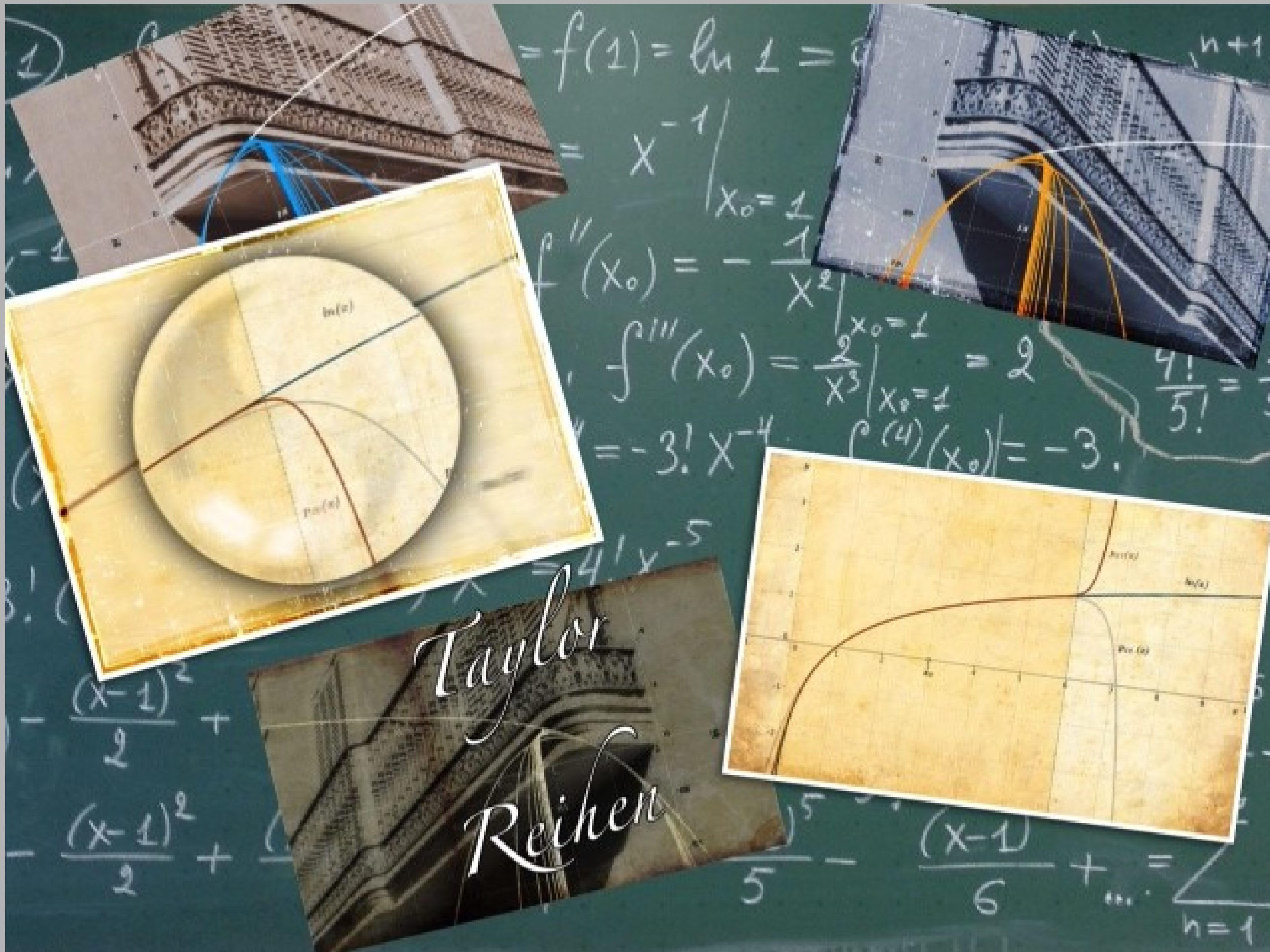
Taylor-Reihen


Taylor
Reihen

Brook Taylor war britischer Mathematiker.

Nach ihm sind die Taylorreihe und die Taylorsche Formel benannt, mit der man stetig differenzierbare Funktionen als Potenzreihen darstellen oder durch Polynome annähern kann.

Taylorreihe einer Funktion:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

x_0 – Entwicklungszentrum oder Entwicklungspunkt

1. Für das Entwicklungszentrum 0 geht die Taylorsche Reihe in die Maclaurinsche Reihe über.

2. Den Konvergenzradius r der Taylorreihe bestimmt man nach der Formel:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Die Reihe konvergiert überall im Intervall

$$x_0 - r < x < x_0 + r$$

Aufgabe 1:

1. Entwickeln Sie die logarithmische Funktion $f(x) = \ln x$ um die Stelle $x = 1$ in eine Taylorreihe.
2. Stellen Sie $\ln 2$ in Form einer Zahlenreihe dar.

Aufgabe 2:

Entwickeln Sie die logarithmische Funktion $f(x) = \ln x$ um die Stelle *a)* $x = 2$, *b)* $x = 3$ in eine Taylorreihe. Vergleichen Sie die Ergebnisse dieser Aufgabe mit den Ergebnissen der Aufgabe 1.

Aufgabe 3:

Entwickeln Sie die Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe nach Potenzen von $x - 2$

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

Aufgabe 4:

Entwickeln Sie die Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe um das Entwicklungszentrum x_0 und bestimmen Sie den Konvergenzradius:

$$a)\quad f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x_0 = -1$$

$$b)\quad f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x_0 = -2$$

$$f(x) = \ln x\,, \quad x_0 = 1 \;-\; \text{Entwicklungszentrum}$$

$$f(x_0) = \ln x_0 = \ln 1 = 0$$

$$f\,'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \qquad f\,'(1) = 1$$

$$f\,''(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \qquad f\,''(1) = -1 = -1\,!$$

$$f\,'''(x) = \frac{2}{x^3} = 2\,x^{-3}, \qquad f\,'''(1) = 2 = 2\,!$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{x^4} = -2\cdot 3\;x^{-4}, \qquad f^{(4)}(1) = -2\cdot 3 = -3\,!$$

$$f^{(5)}(x) = -2\cdot 3\cdot(-4)\;x^{-5} = 2\cdot 3\cdot 4\;x^{-5} = 4\,!\;x^{-5}$$

$$f^{(5)}(1) = 4\,!$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,(n-1)\,!\;x^{-n}, \qquad f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}\,(n-1)\,!$$

Taylorreihe einer Funktion im Entwicklungspunkt x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

(•)

Um *ln 2* in Form einer Zahlenreihe darzustellen, muss man den Wert $x = 2$ in die Formel (●) auf Seite 2-1b einsetzen.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots \simeq 0.6931$$

Den Konvergenzradius r der Taylorreihe bestimmt man nach der Formel:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$$

William Brouncker (1620-1684), ein irischer Mathematiker

1668 fand Brouncker auf geometrischen Wege durch Quadratur eines Flächenstückes unterhalb der Hyperbel $y = 1/x$ eine Reihe, die wir heute als

