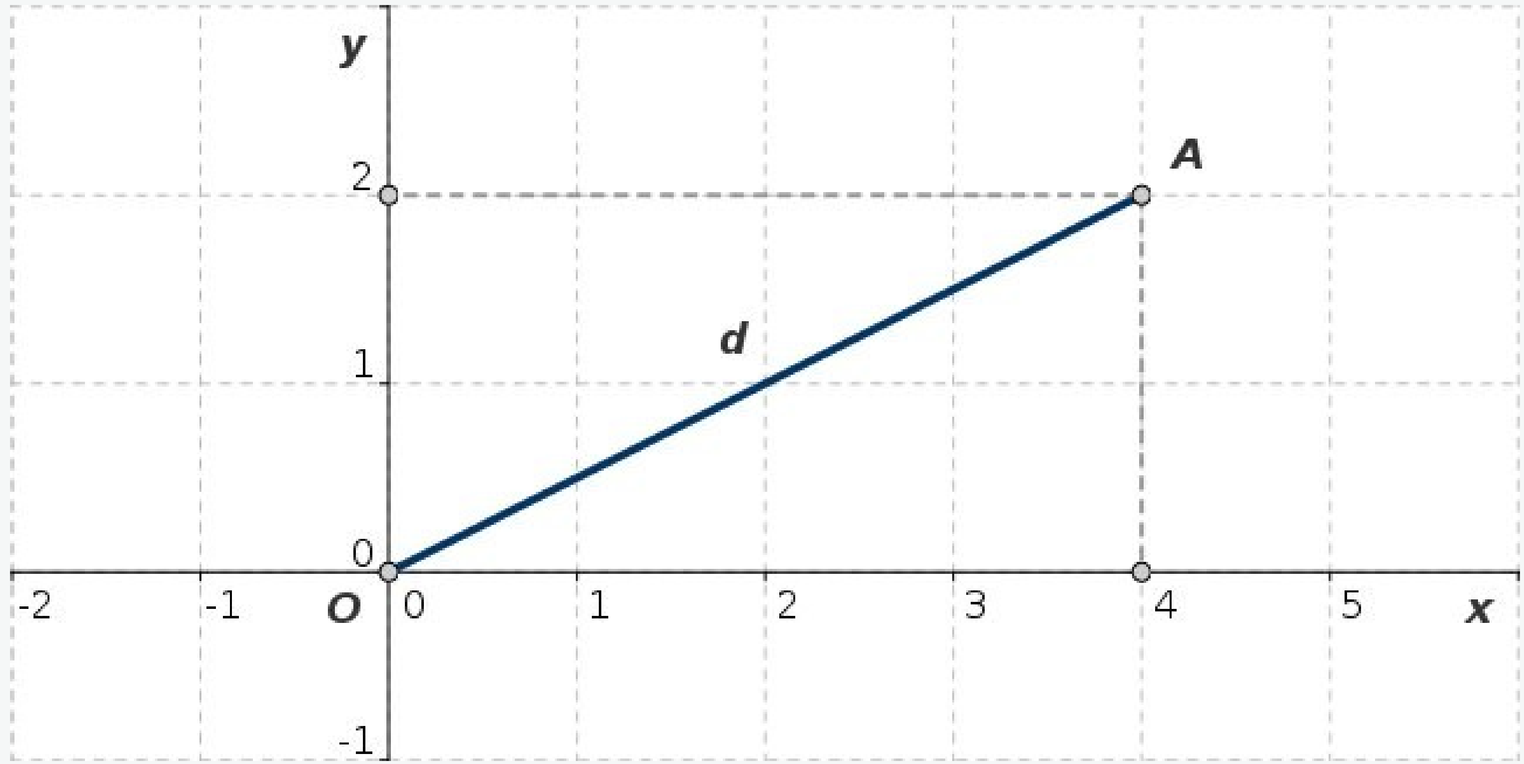


Abb. 1-1: Der Abstand zum Ursprung im kartesischen Koordinatensystem

Der Abstand d eines Punktes $A\,(x, y)$ vom Ursprung O beträgt in der Ebene

$$d = |\,OA\,| = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad d = d\,(x\,,\,y)$$

