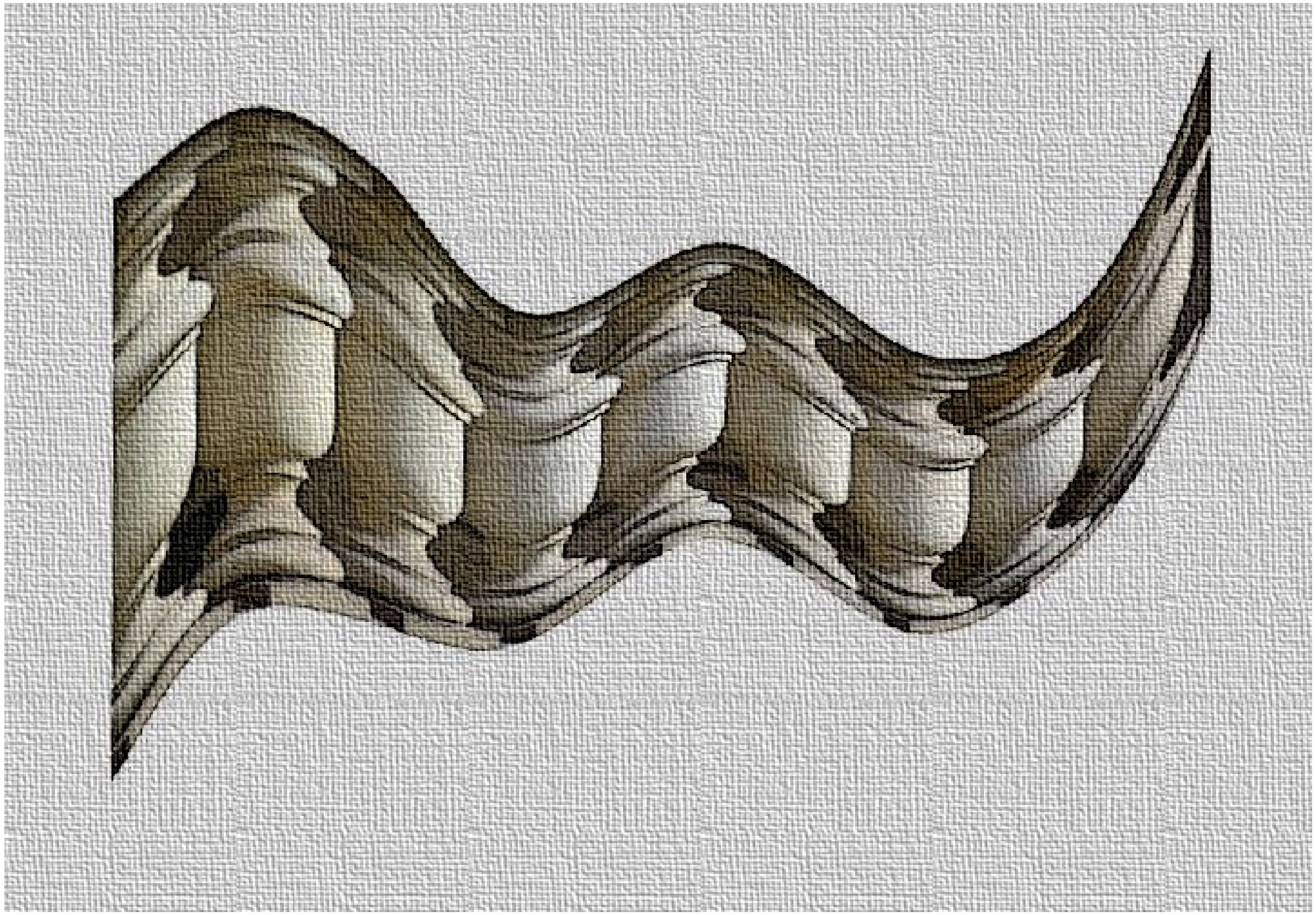


Potenzreihenentwicklung einer gebrochenrationalen Funktion


1
2
3
1
2
3

Potenzreihen besitzen in vieler Hinsicht ähnliche einfache Eigenschaften wie Polynomfunktionen. Es ist unter gewissen Voraussetzungen möglich, eine vorgegebene Funktion $F(x)$ in eine Potenzreihe zu entwickeln. Aus einer solchen Reihenentwicklung lassen sich dann durch Abbruch der Reihe einfache Näherungsfunktionen für $f(x)$ in Form von Polynomen gewinnen.

