*Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe*

*Aufgaben*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren

Aufgabe 9: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Aufgabe 10: $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

Aufgabe 11: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$$

Aufgabe 12: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$$

Aufgabe 13: $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$$

Harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Das Quotientenkriterium versagt bei der harmonischen Reihe

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Wir zeigen mit Hilfe einer Vergleichsreihe, dass die harmonische Reihe divergiert.

Die Glieder der Reihe fassen wir wie folgt zu Gruppen zusammen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ \ldots \ =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ \ldots$$

In jeder Klammer ersetzen wir nun jedes Glied durch das jeweils kleinste Glied und erhalten damit die folgende Vergleichsreihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ \ldots = \infty$$

Die Vergleichsreihe ist divergent. Deswegen divergiert auch die harmonische Reihe, da ihre Glieder größer sind als die entsprechenden Glieder der divergierenden Vergleichsreihe.

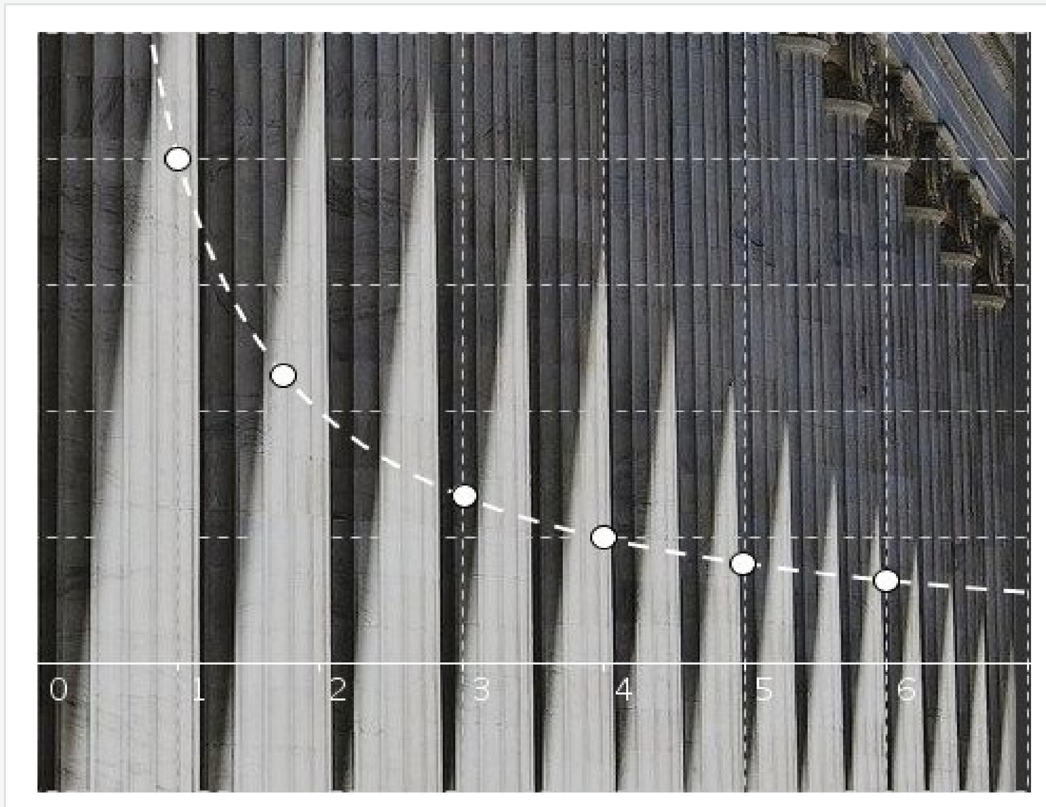


*Abb. L9-1: Zur Divergenz einer harmonischen Reihe*

Dass die harmonische Reihe divergiert, kann man auch auf andere Weise zeigen.

