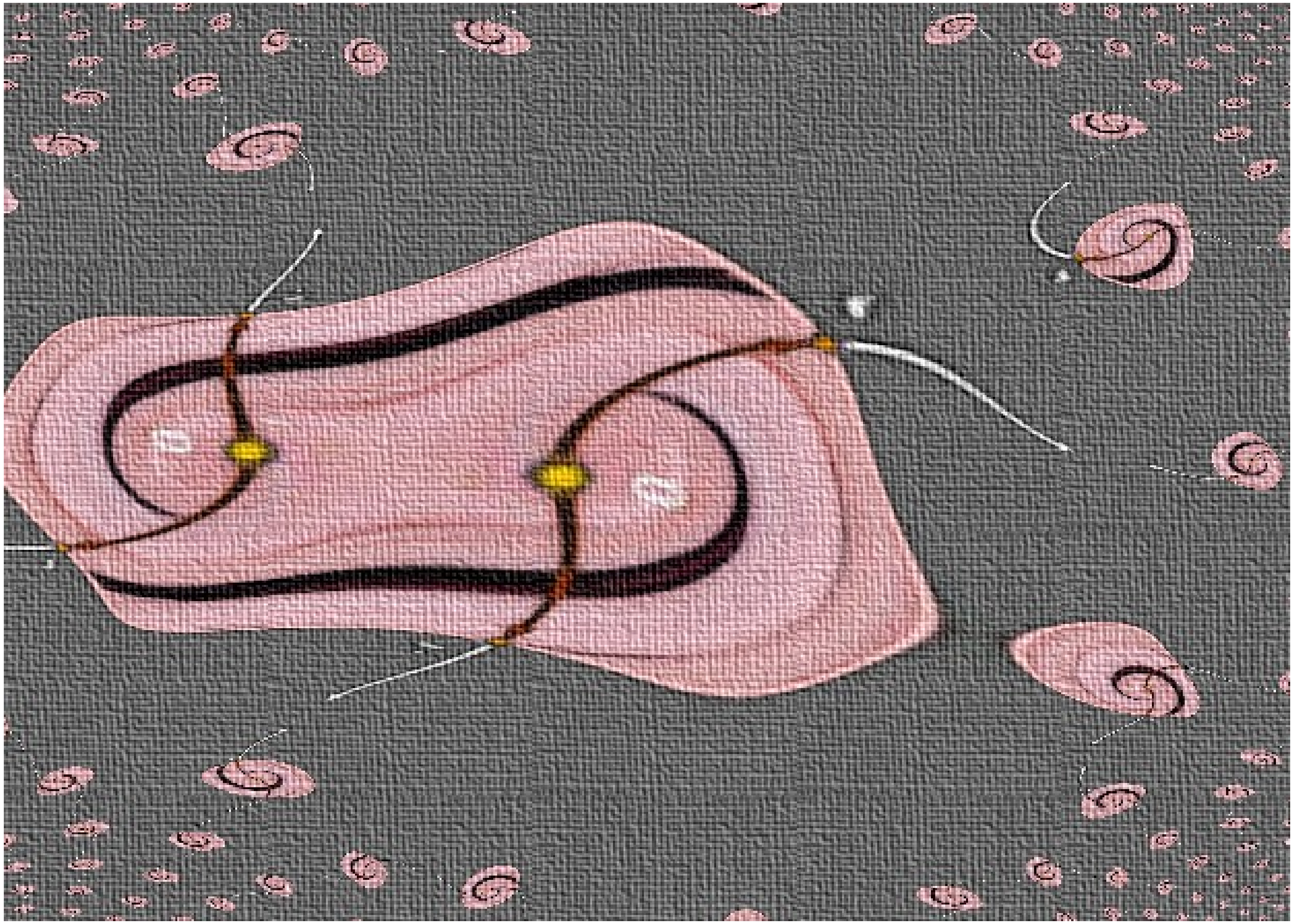