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$$

schreiben. *(Hans Wußing, "6000 Jahre Mathematik")*

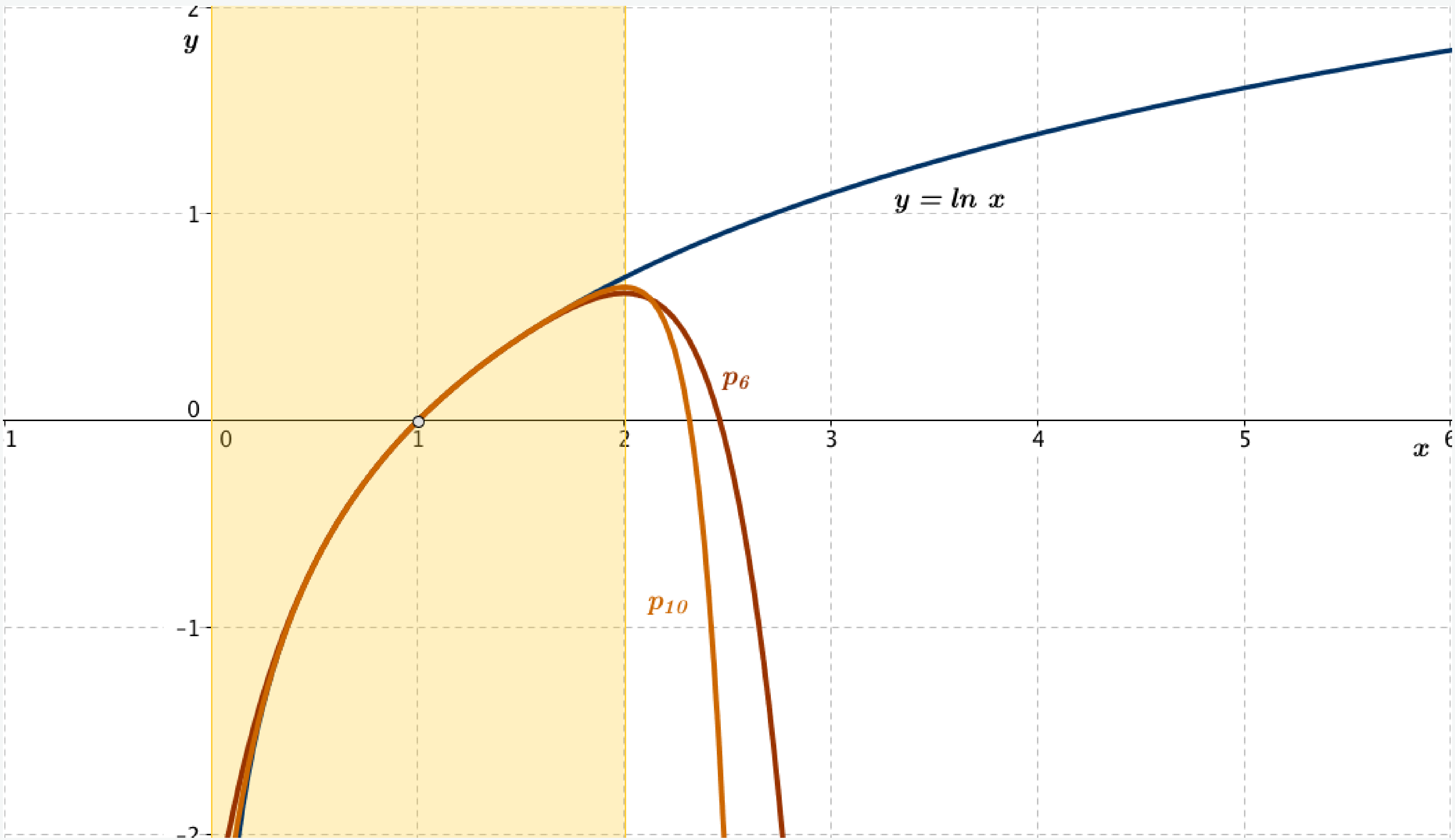


Abb. L1-1: Die Funktion $f(x) = \ln x$ und Näherungspolynome 6. und 10. Grades. Der Entwicklungspunkt ist $x = 1$, der Konvergenzradius ist $r = 1$

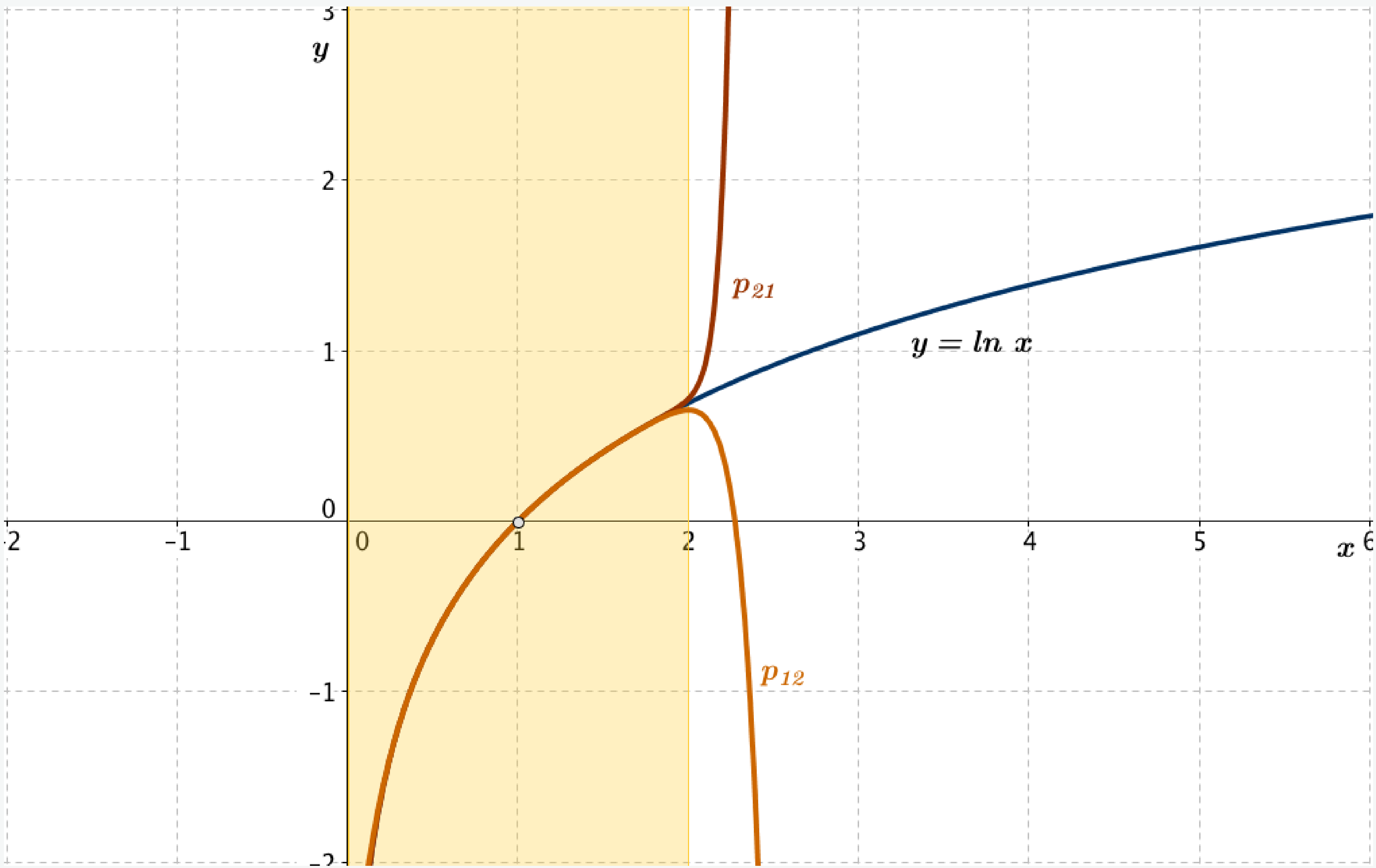


Abb. L1-2: Die Funktion $f(x) = \ln x$ und Näherungspolynome 12. und 21. Grades. Der Entwicklungspunkt ist $x = 1$, der Konvergenzradius ist $r = 1$