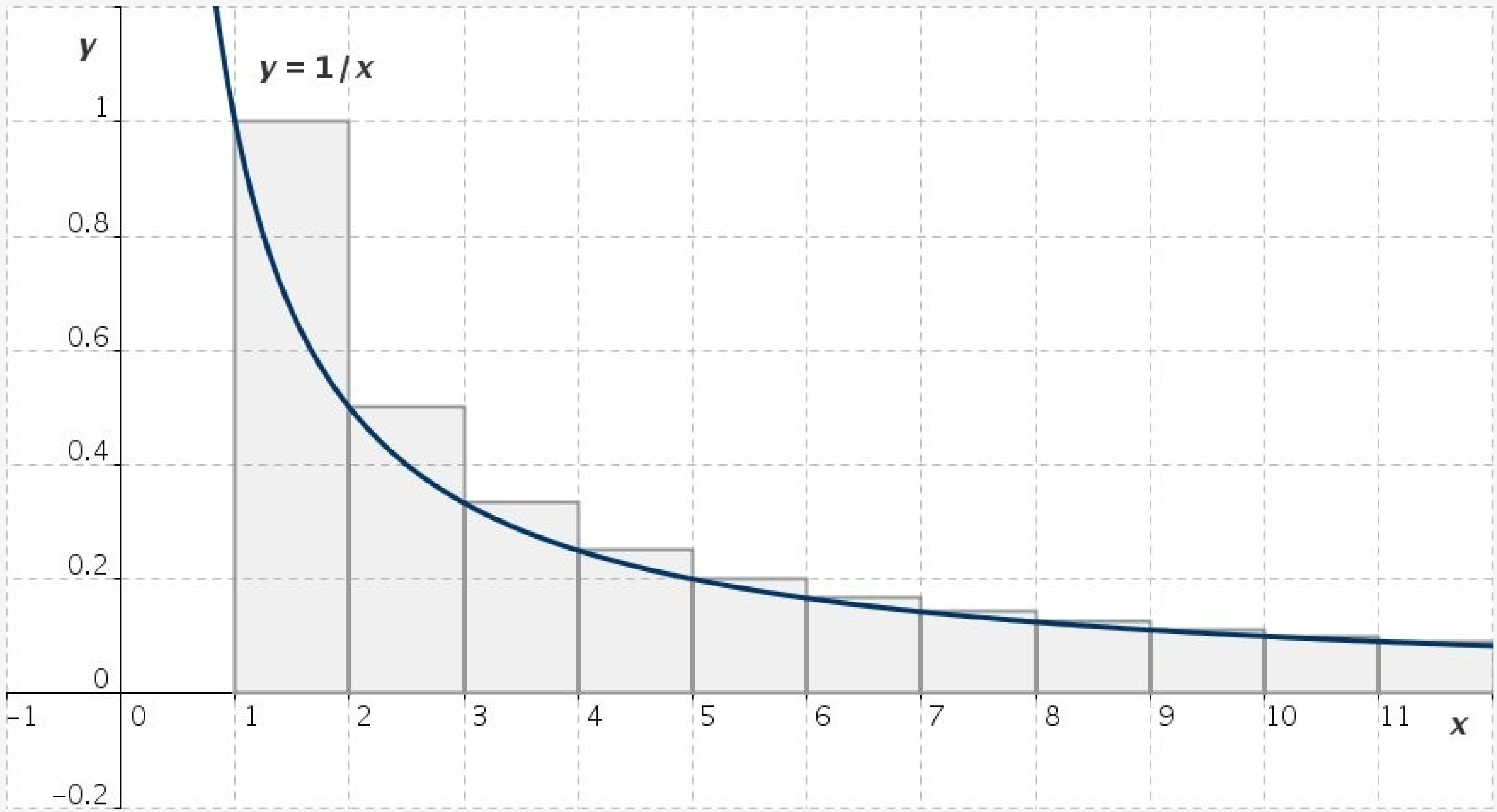


*Abb. L9-2: Zur Divergenz einer harmonischen Reihe*

Wir bilden mit Rechtecken der Breite 1 und Höhe $1/n$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Stufenfunktion und vergleichen sie mit der Kurve $y = 1/x$ (siehe *Abb. L5-2*).

Die Stufenfunktion ist immer größer oder gleich der Funktion $y = 1/x$. Die Gesamtfläche aller Rechtecke

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ \ldots$$

ist deshalb größer als die Fläche unter der Kurve

$$A > \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_1^\infty = \infty$$

$A$ ist also unendlich und damit ist die harmonische Reihe also auch unendlich.

Alternierende harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ \ldots$$

Diese Reihe konvergiert, da sie die Konvergenzbedingungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ \ldots$$

1. $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ \ldots$

2. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

erfüllt.

1. $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \ \ldots$

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Lösung 11: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{32}{4} + \frac{243}{8} + \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^5} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^5 = \frac{1}{2} < 1$$

Die Reihe konvergiert.

Lösung 12: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{6}{125} + \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{n!\,(n+1)}{n!} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)}{5} = \infty$$

Die Reihe divergiert.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{3}{8} + \frac{5}{10} + \frac{7}{14} + \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{2(n+1)-1}{3(n+1)+2} \cdot \frac{3n+2}{2n-1} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{3n+5} \cdot \frac{3n+2}{2n-1} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{5}{n}} \cdot \frac{3 + \frac{2}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

Eine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz mit dem Quotientenkriterium ist nicht möglich. Die notwendige Bedingung für die Konvergenz einer unendlichen Reihe ist

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \neq 0$$

Die Reihe divergiert.