Die geometrische Reihe: $$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Konvergenzradius: $$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1} = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| \geq 1$.

Die Reihe besitzt im Konvergenzbereich $-1 < x < 1$ den “Summenwert”

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad \Rightarrow$$

$$S - 1 = x + x^2 + x^3 + \ldots = x\,(1 + x + x^2 + \ldots) = x\,S$$

$$S - 1 = x\,S \quad \Rightarrow \quad (1 - x)\,S = 1 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{1 - x}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1 - x} \qquad (-1 < x < 1)$$

Im Interval $-1 < x < 1$ kann die Potenzreihe $P(x)$ als eine spezielle Darstellungsform der gebrochenrationalen Funktion $f(x) = 1/(1-x)$ angesehen werden.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \qquad (-1 < x < 1)$$

Die linke Seite der Gleichung macht nur für $|x| < 1$ Sinn, also nur für einen Teil des Definitionsbereiches der Funktion. Für eine bestimmte Teilmenge des Definitionsbereiches kann man eine andere Abbildungsvorschrift für die Funktion bestimmen, man kann den Funktionswert als Grenzwert einer speziellen Reihe angeben.

Die Darstellung einer Funktion durch eine Potenzreihe bleibt immer auf ein bestimmtes Intervall beschränkt!

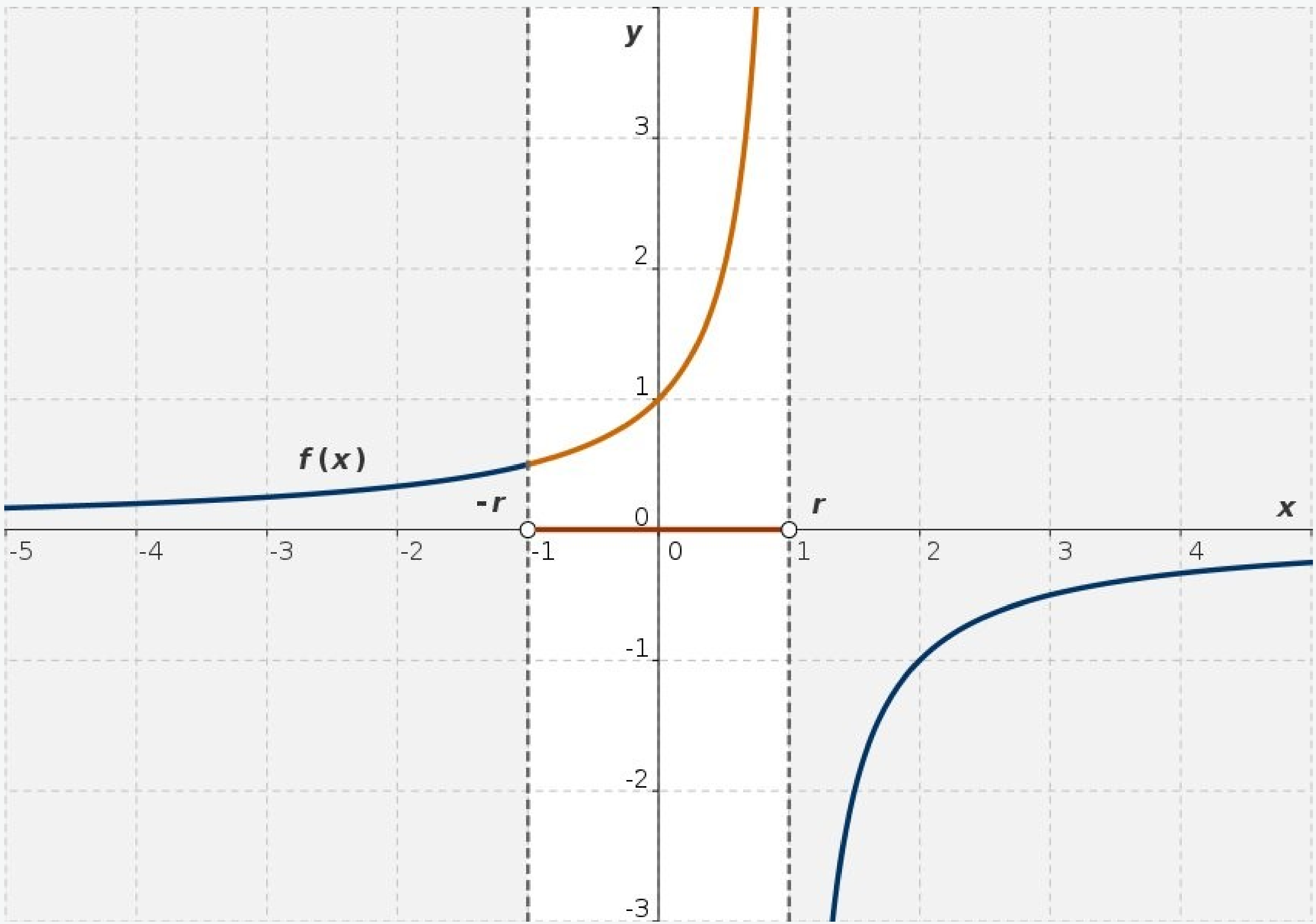


Abb. 2-1: Gebrochenrationale Funktion $y = 1/(1 - x)$. Im Interval $-1 < x < 1$ kann diese Funktion als Potenzreihe dargestellt werden