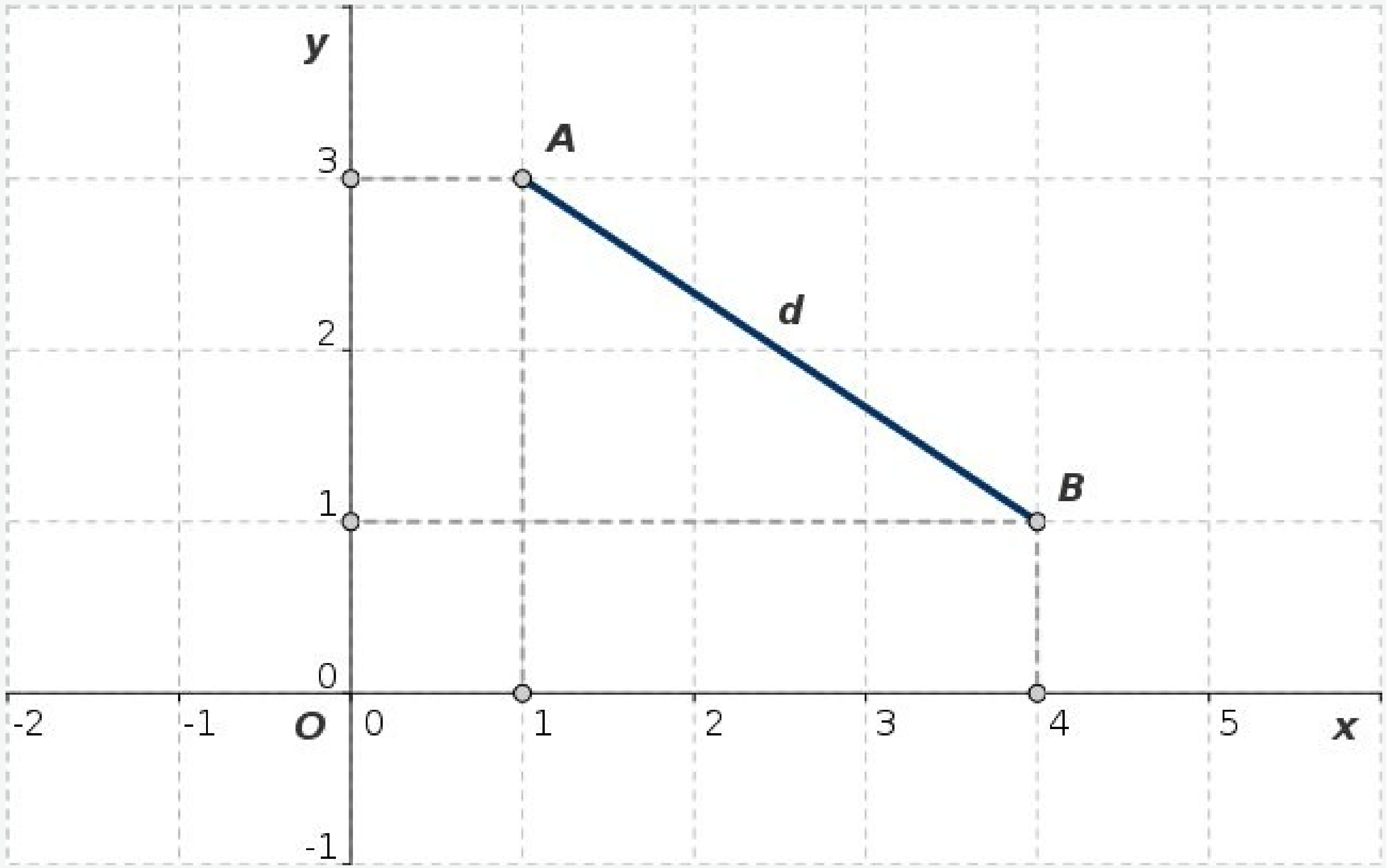


Abb. 1-2: Der Abstand zwischen zwei Punkten im kartesischen Koordinatensystem

Der Abstand d zwischen zwei Punkten A und B beträgt in der Ebene

$$d = | AB | = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}\,, \qquad d = d(x_A,\ x_B,\ y_A,\ y_B)$$