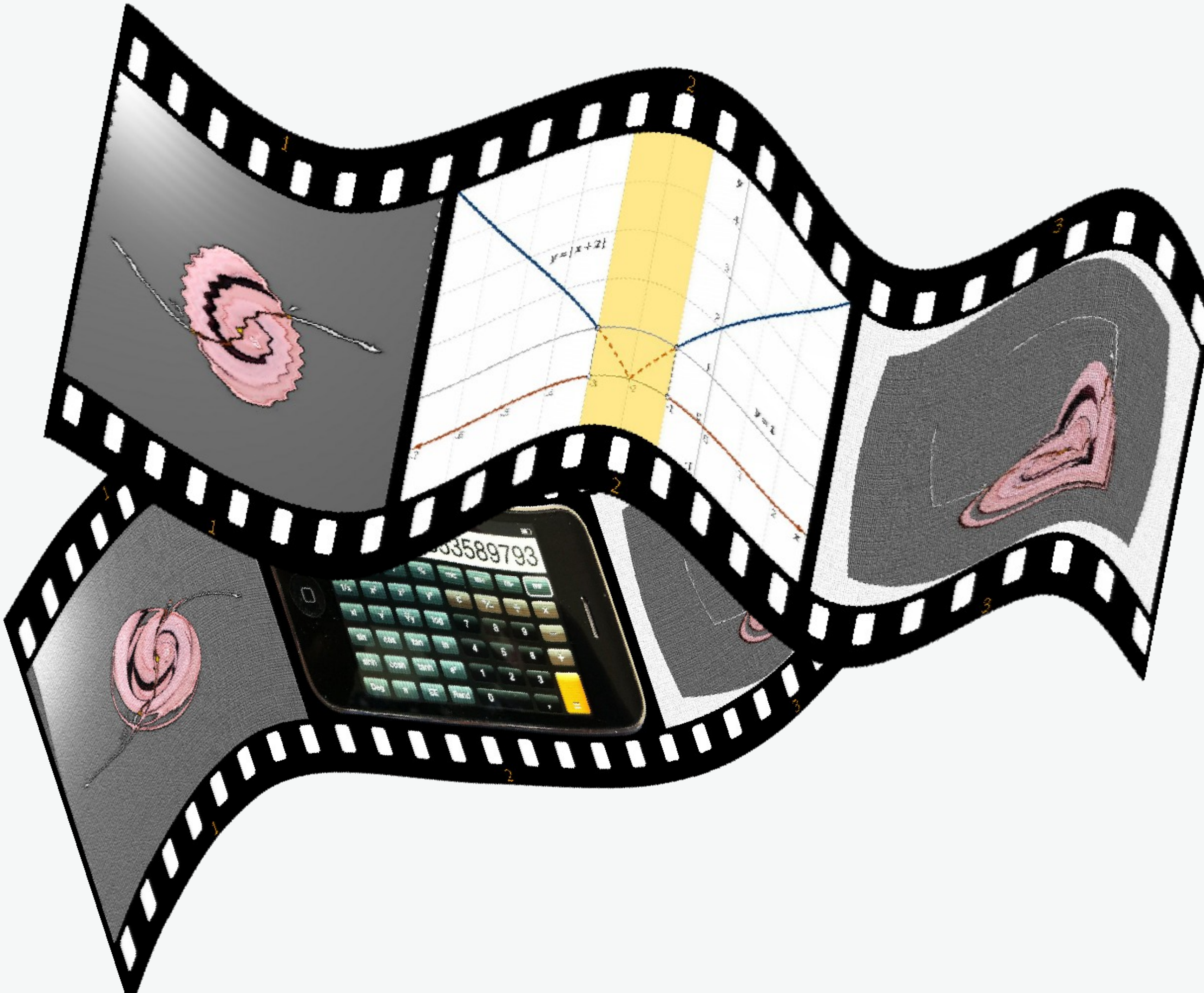