Potenzreihenentwicklung einer gebrochenrationalen Funktion

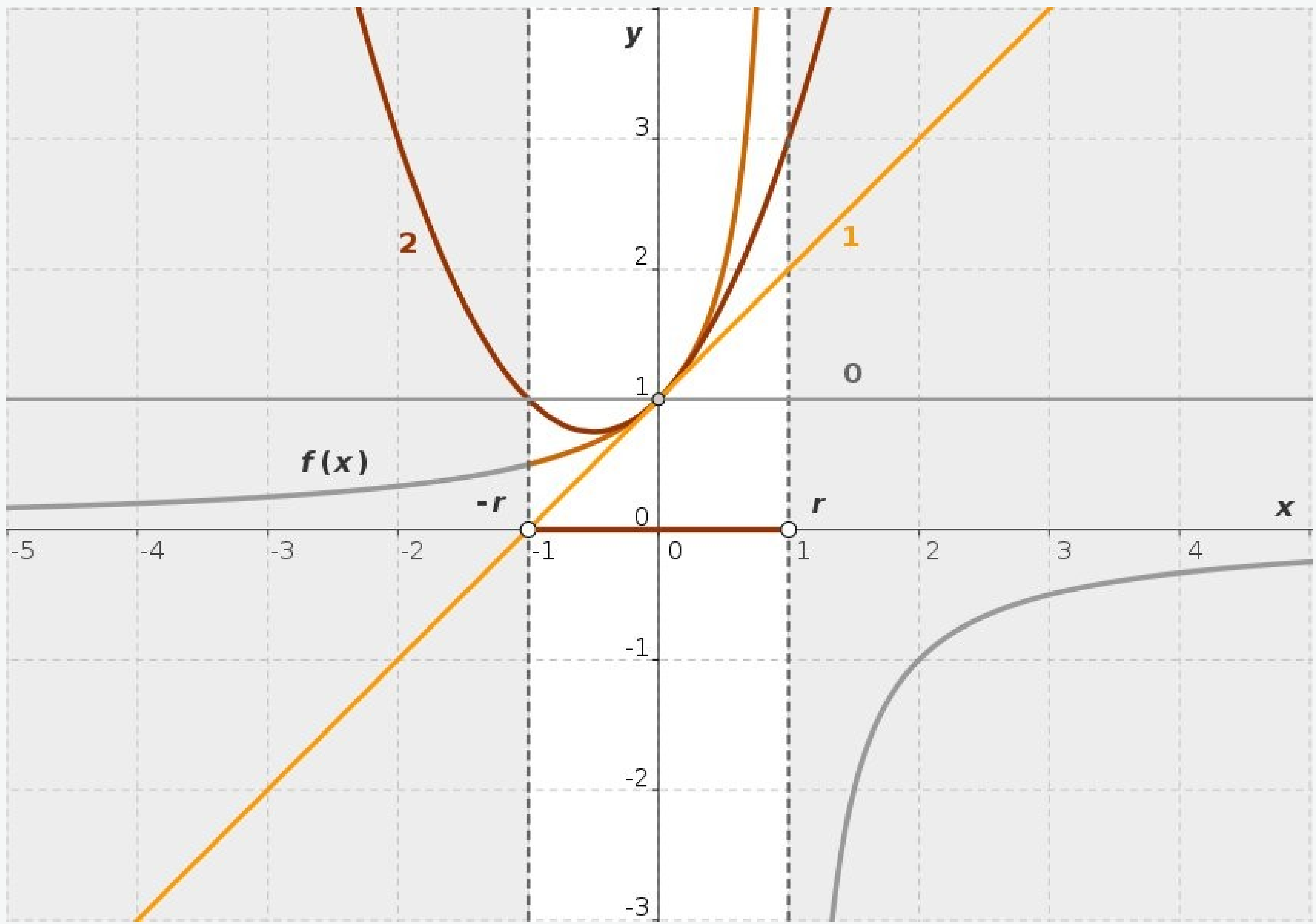


Abb. 2-2: Gebrochenrationale Funktion f(x) = 1/(1 – x) und Näherungspolynome 0., 1. und 2. Grades