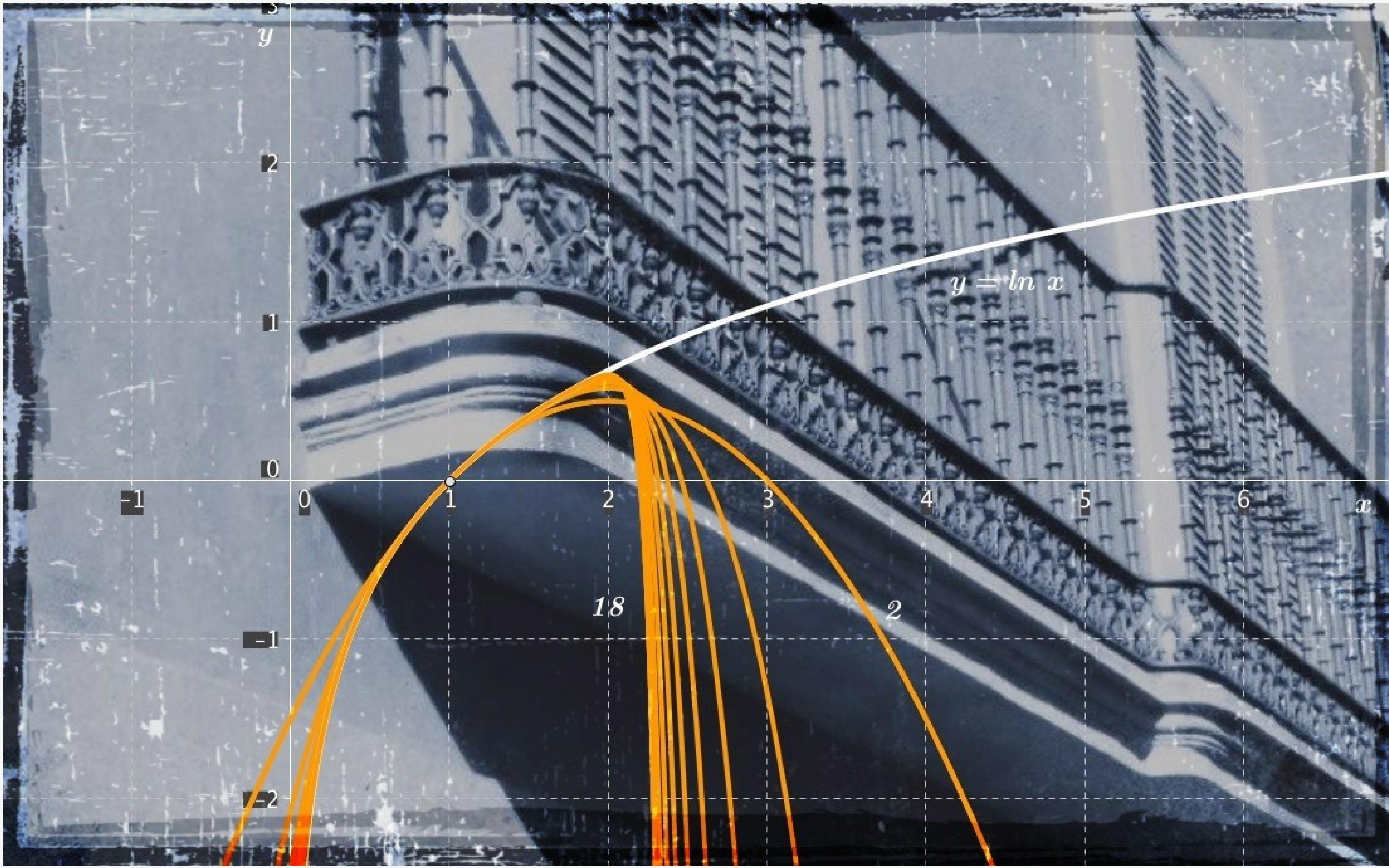


Abb. L1-3: Die Funktion f (x) =ln x und Näherungspolynome 2., 4., 6., 8.,…, 18. Grades

$f(x) = \ln x\,, \quad x_0 = 2$ – Entwicklungszentrum

$$f(x_0) = \ln x_0 = \ln 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \qquad f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \qquad f''(2) = -\frac{1}{2^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} = 2\,x^{-3}, \qquad f'''(2) = \frac{2}{2^3} = \frac{2\,!}{2^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} = -3\,!\;x^{-4}, \qquad f^{(4)}(2) = -\frac{3\,!}{2^4}$$

$$f^{(5)}(x) = -2 \cdot 3 \cdot (-4)\;x^{-5} = 2 \cdot 3 \cdot 4\;x^{-5} = \frac{4\,!}{x^5}$$

$$f^{(5)}(2) = \frac{4\,!}{2^5}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,(n-1)\,!\;x^{-n} = (-1)^{n+1}\,\frac{(n-1)\,!}{x^n}$$

$$f^{(n)}(2) = (-1)^{n+1}\,\frac{(n-1)\,!}{2^n}$$

Taylorreihe einer Funktion im Entwicklungspunkt x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + + \frac{f^4(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \ldots$$

$$\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(x-2)^3}{3 \cdot 2^3} - \frac{(x-2)^4}{4 \cdot 2^4} + \ldots =$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}, \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1) \cdot 2^{n+1}}{n \cdot 2^n} \right) = 2 \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) =$$

$$= 2 \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 2$$

Entwicklung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ um die Stelle $x = 2$ in eine Taylorreihe.

$$\ln x \,\Big|_{x_0 = 2} = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(x-2)^3}{3 \cdot 2^3} - \frac{(x-2)^4}{4 \cdot 2^4} + \ldots =$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 2^n}$$

Entwicklungskoeffizienten:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist $r = 2$.

Taylorreihen: Lösung 2a

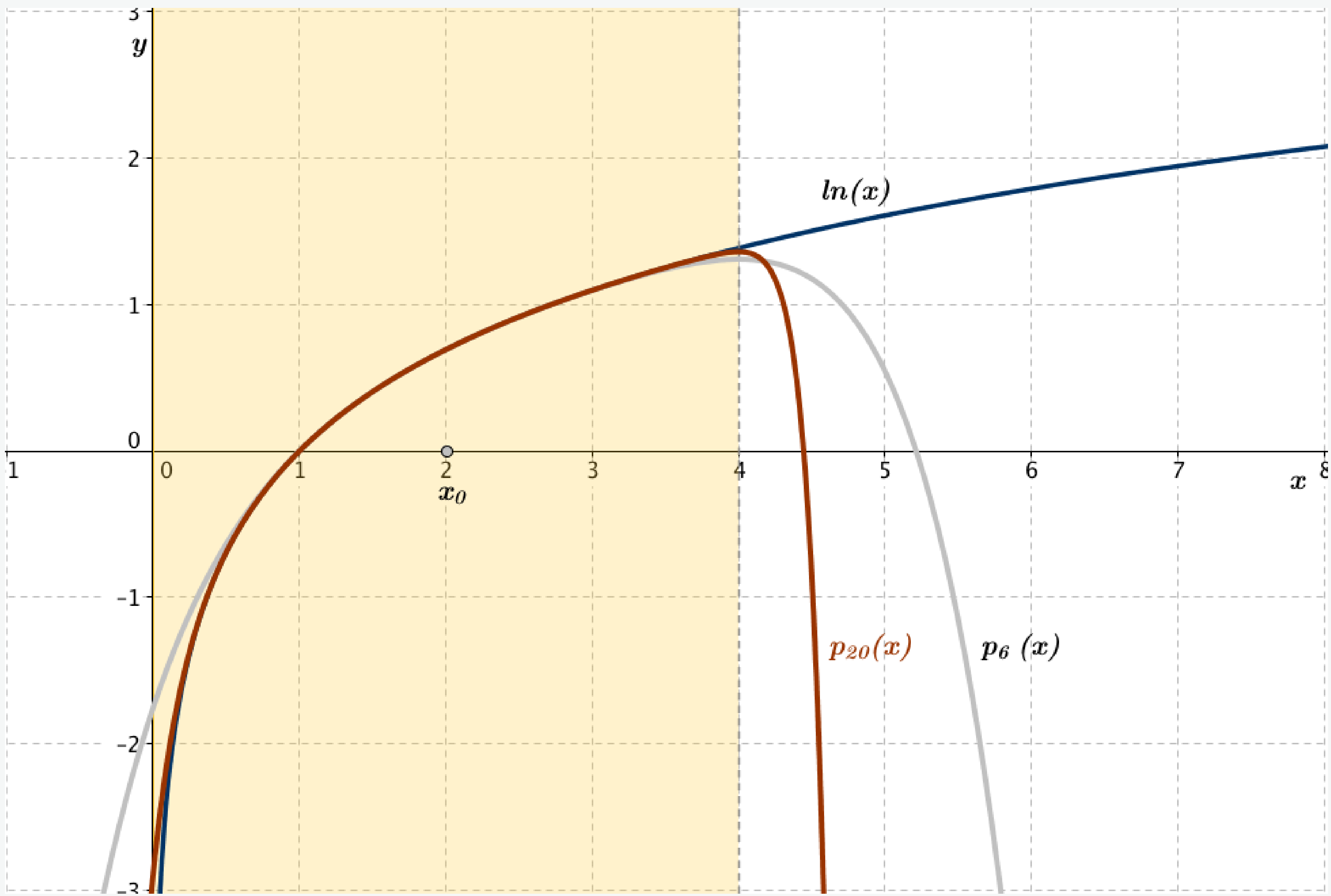


Abb. L2-1: Die Funktion $f(x) = \ln x$ und Näherungspolynome 6. und 20. Grades. Der Entwicklungspunkt ist $x = 2$, der Konvergenzradius ist $r = 2$