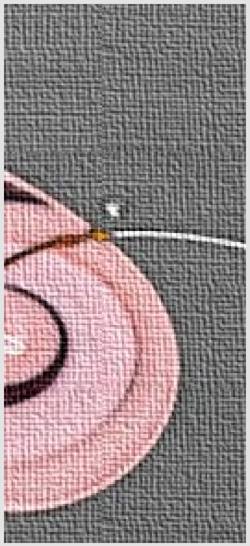
Funktionenreihen

Erst durch Newton wurde die Theorie unendlicher Reihe zu einem eigenständigen Forschungsgebiet in der Mathematik, das dann in Britannien besondere Beachtung und weitere Entwicklung durch Brook Taylor und Colin Maclaurin fand.

Hans Wußing, "6000 Jahre Mathematik"



Funktionenreihen



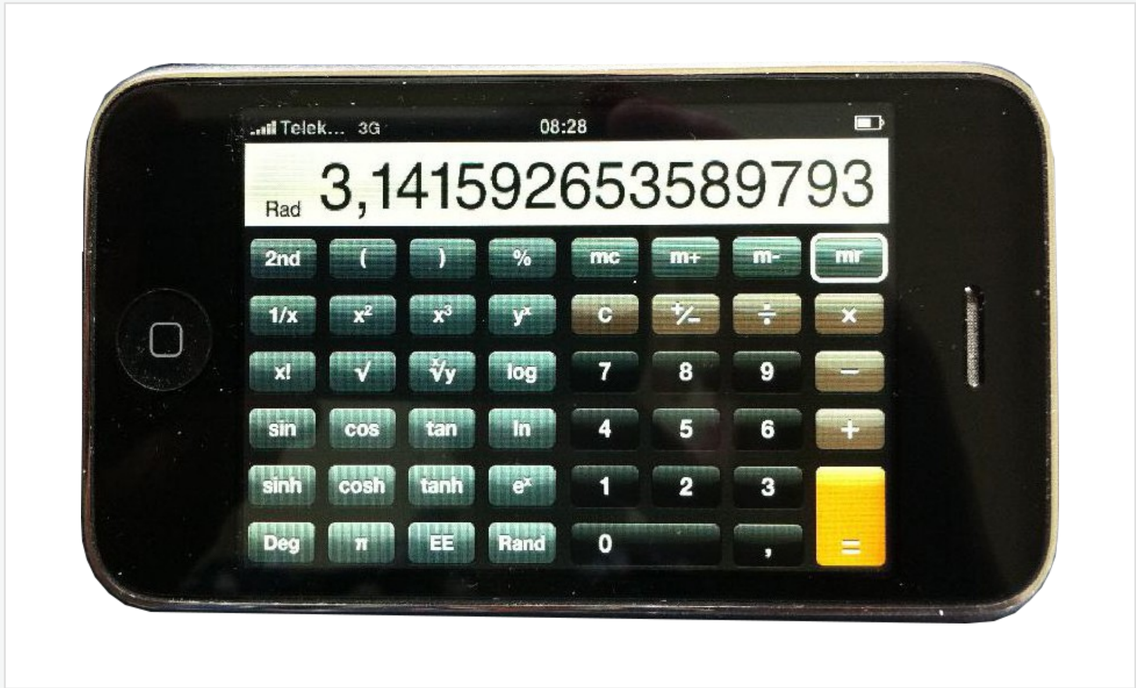
Die wichtigsten, in den Anwendungen auftretenden Funktionen lassen sich als Potenzreihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n$$

den sog. Taylorreihen darstellen. Diese Entwicklung liefert eine Möglichkeit, um Funktionen wie z.B.

$$e^{x}, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \sqrt{x}, \quad \ln x$$

explizit zu berechnen, indem nur die Grundrechenoperationen (+ , –, • , /) angewendet werden. Dies wird oft angewandt, um für gegebene oder komplizierte Funktionen Näherungsformeln zu erhalten.



Ein Taschenrechner bietet neben den Grundrechenarten auch weitere Funktionen an, z.B. die Berechnung des Kosinus oder des Sinus. Die Bestimmung solcher Funktionswerte wird nicht exakt, sondern durch Näherungen auf genügend viele Dezimalstellen durchgeführt.

Definition:

Funktionenreihe wird eine Reihe genannt, deren Glieder Funktionen einer unabhängigen Variablen x sind:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

Partialsumme heißt die Summe der ersten n Glieder dieser Reihe:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

Die wichtigsten Funktionenreihen sind die Potenzreihen der Gestalt

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ a_n (x - x_0)^n + \ldots$$

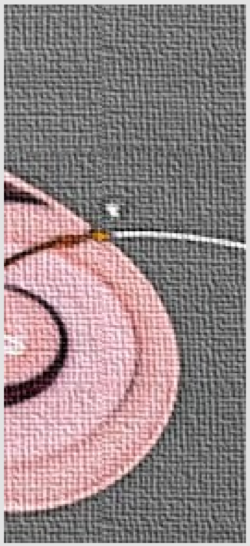
wobei die Koeffizienten a_n und die Entwicklungsstelle x_0 konstante Zahlen sind.

Beispiele:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad a_n = 1$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad a_n = \frac{1}{n!}$$

Konvergenzverhalten einer Potenzreihe



Bei einer Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

hängt der Wert eines jeden Gliedes und damit der Summenwert vom Wert der unabhängigen Variablen x ab.