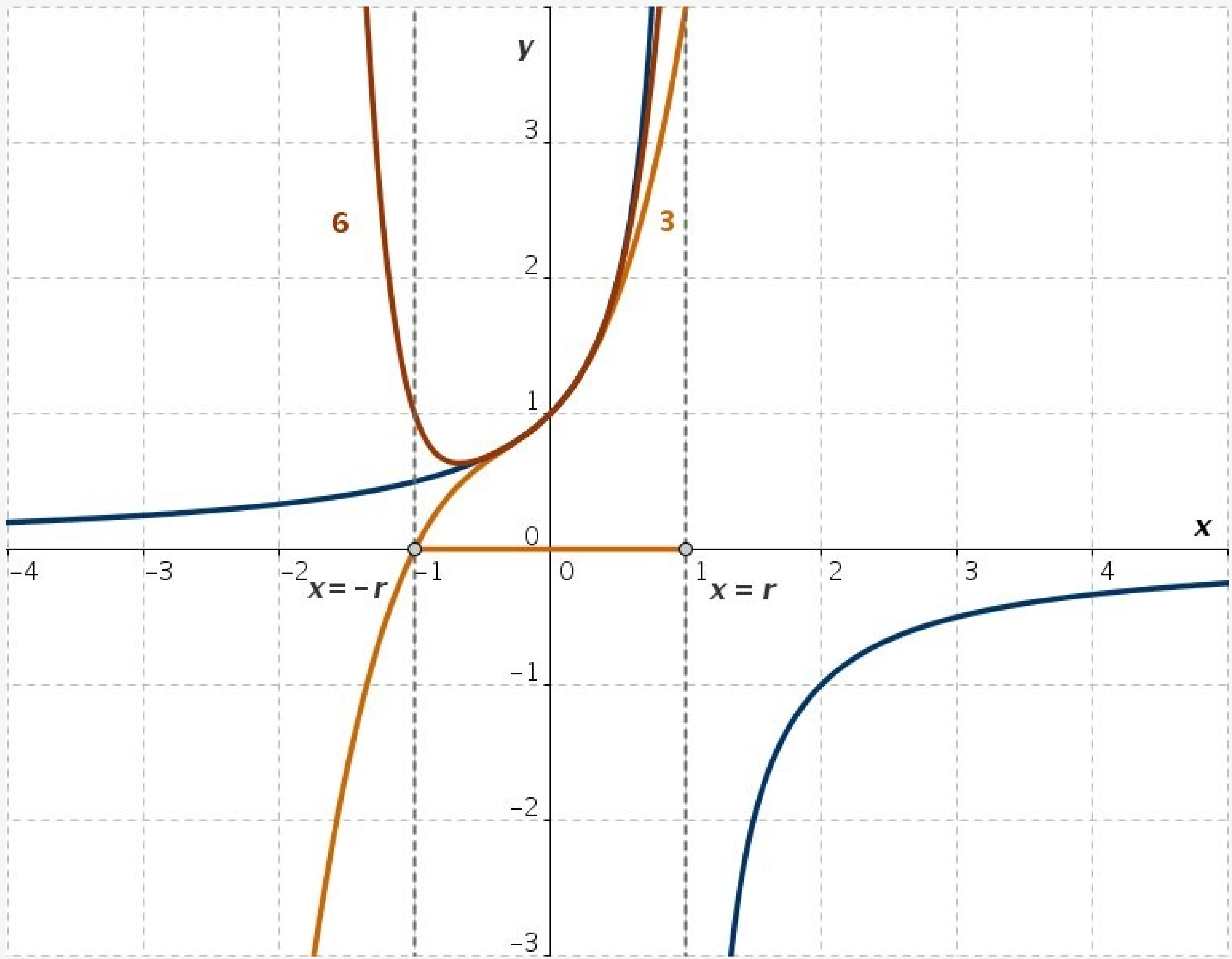


Abb. 2-3: Gebrochenrationale Funktion f(x) = 1/(1 – x) und Näherungspolynome 3. und 6. Grades

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}, \qquad