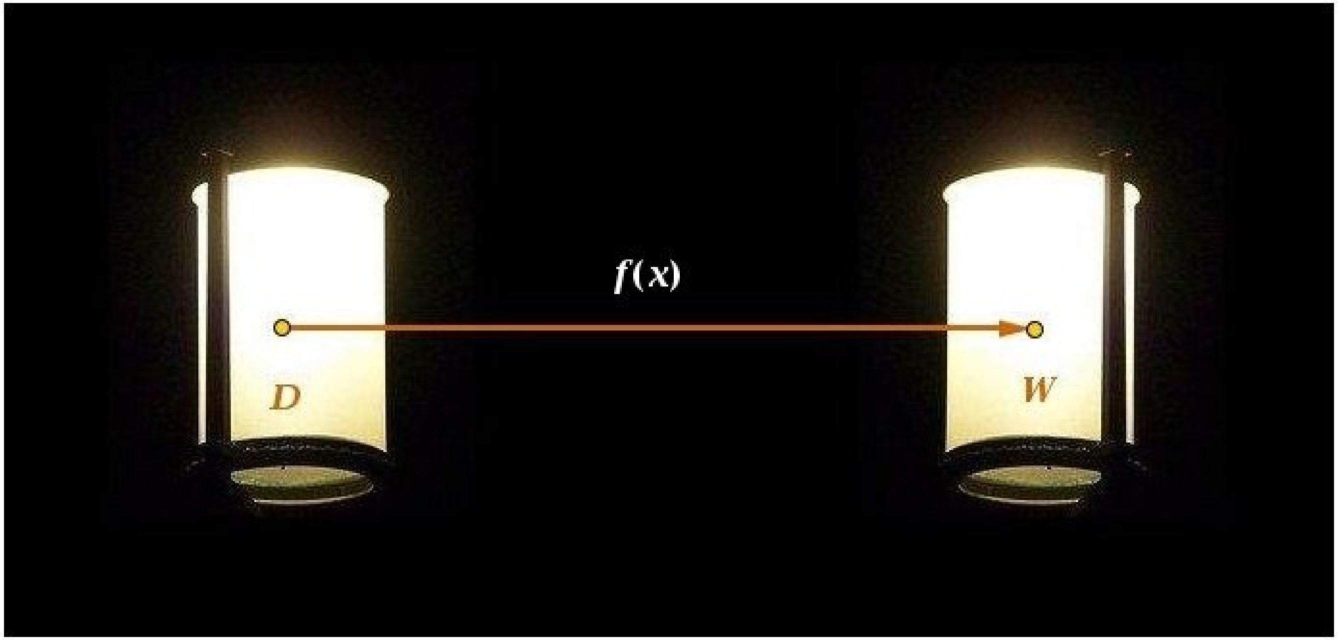


Abb. 2-1: Zum Konzept einer Abbildung

Funktionen mehrerer Variablen passen auf den ersten Blick nicht in das Konzept von Abbildungen. Für die Abbildung einer Menge D, Definitionsmenge, auf eine andere Menge W, Wertemenge, haben wir verlangt, dass es sich um eine Vorschrift handelt, die jedem Element der Menge D ein Element der Menge W zuordnet.