Im Folgenden untersuchen wir das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe.

Definition:

Die Menge aller x-Werte, für die eine Potenzreihe konvergiert, heißt Konvergenzbereich der Potenzreihe.

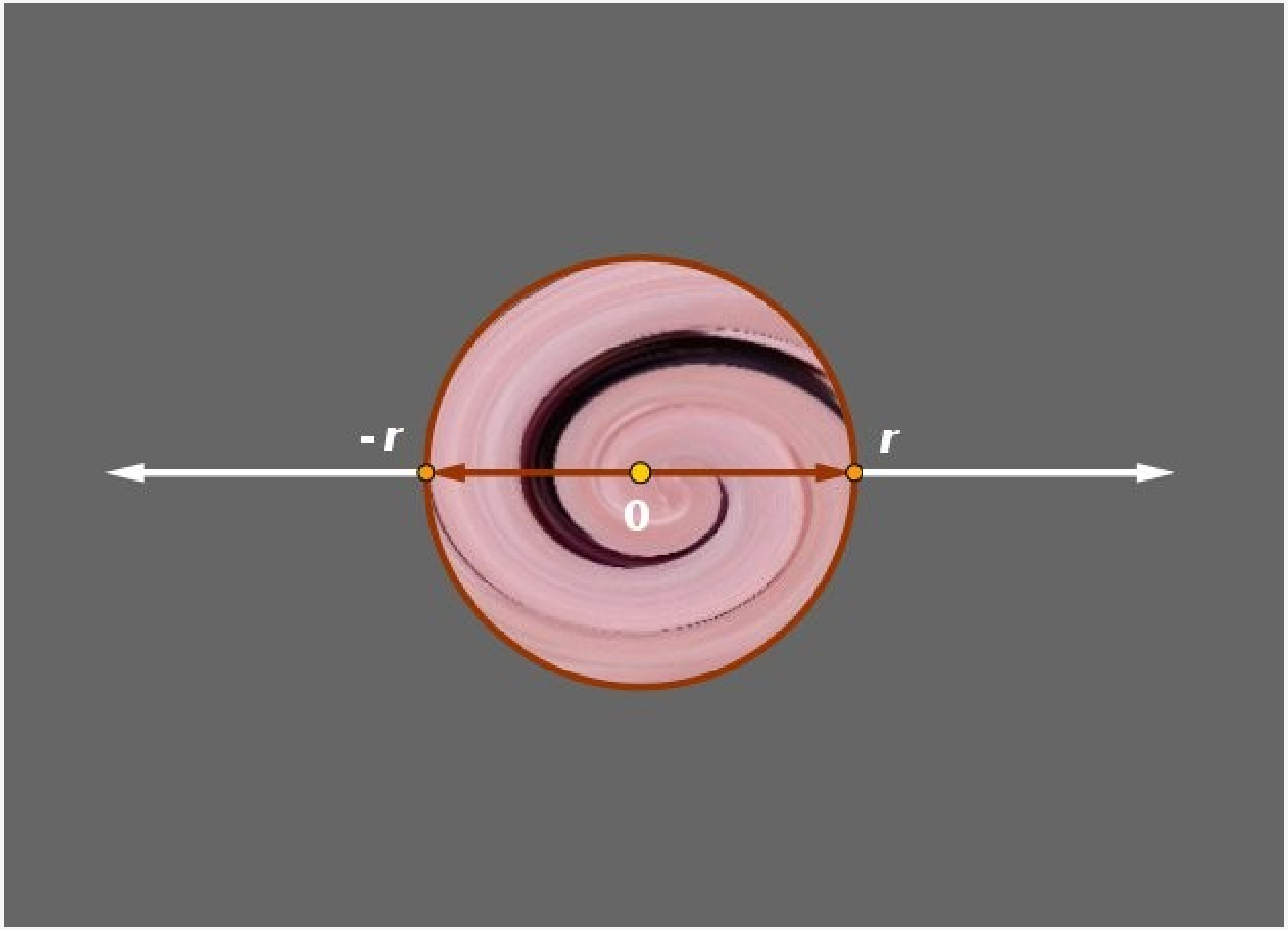


Abb. 1: Konvergenzbereich einer Potenzreihe

Für $x = 0$ konvergiert jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und besitzt dort den Summenwert $P(0) = a_0$. Es gibt Potenzreihen, die nur für $x = 0$ konvergieren und solche, die für alle x konvergieren.