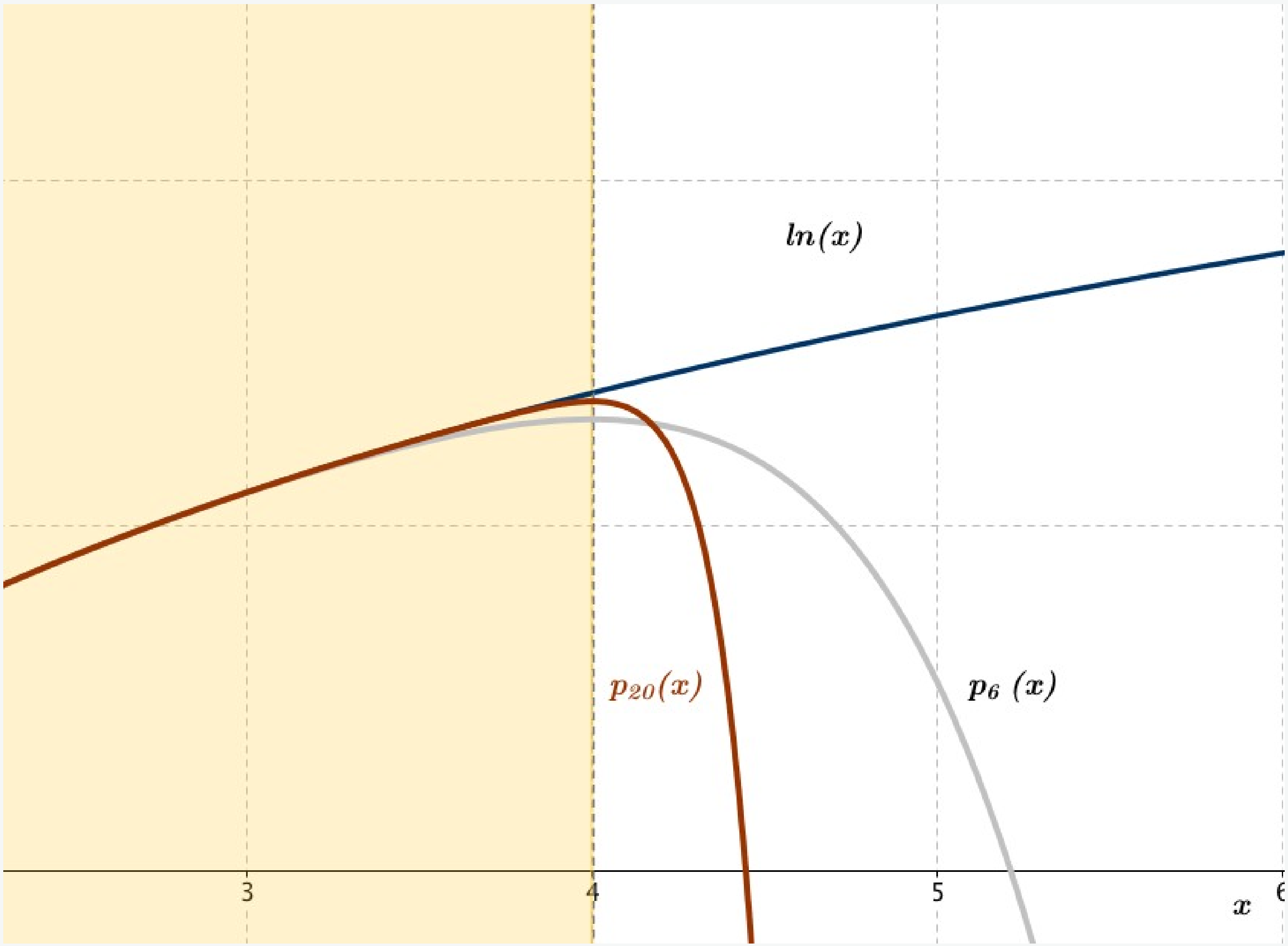


Abb. L2-2: Die Funktion f (x) =ln x und Näherungspolynome 6. und 20. Grades.

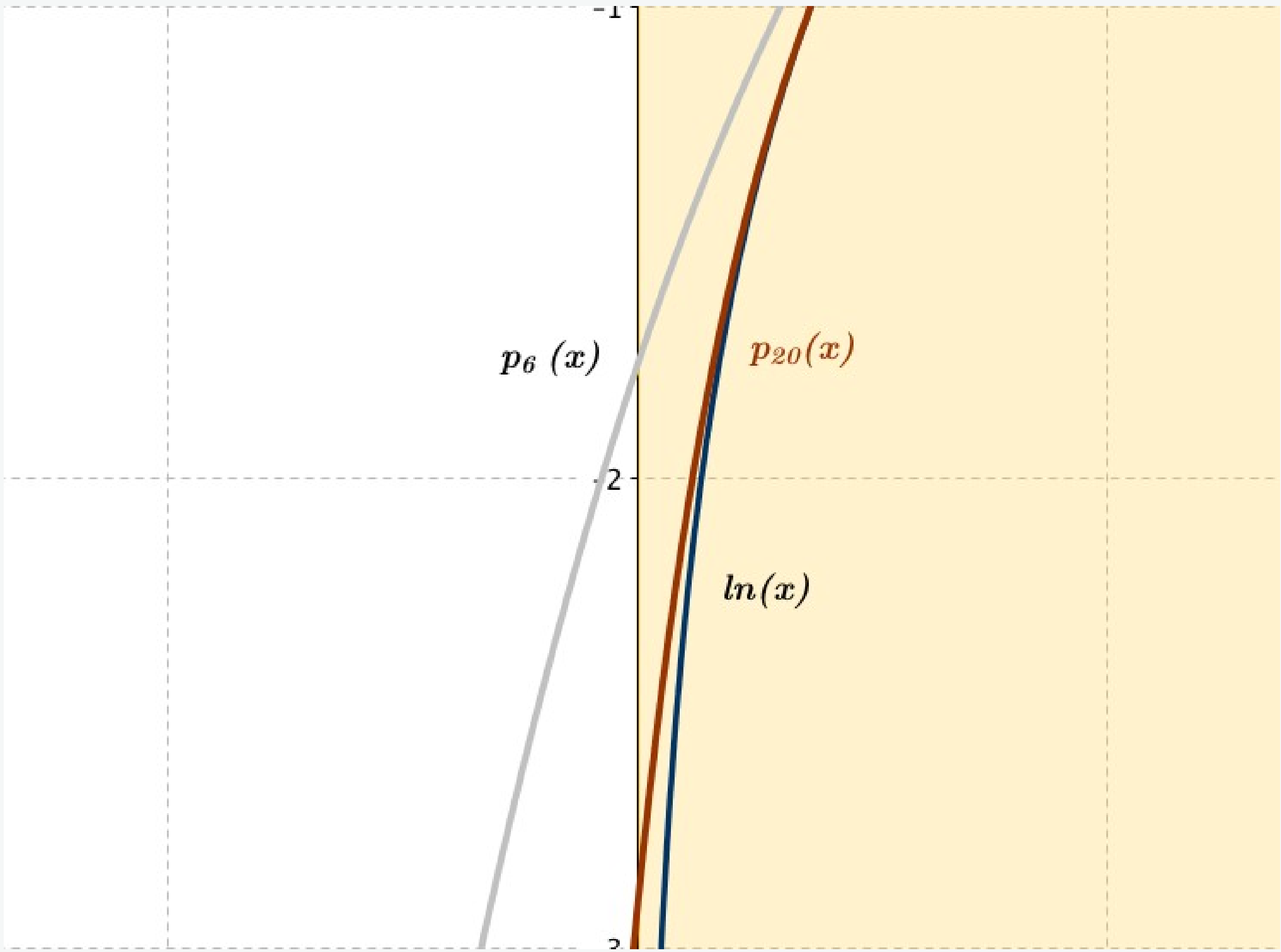


Abb. L2-3: Die Funktion $f(x) = \ln x$ (blaue Kurve) und Näherungspolynome 6. und 20. Grades (entsprechend graue und rote Kurven) im Bereich $-1.3 \leq x \leq 1.3$

Entwicklung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ um die Stelle $x = 3$ in eine Taylorreihe.

$$\ln x \,\Big|_{x_0 = 3} = \ln 3 + \frac{x-3}{3} - \frac{(x-3)^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{(x-3)^3}{3 \cdot 3^3} - \frac{(x-3)^4}{4 \cdot 3^4} + \ldots =$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$$

Entwicklungskoeffizienten:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n}$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist $r = 3$.