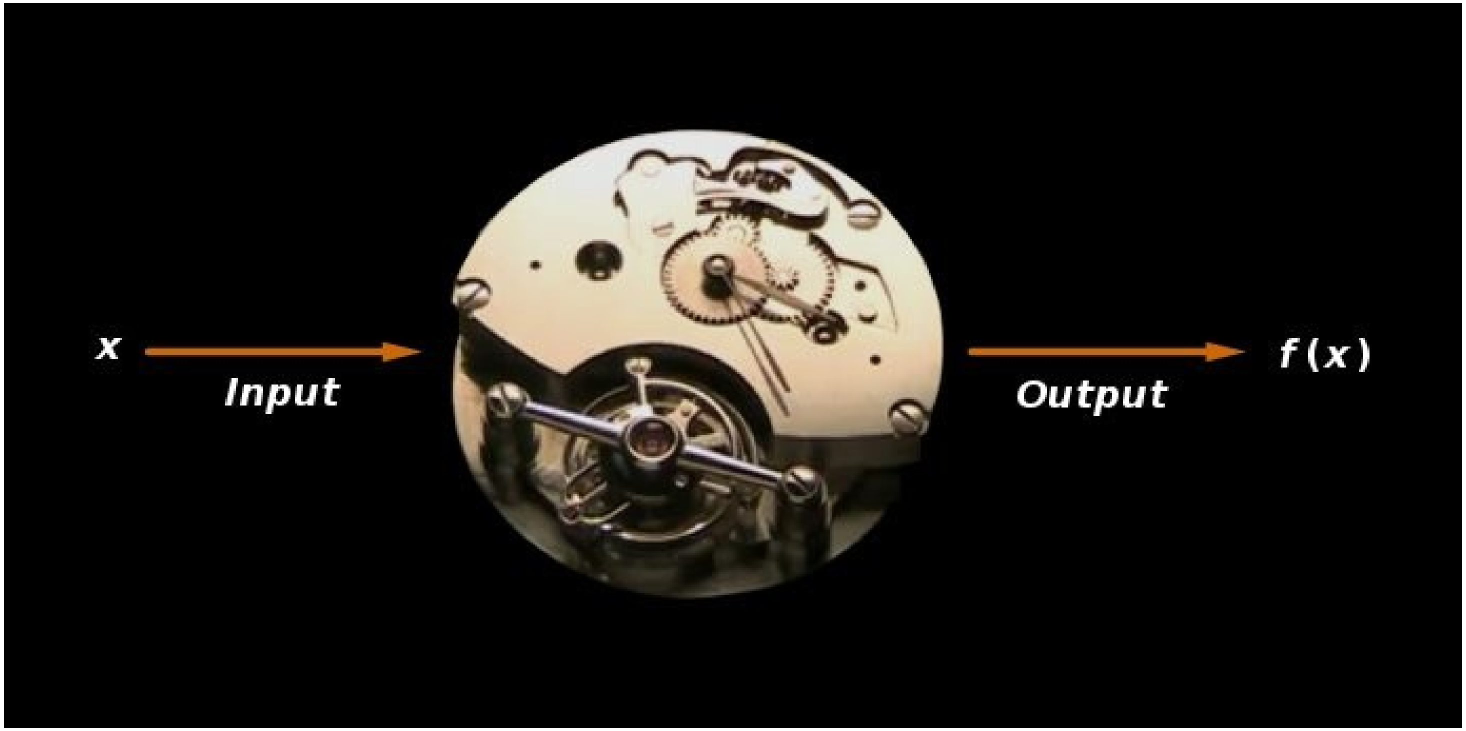


Abb. 2-2: Darstellinung einer Funktion $f = f(x)$ in Form einer Maschine

Bisher behandelten wir vorallem Funktionen, bei denen wir einer reellen Zahl eine reelle Zahl zuordneten. Oft stellt man sich eine Funktion als Maschine vor. Wenn man einen bestimmten Wert in die Maschine eingibt, kommt jedes Mal ein Wert heraus.

Input x und Output f (x) in Form einer Tabelle

	Argument x	Funktionswert
1.	$x = -2$	$f(-2) = 0$
2.	$x = -1$	$f(-1) = -1.5$
3.	$x = 0$	$f(0) = -2$
4.	$x = 1$	$f(1) = -1.5$
5.	$x = 2$	$f(2) = 0$
6.	$x = 3$	$f(3) = 2.5$
7.	$x = 4$	$f(4) = 6$