Zu jeder Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, die nicht überall konvergiert,

gibt es eine positive Zahl r, Konvergenzradius genannt, mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Potenzreihe konvergiert überall im Interval $|x| < r$.
2. Die Potenzreihe divergiert für $|x| > r$.
3. Man setzt $r = 0$, falls eine Potenzreihe nur an der Stelle $x = 0$ konvergiert.
4. Über das Konvergenzverhalten der Potenzreihe in den Randpunkten $-r$ und r lassen sich keine allgemeingültigen Aussagen machen.

Der Konvergenzradius kann mittels $r = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ berechnet werden.

Wir bestimmen den Konvergenzradius r einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

Nach dem Quotientenkriterium von d'Alembert konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, wenn sie die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < 1$$

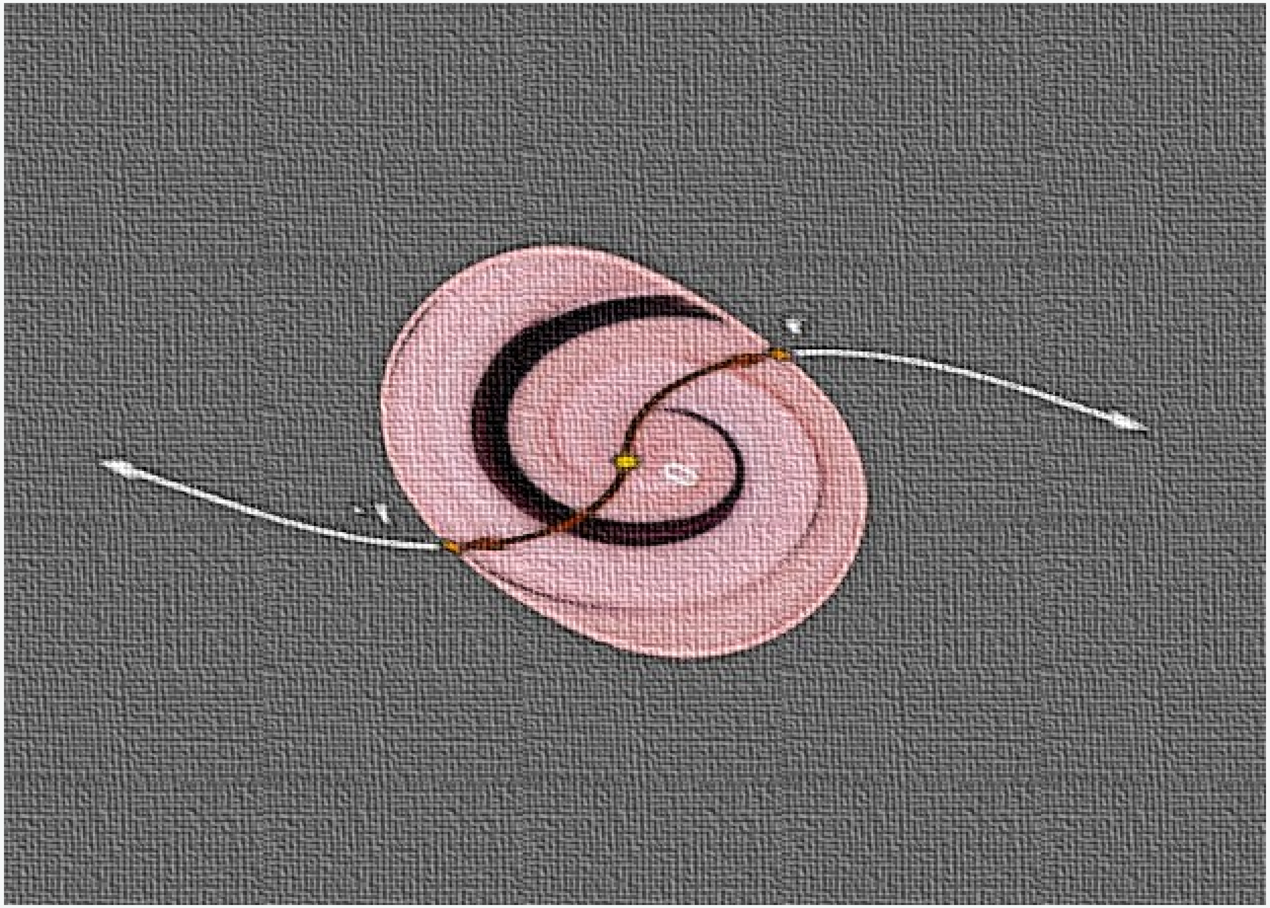
erfüllt.