f_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad f_6(x) = 1 + x + \ldots + x^6$$

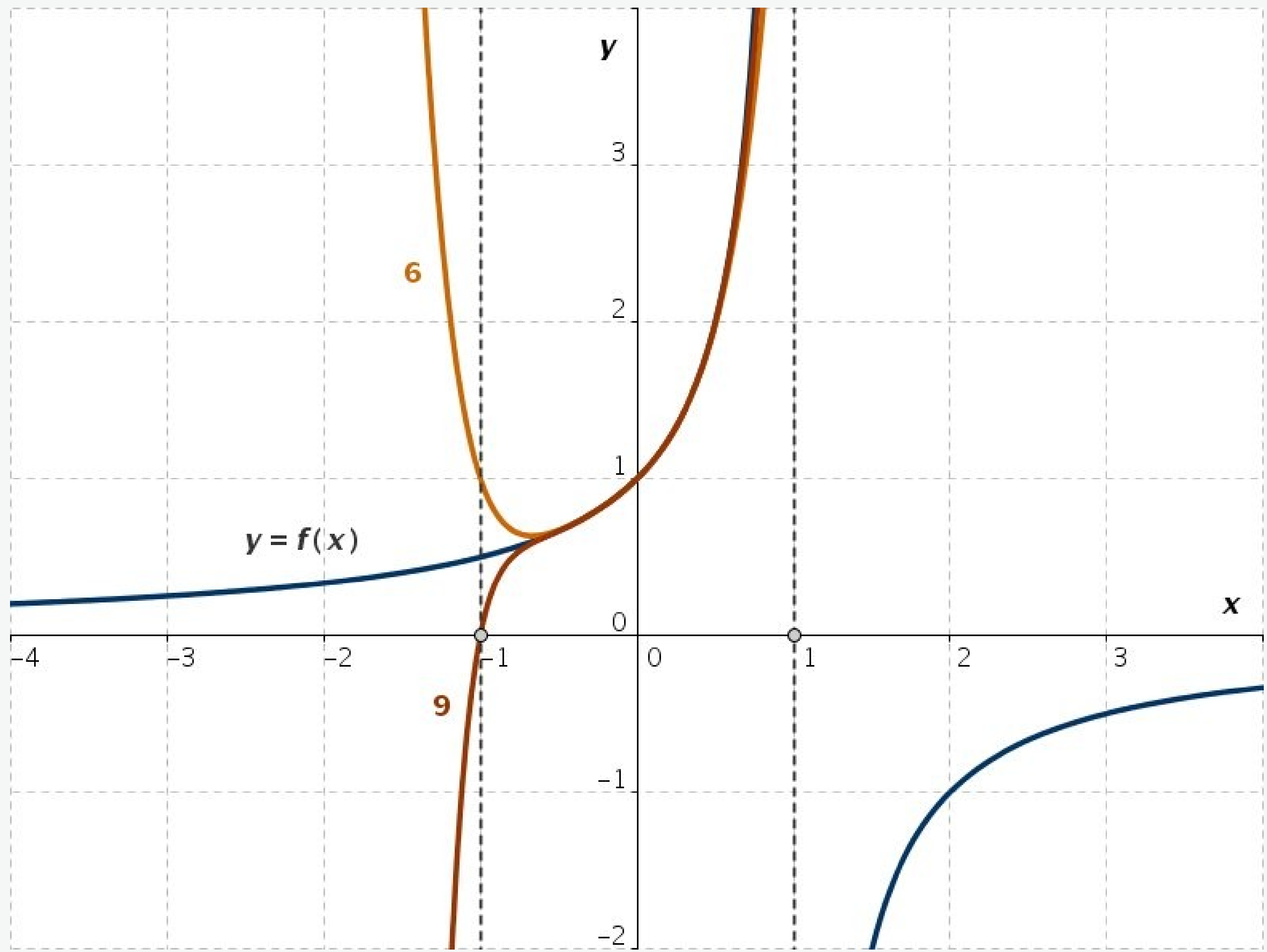


Abb. 2-4a: Gebrochenrationale Funktion f(x) = 1/(1 – x) und Näherungspolynome 6. und 9. Grades