Tabelle 1: x-Werte und entsprechende Werte der Funktion $y = f(x)$

Vorschrift: $f(x) = 0.5\,x^2 - 2$

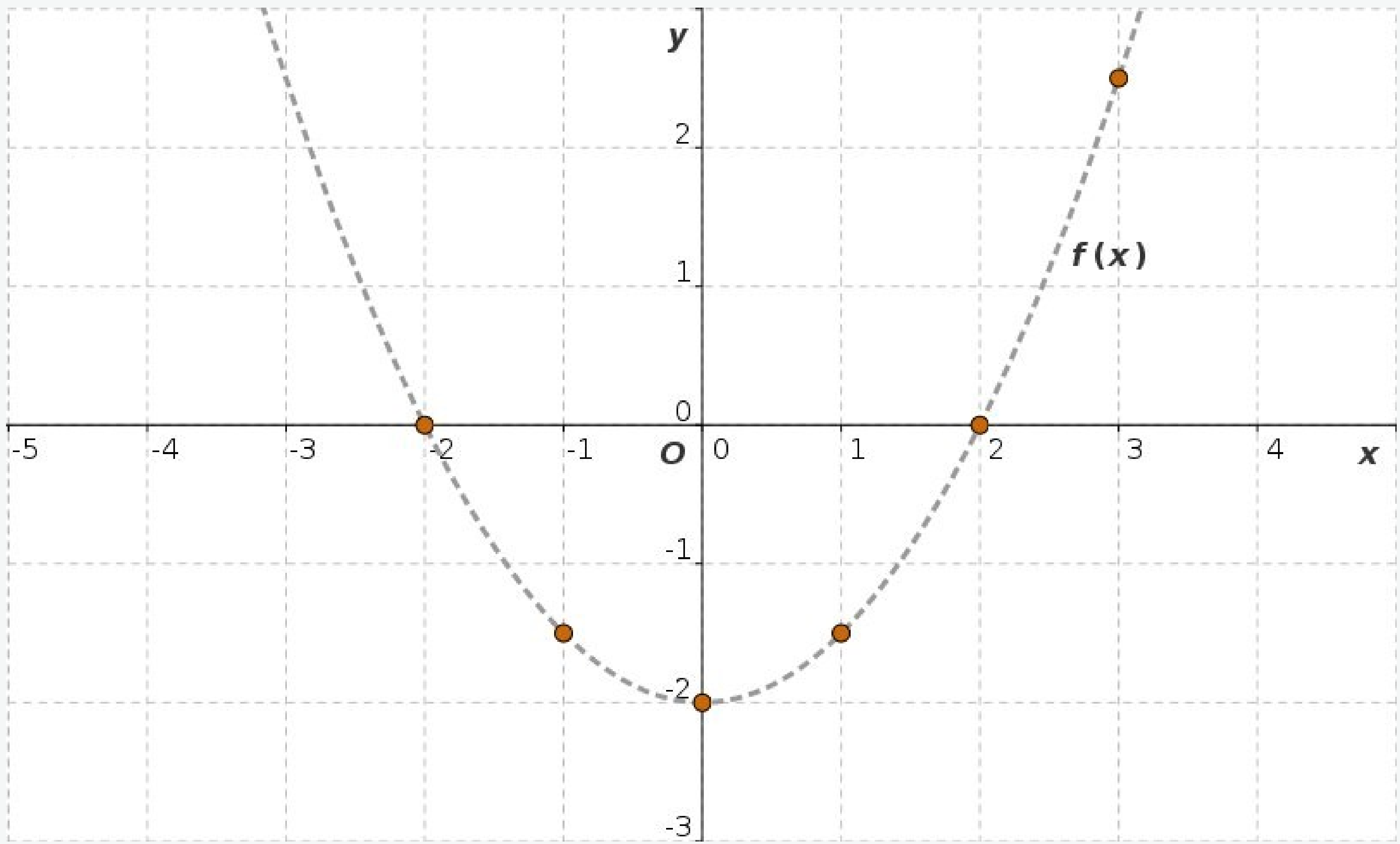


Abb. 3: Graphische Darstellung der Punkte (x, f (x)) in der x,y-Ebene

Die in der Tabelle eingegebenen x-Werte und entsprechende Werte der Funktion $f(x) = x^2/2 - 2$ können als $(x, f(x))$-Punkte im kartesischen Koordinatensystem graphisch dargestellt werden.

Input x, y und Output f (x, y) in Form einer Tabelle

	Argument x	Argument y	Funktionswert $f(x, y)$
1.	$x = -2$	$y = 0$	$f(-2, 0) = 0$
2.	$x = -1$	$y = 0$	$f(-1, 0) = 1$
3.	$x = 0$	$y = 0$	$f(0, 0) = 0$
4.	$x = 1$	$y = 1$	$f(1, 1) = 2$
5.	$x = 2$	$y = 1$	$f(2, 1) = 15$
6.	$x = 2$	$y = 2$	$f(2, 2) = 12$
7.	$x = -2$	$y = 2$	$f(-2, 2) = -4$