$$b_n = a_n\, x^n, \qquad b_{n+1} = a_{n+1}\, x^{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot x \right| =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = |x| \cdot \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

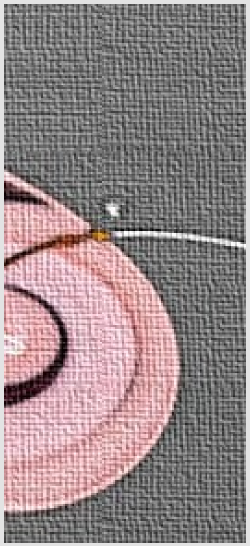
$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r \qquad (\text{alle } \; a_n \neq 0)$$



Konvergenzradius: Aufgaben

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Konvergenzradius einer Potenzreihe: Aufgaben 1-5



Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

Aufgabe 1: $$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Aufgabe 2: $$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(x+2)^n}$$

Aufgabe 3: $$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$$

Aufgabe 4: $$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$$

Aufgabe 5: $$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$$

Konvergenzradius einer Potenzreihe: Lösung 1

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots$$

$$\boxed{r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}$$

$$a_n = \frac{1}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!(n+1)}{n!} = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty$$

Die Reihe konvergiert überall.

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(x+2)^n} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2\,(x+2)^2} + \frac{1}{3\,(x+2)^3} + \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < 1$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\,(x+2)^{n+1}}, \qquad b_n = \frac{1}{n\,(x+2)^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n\,(x+2)^n}{(n+1)\,(x+2)^{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{(n+1)\,(x+2)} \right| =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{(n+1)\,|x+2|} = \frac{1}{|x+2|}$$

$$\frac{1}{|x+2|} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x+2| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{lll} x+2 < -1 & \Rightarrow & x < -3 \\ x+2 > 1 & \Rightarrow & x > -1 \end{array} \right.$$