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}, \qquad f_6(x) = 1 + x + \ldots + x^6, \qquad f_9(x) = 1 + x + \ldots + x^9$$

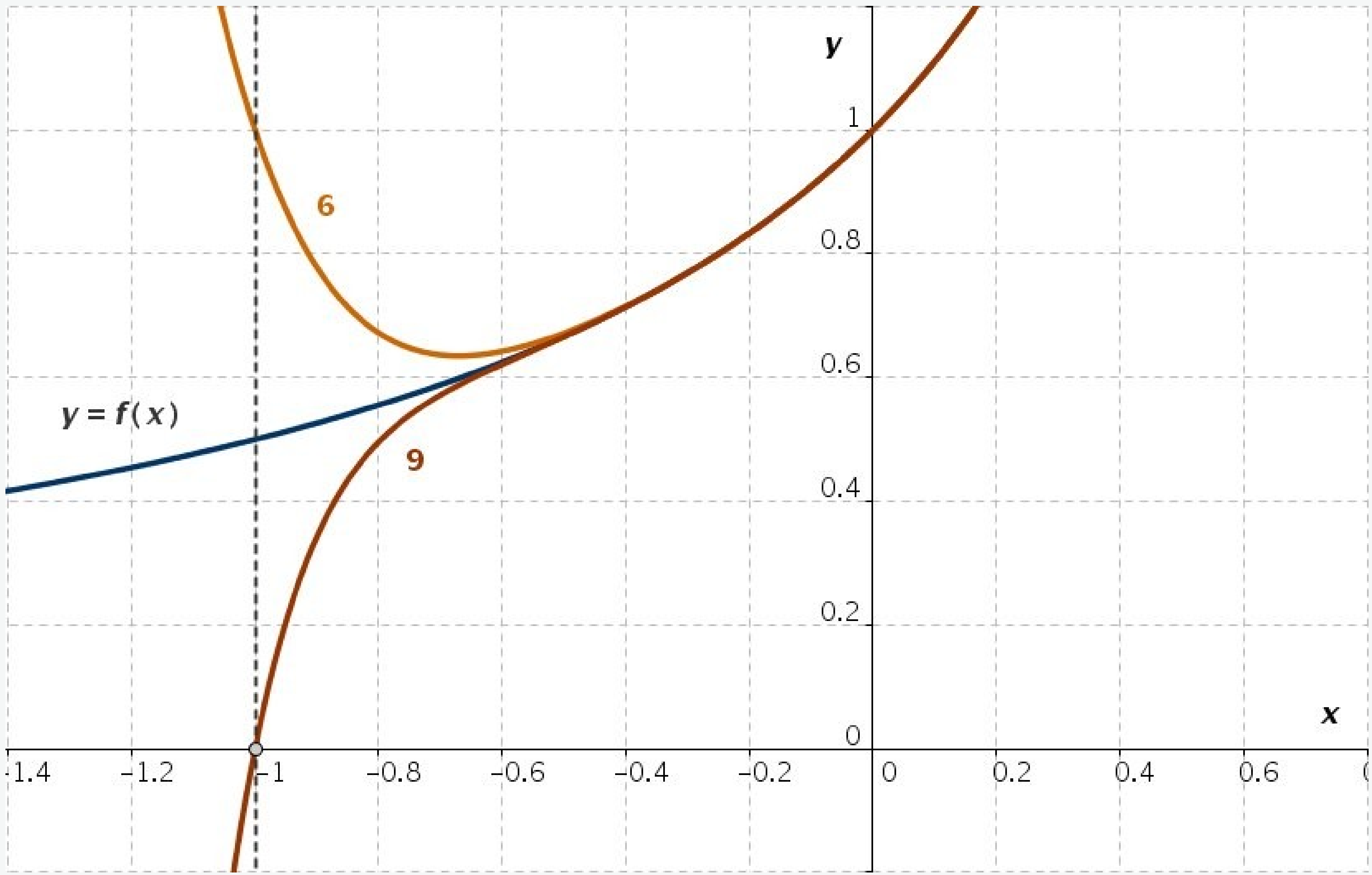


Abb. 2-4b: Gebrochenrationale Funktion $f(x) = 1/(1 - x)$ und Näherungspolynome 6. und 9. Grades