Taylorreihen: Lösung 2b

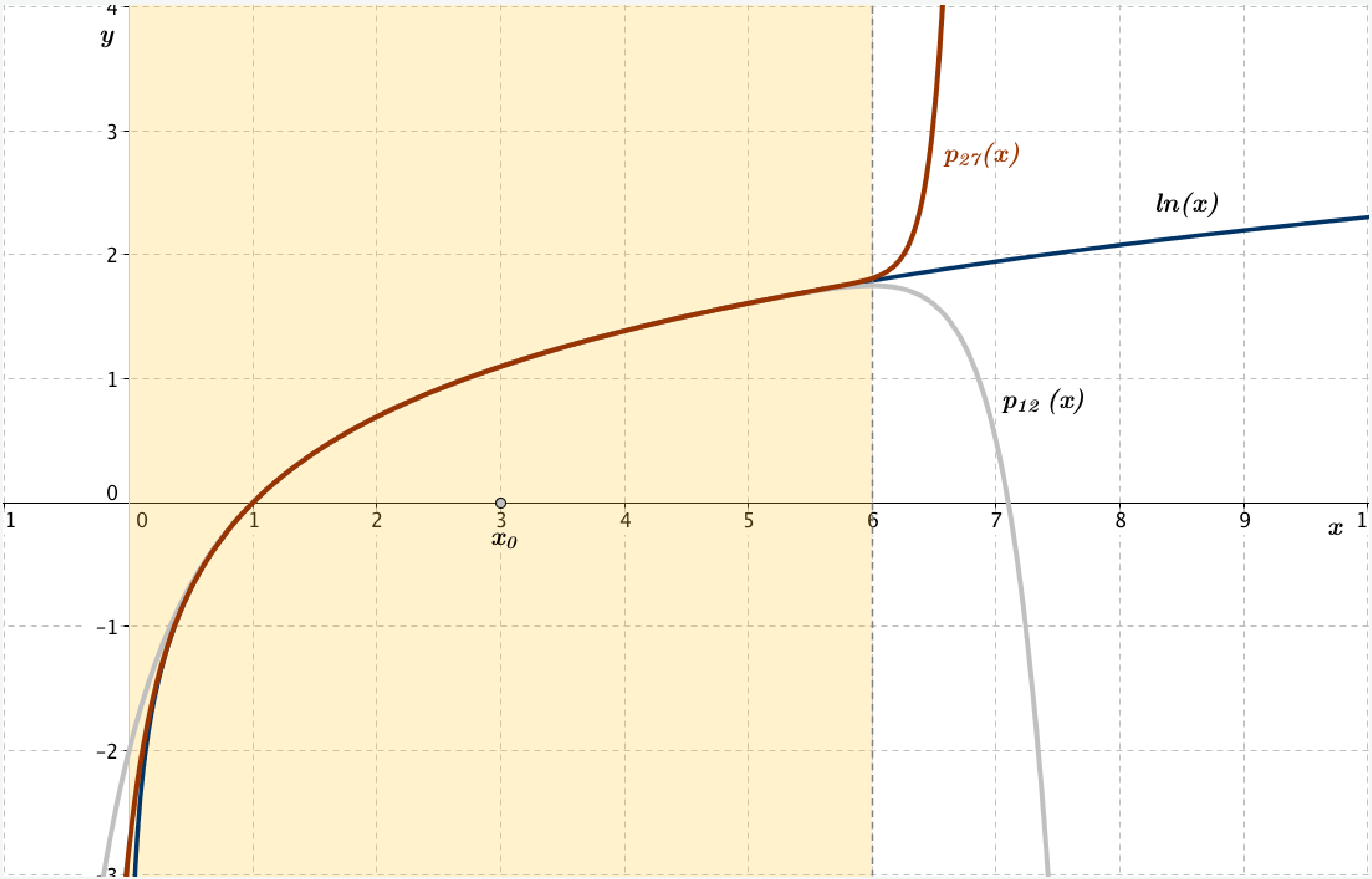
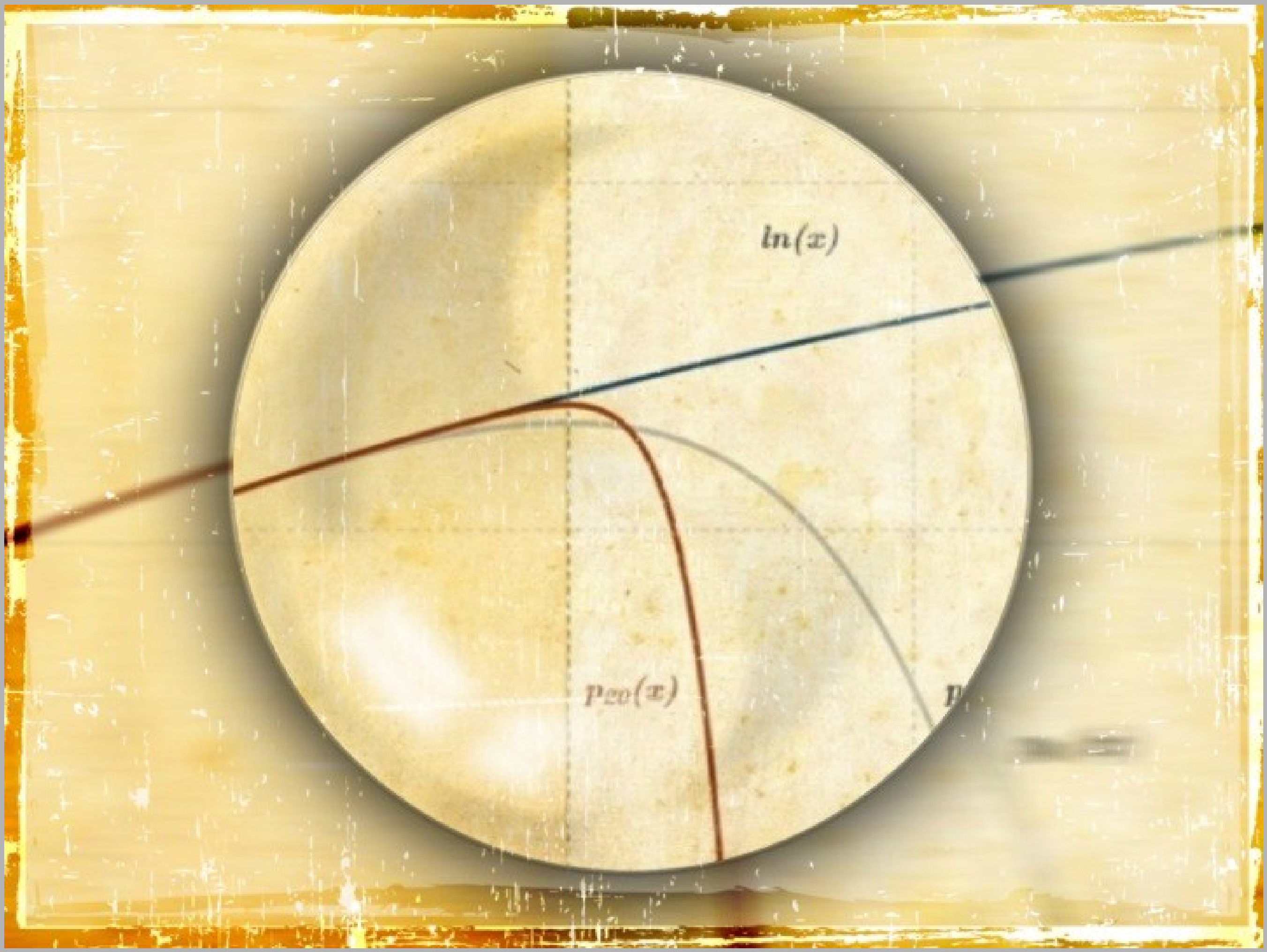


Abb. L2-4: Die Funktion f (x) =ln x und Näherungspolynome 12. und 27. Grades. Der Entwicklungspunkt ist x = 3, der Konvergenzradius ist r = 3


$ln(x)$
$p_{20}(x)$

Entwicklung der Logarithmusfunktion *f (x) = ln x* um die Stelle $x = x_0$ in eine Taylorreihe kann man in einer allgemeinen Form darstellen:

$$\ln x\,\big|_{x=3x_0} = \ln 3 + \frac{x - x_0}{x_0} - \frac{(x - x_0)^2}{2 \cdot x_0^2} + \frac{(x - x_0)^3}{3 \cdot x_0^3} - \frac{(x - x_0)^4}{4 \cdot x_0^4} + \ldots =$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x - x_0)^n}{n \cdot x_0^n}$$

Entwicklungskoeffizienten:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot x_0^n}$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist $r = x_0$.