Tabelle 2: x- und y-Werte und entsprechende Werte der Funktion $z = f(x, y)$

Vorschrift: $f(x, y) = x^3 + 2x^2 - y^2$

Input x, y und Output f (x, y) in Form einer Tabelle

$$f\,(x\,,\,y) = x^3 + 2\,x^2 - y^2$$

$$f\,(2, 1) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 1^2 = 15$$

$$f\,(1, 2) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 2^2 = -1$$

$$f\,(0, 1) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 1^2 = -1$$

$$f\,(1, 0) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 0^2 = 3$$

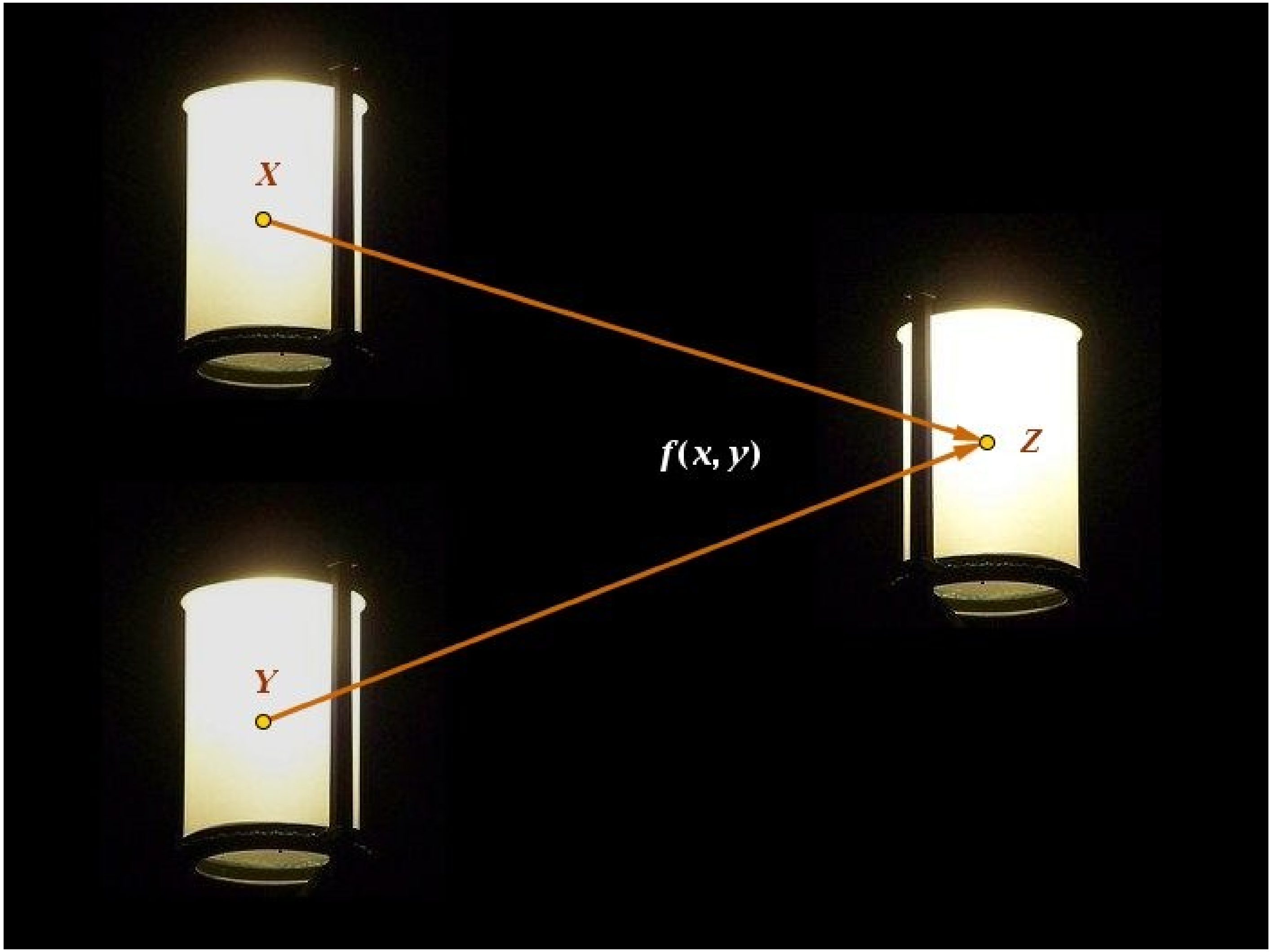


Abb. 4-1: Im Fall einer Vorschrift $z = f(x, y)$ wird aus zwei Mengen in eine abgebildet