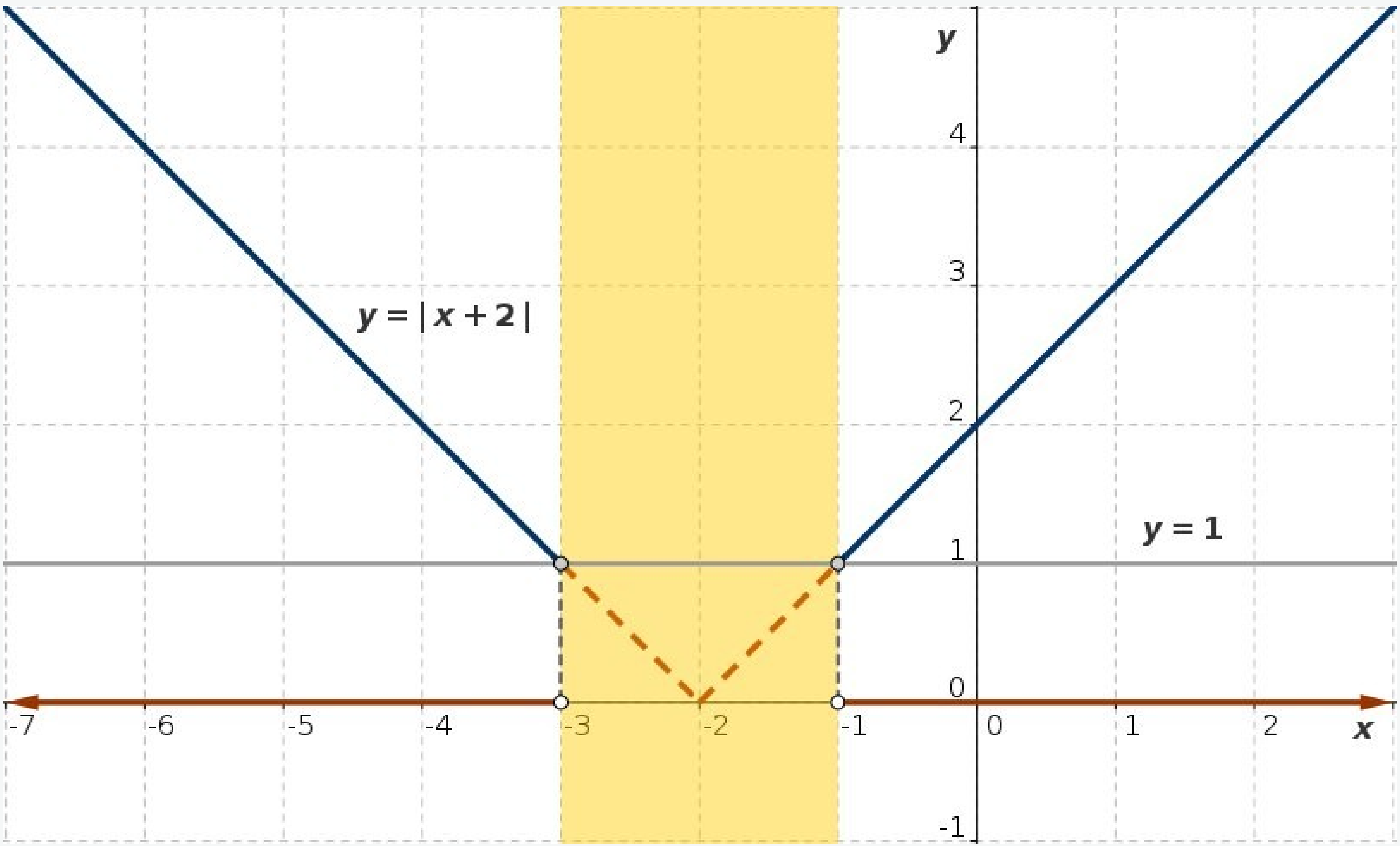


Abb. L2: Illustration des Konvergenzradius

Wir untersuchen das Konvergenzverhalten der Potenzreihe in den Randpunkten $x = -3$ und $x = -1$

$$x = -3 \qquad : P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(x+2)^n} \quad \to \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Diese alternierende harmonische Reihe konvergiert.

Der Randpunkt $x = -3$ gehört zum Konvergenzbereich der Reihe.

$$x = -1 \qquad : P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(x+2)^n} \quad \to \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Wir haben schon gezeigt, dass die harmonische Reihe divergiert. Der Randpunkt $x = -1$ gehört nicht zum Konvergenzbereich. Der Konvergenzbereich der Reihe ist

$$x \in (-\infty, -3\,] \cup (-1, +\infty)$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} + \ldots, \qquad a_n = \frac{1}{3^n}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{3^{n+1}}{3^n} \right| = 3$$

Wir untersuchen das Konvergenzverhalten der Potenzreihe in den Randpunkten $x = -3$ und $x = 3$.

$$x = 3 \quad : P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \quad \to \quad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n$$

Die Reihe divergiert im Punkt $x = 3$.

$$x = -3 \quad : P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \quad \to \quad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Die Reihe divergiert im Punkt $x = -3$.

Der Konvergenzbereich der Reihe ist $x \in (-3,\ 3)$

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + \ldots, \qquad a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)\, 2^{n+1}}{n\, 2^n} \right| = \lim_{n \to \infty} 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 2$$

Wir untersuchen das Konvergenzverhalten der Potenzreihe in den Randpunkten $x = -2$ und $x = 2$:

$$x = 2 \quad : P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} \quad \rightarrow \quad P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Die harmonische Reihe divergiert.

$$x = -2 \quad : P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} \quad \rightarrow \quad P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Diese alternierende harmonische Potenzreihe konvergiert.

Die Reihe konvergiert im Intervall $x \in [-2, 2)$.

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} x^n = \frac{x}{3} + \left(\frac{2}{5} \right)^3 x^2 + \left(\frac{3}{7} \right)^5 x^3 + \ldots$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} \cdot \left(\frac{2(n+1)+1}{n+1} \right)^{2(n+1)-1} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} \cdot \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{2n+1} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \right)^{2n-1} \cdot \left(\frac{2 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^{2n+1} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1} \cdot 2^{2n+1} = \lim_{n \to \infty} 2^{-2n+1} \cdot 2^{2n+1} = 4$$

Man kann zeigen, dass die Randpunkte $x = -4$ und $x = 4$ nicht zum Konvergenzbereich gehören. Die Potenzreihe konvergiert im Intervall

$$x \in (-4, \ 4)$$