Allgemeine Formel der Taylorreihe:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

Entwicklung einer Funktion in die Taylorreihe um die Stelle $x = 2$:

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x - 2) + \frac{f''(2)}{2!}(x - 2)^2 + \ldots$$

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

$$f'(x) = 12x^2 - 6x + 5, \qquad f''(x) = 24x - 6, \qquad f'''(x) = 24$$

$$f^{(n)}(2) = 0 \qquad n \geqslant 4$$

$$f(x) = 29 + 41(x-2) + \frac{42}{2!}(x-2)^2 + \frac{24}{3!}(x-2)^3 =$$

$$= 29 + 41(x-2) + 21(x-2)^2 + 4(x-2)^3$$

Taylorreihen: Lösung 4a

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x_0 = -1$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad f(-1) = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}, \qquad f'(-1) = -\frac{2}{(-1)^3} = 2$$

$$f''(x) = \frac{2\cdot 3}{x^4} = \frac{3!}{x^4}, \qquad f''(-1) = \frac{3!}{(-1)^4} = 3!$$

$$f'''(x) = -\frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5} = -\frac{4!}{x^5}, \qquad f'''(-1) = -\frac{4!}{(-1)^5} = 4!$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}, \qquad f^{(n)}(-1) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+2}} = (n+1)!$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} (x+1)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n$$

Taylor-Reihe:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n$$

Entwicklungskoeffizienten:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0 = -1)}{n!} = n + 1$$

Der Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \right) = 1$$

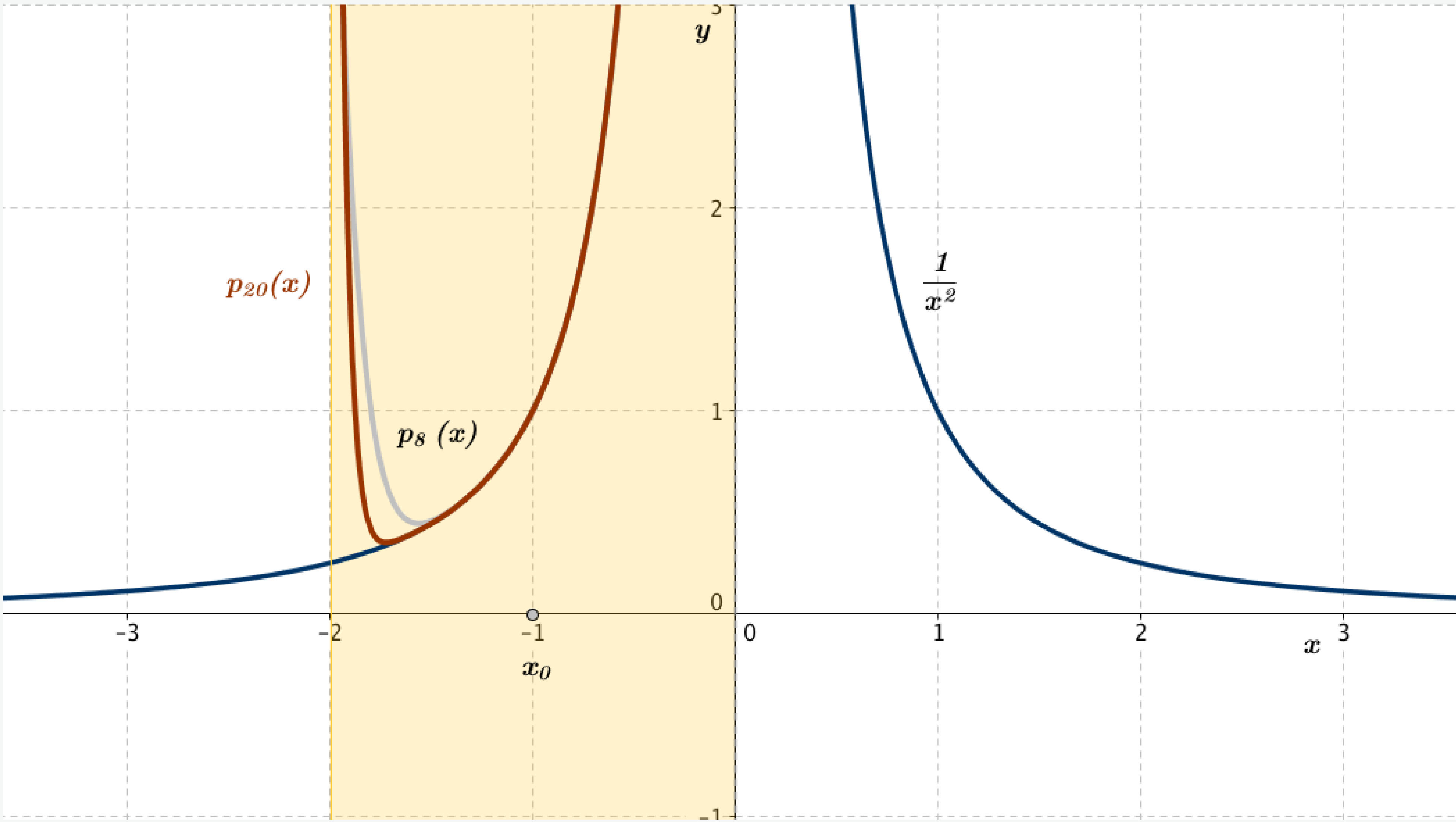


Abb. L4-1: Die Funktion $f(x) = 1/x^2$ und Näherungspolynome 8. und 20. Grades. Der Entwicklungspunkt ist $x = -1$, der Konvergenzradius ist $r = 1$

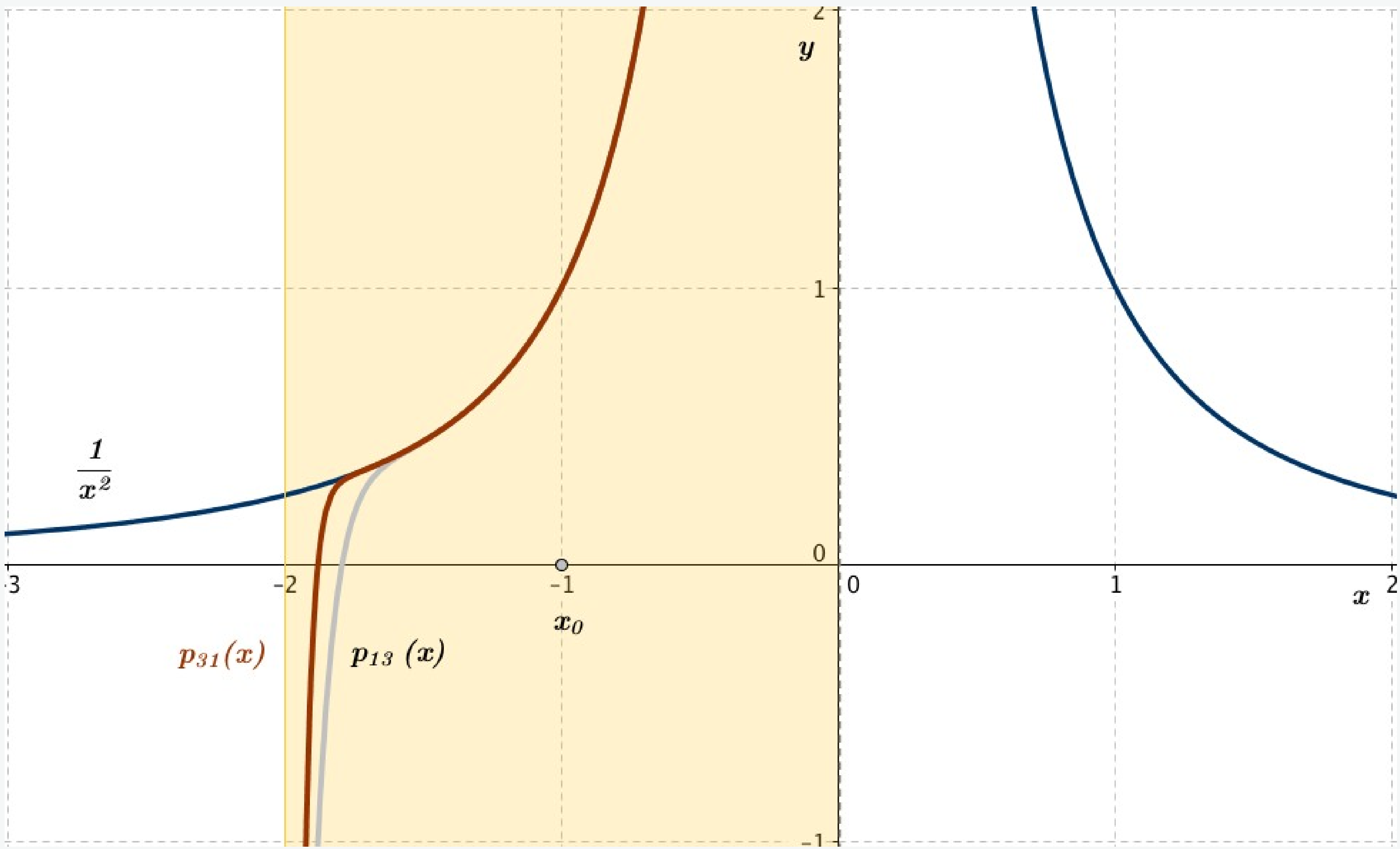


Abb. L4-2: Die Funktion f (x) = 1/ x² und Näherungspolynome 13. und 31. Grades. Der Entwicklungspunkt ist x = -1, der Konvergenzradius r = 1

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x_0 = -2$$

$$f(x_0) = f(-2) = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{2^2}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}, \qquad f'(-2) = -\frac{2}{(-2)^3} = \frac{2!}{2^3}$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot 3}{x^4} = \frac{3!}{x^4}, \qquad f''(-2) = \frac{3!}{(-2)^4} = \frac{3!}{2^4}$$

$$f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} = -\frac{4!}{x^5}, \qquad f'''(-2) = -\frac{4!}{(-2)^5} = \frac{4!}{2^5}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}, \qquad f^{(n)}(-2) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{(-2)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{2^{n+2}}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n! \cdot 2^{n+2}} (x+2)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} (x+2)^n$$