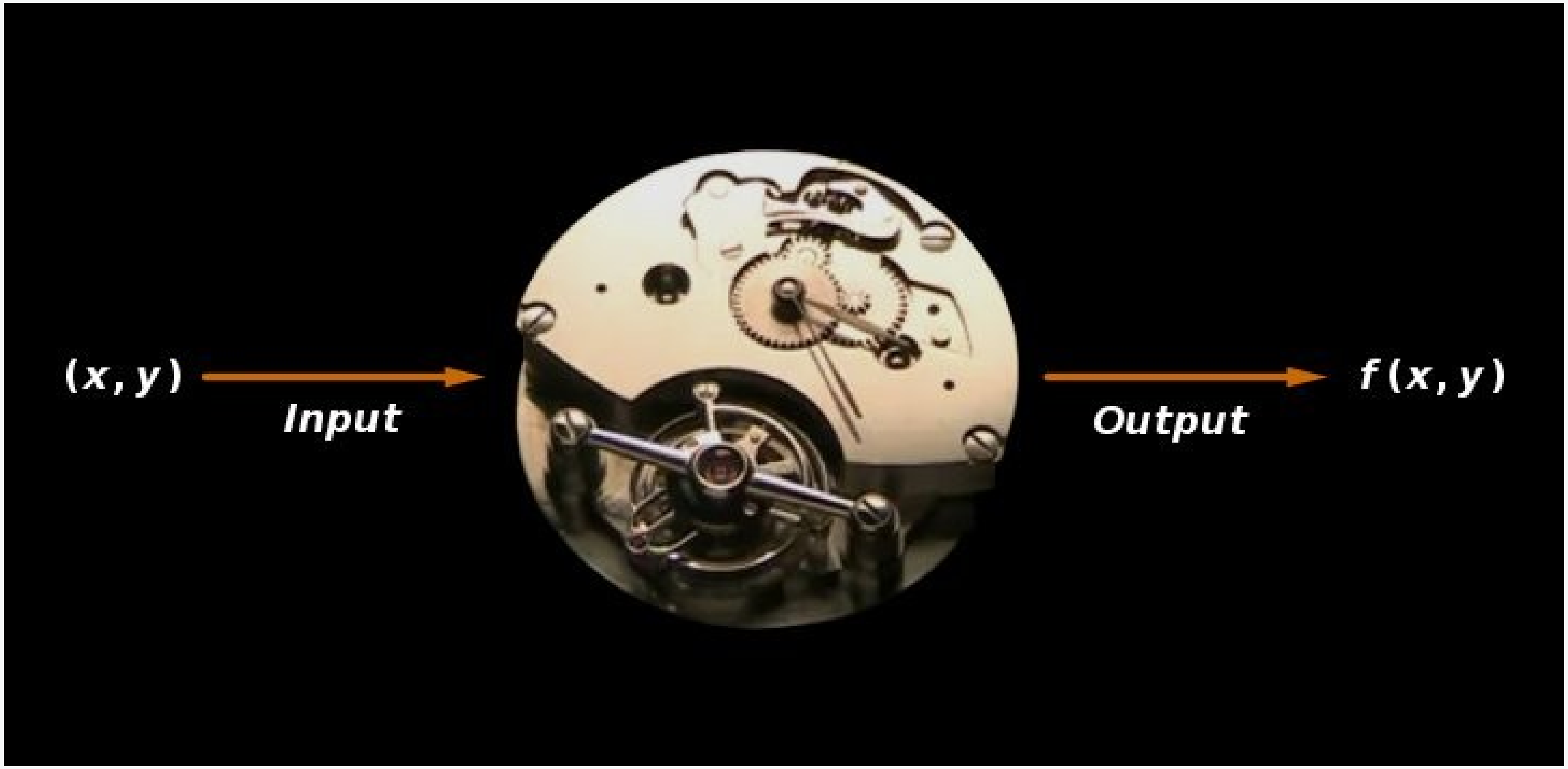


Abb. 4-2: Zum Modell einer Maschine

Zuordnung zwischen zwei Mengen kann man mit dem Modell einer Maschine vergleichen. Die Elemente *(x, y)* der Menge X x Y sind geordnete Paare, die Elemente des R^2-Raumes. Die Elemente der anderen Menge Z sind einzelne Werte $f(x, y)$, die Elemente des eindimensionalen Raumes. Jedem Paar *(x, y)* ordnet einmal das Modell der “Maschine” ein $z = f(x, y)$-Wert zu.

Eine Funktion f mit Vorschrift $z = f(x, y)$ ist eine Zuordnung von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l} X \longrightarrow \\ Y \longrightarrow \end{array} \boxed{(x, y)} \longrightarrow z = f(x, y) \;\; (Z)$$

Man fasst die zwei Argumente der Funktion als ein Paar auf, als Element des zweidimensionalen Raums. Eine Funktion mit Vorschrift $z = f(x, y)$ ist demnach eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in die reellen Zahlen.

Das Konzept einer Abbildung bleibt erhalten!