Potenzreihenentwicklung einer gebrochenrationalen Funktion

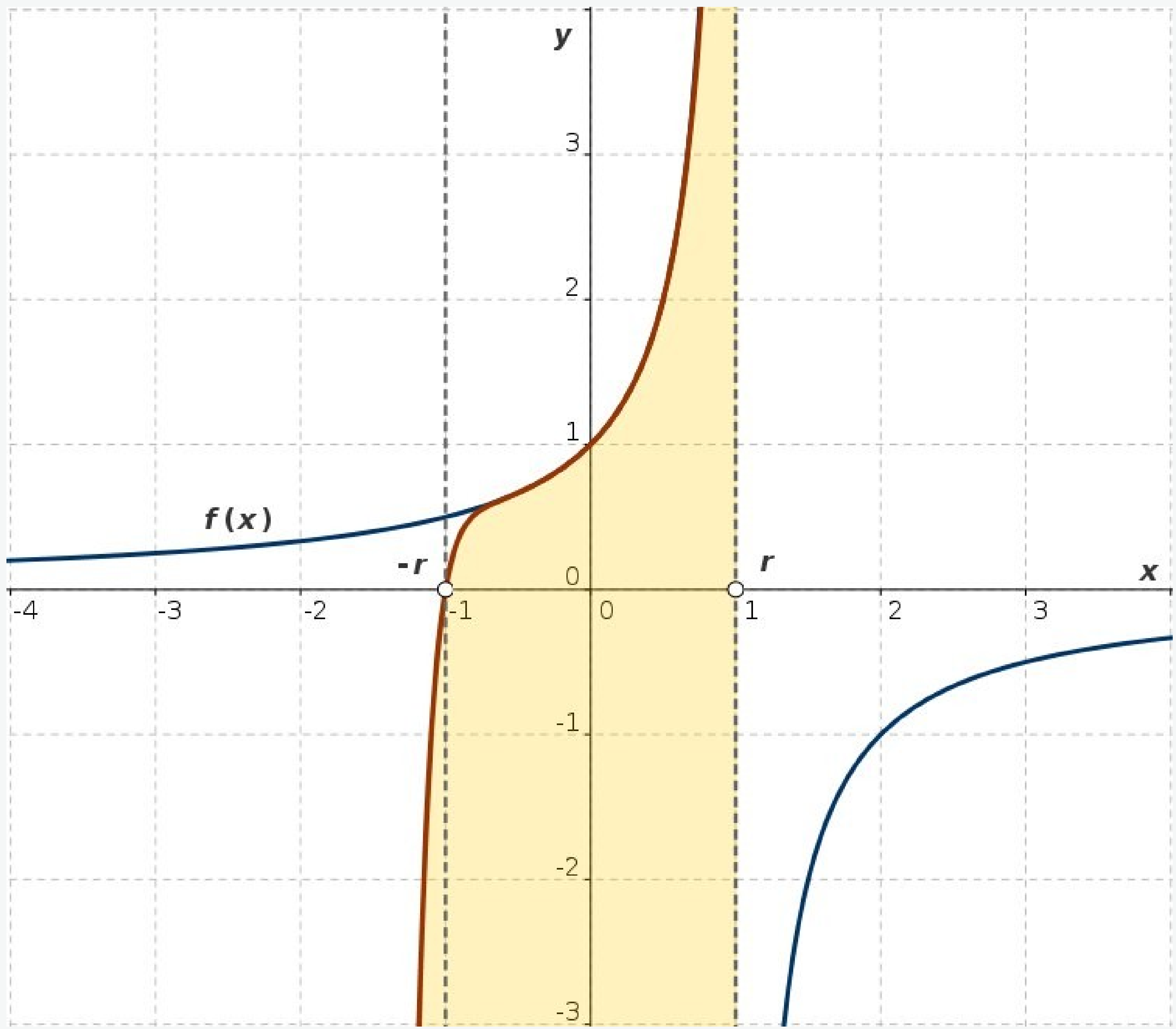
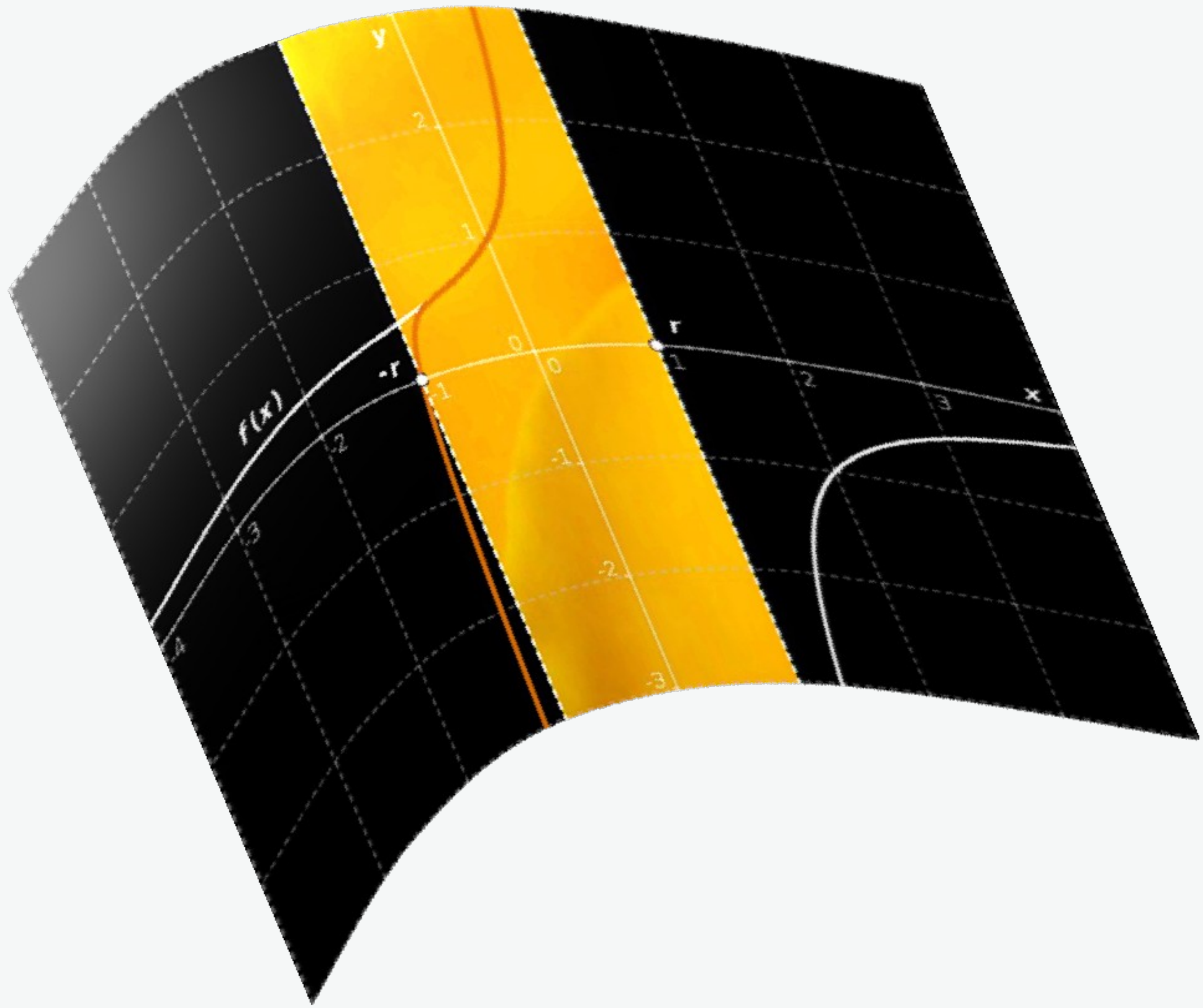


Abb. 2-5: Gebrochenrationale Funktion f(x) = 1/(1 – x) und Näherungspolynome 11. Grades


y
f(x)
-r
r
x