Taylor-Reihe:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} (x+2)^n$$

Entwicklungskoeffizienten:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0 = -2)}{n!} = \frac{n+1}{2^{n+2}}$$

Der Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+3}(n+1)}{2^{n+2}(n+2)} \right) = 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \right) = 2$$

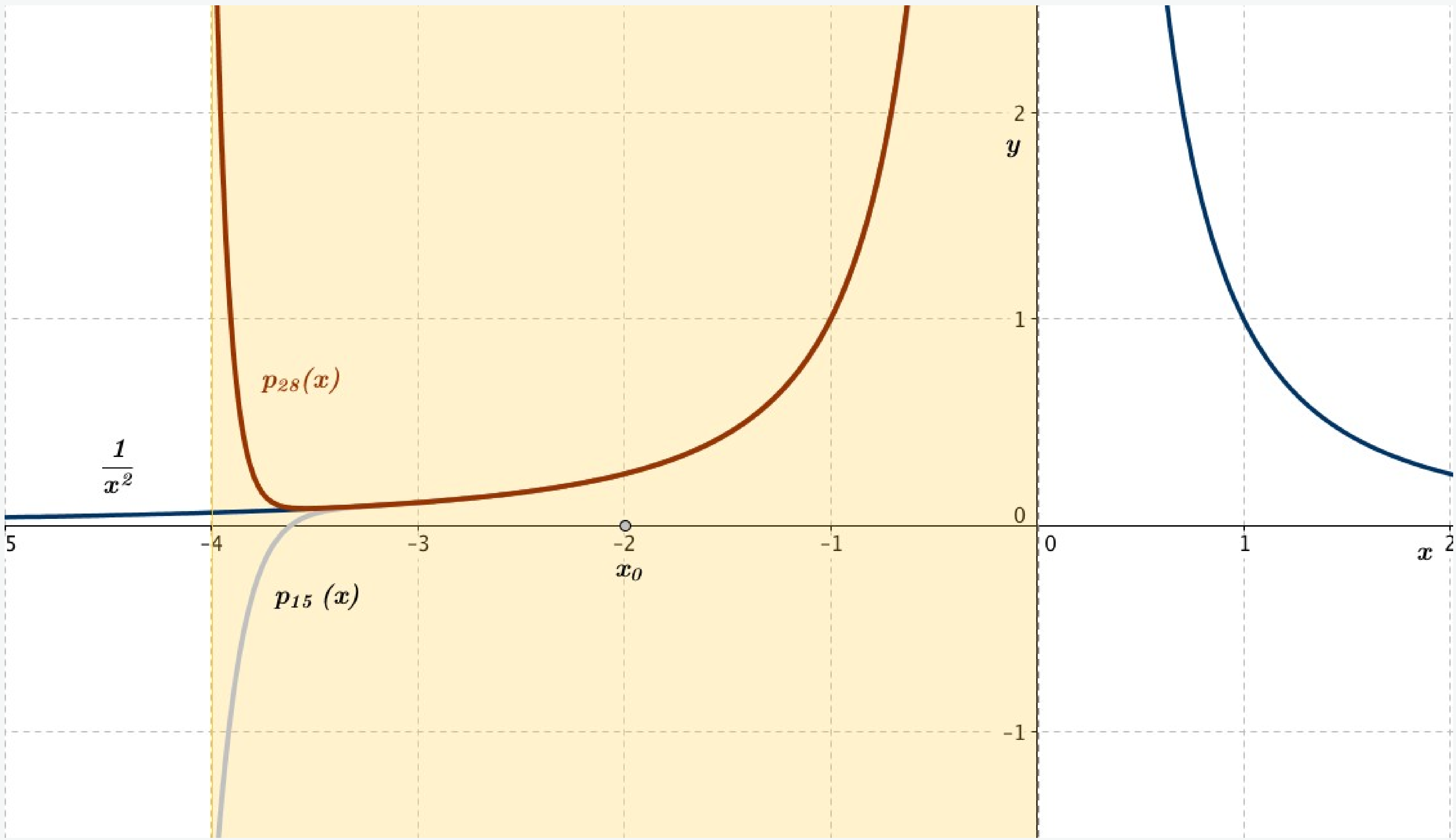


Abb. L4-3: Die Funktion $f(x) = 1/x^2$ und Näherungspolynome 15. und 28. Grades. Der Entwicklungspunkt ist $x = -2$, der Konvergenzradius $r = 2$

Entwickeln Sie folgende Funktion *f (x)* in eine Taylor-Reihe

Aufgabe 5: $f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad x_0 = 2$

Aufgabe 6: $f(x) = \dfrac{1}{x+2}, \qquad x_0 = 0$

Aufgabe 7: $f(x) = \sqrt{x}, \qquad x_0 = 4$

Aufgabe 8: $f(x) = \ln(2 - 3x + x^2), \qquad x_0 = 0$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4 - \ldots$$

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot (x-2)^n$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}, \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} \right| = 2$$

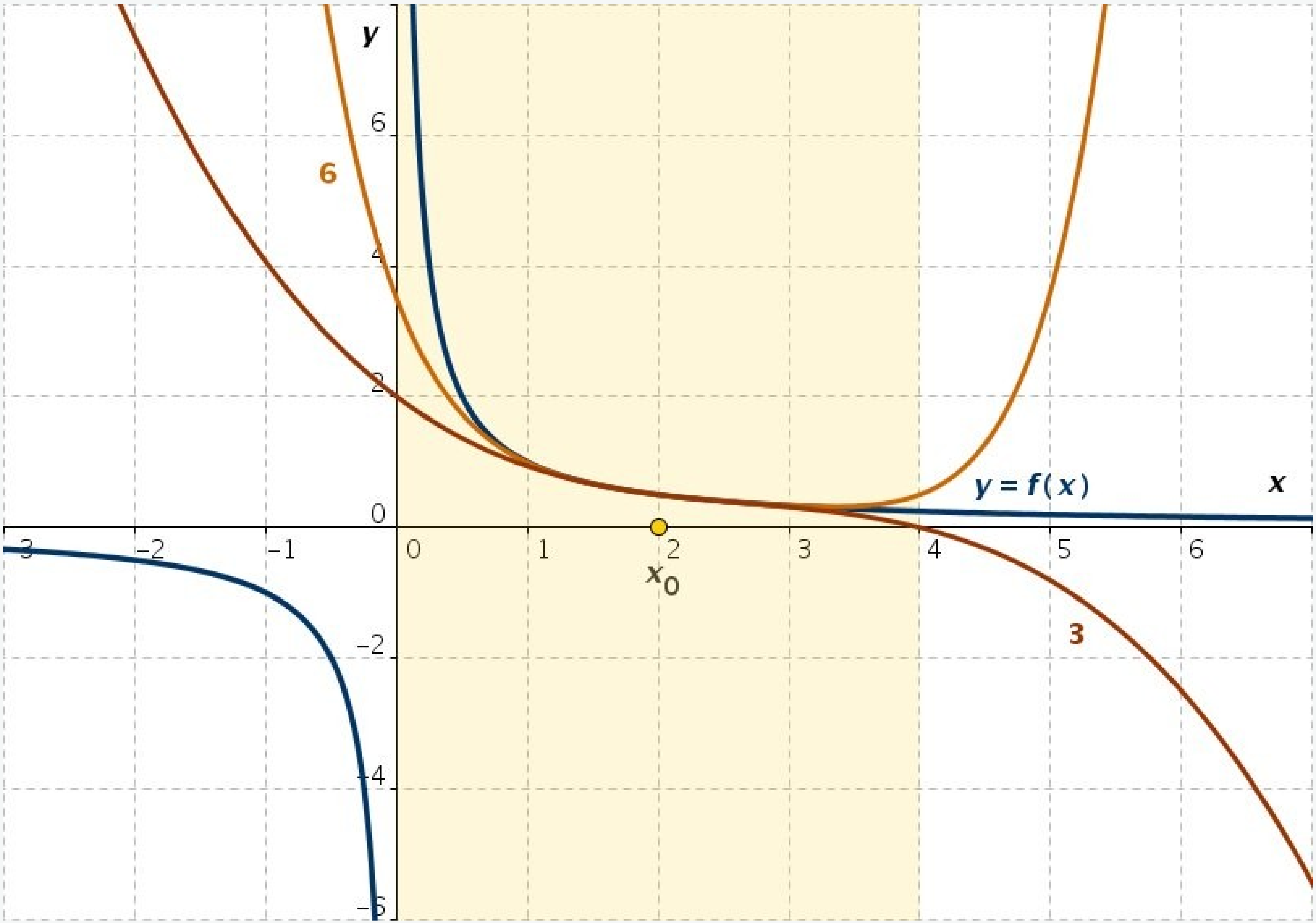


Abb. L5: Die Funktion f (x) = 1/x und Näherungspolynome 3. und 6. Grades

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{32} - \frac{x^5}{64} + \ldots$$

$$\frac{1}{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^{n+1}}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}, \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} \right| = 2$$

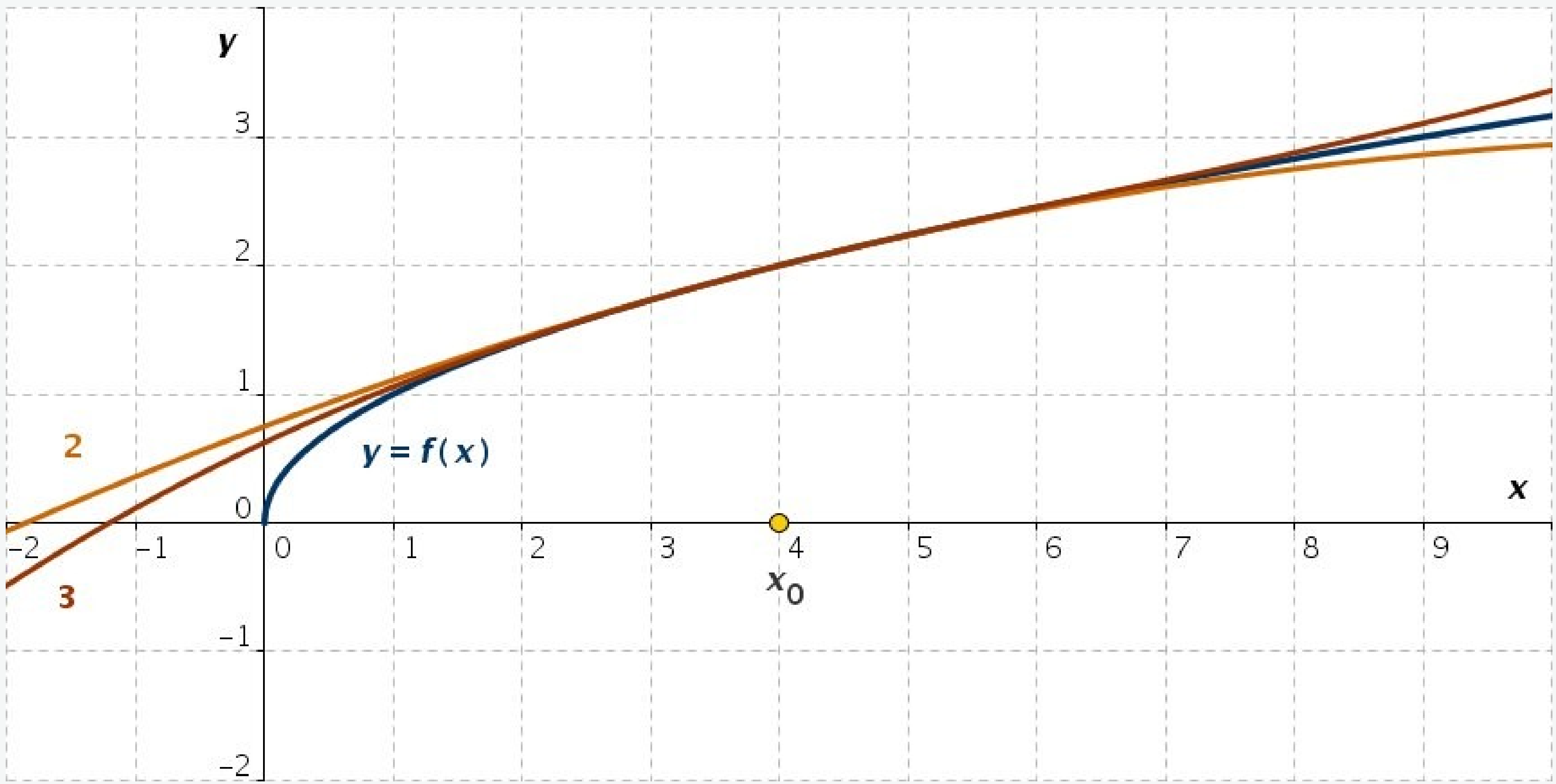


Abb. L7: Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ und Näherungspolynome 2. und 3. Grades

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{5}{16384}(x-4)^4 + \ldots$$

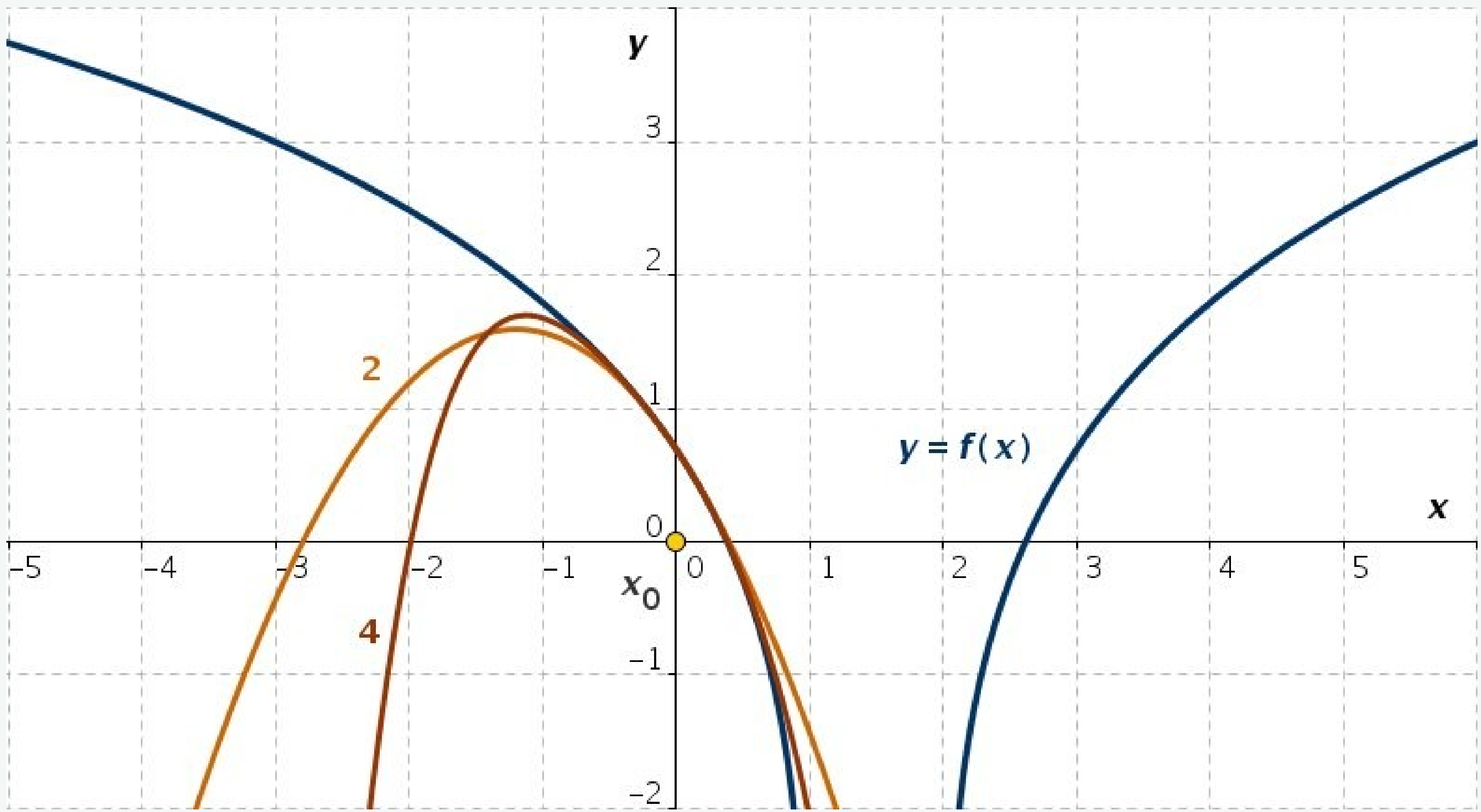


Abb. L8: Die Funktion f (x) = ln (2 – 3 x + x²) und Näherungspolynome 2. und 4. Grades

$$\ln(2 - 3x + x^2) = \ln(2) - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{8}x^3 - \frac{17}{64}x^4 - \frac{33}{160}x^5 + \ldots$$