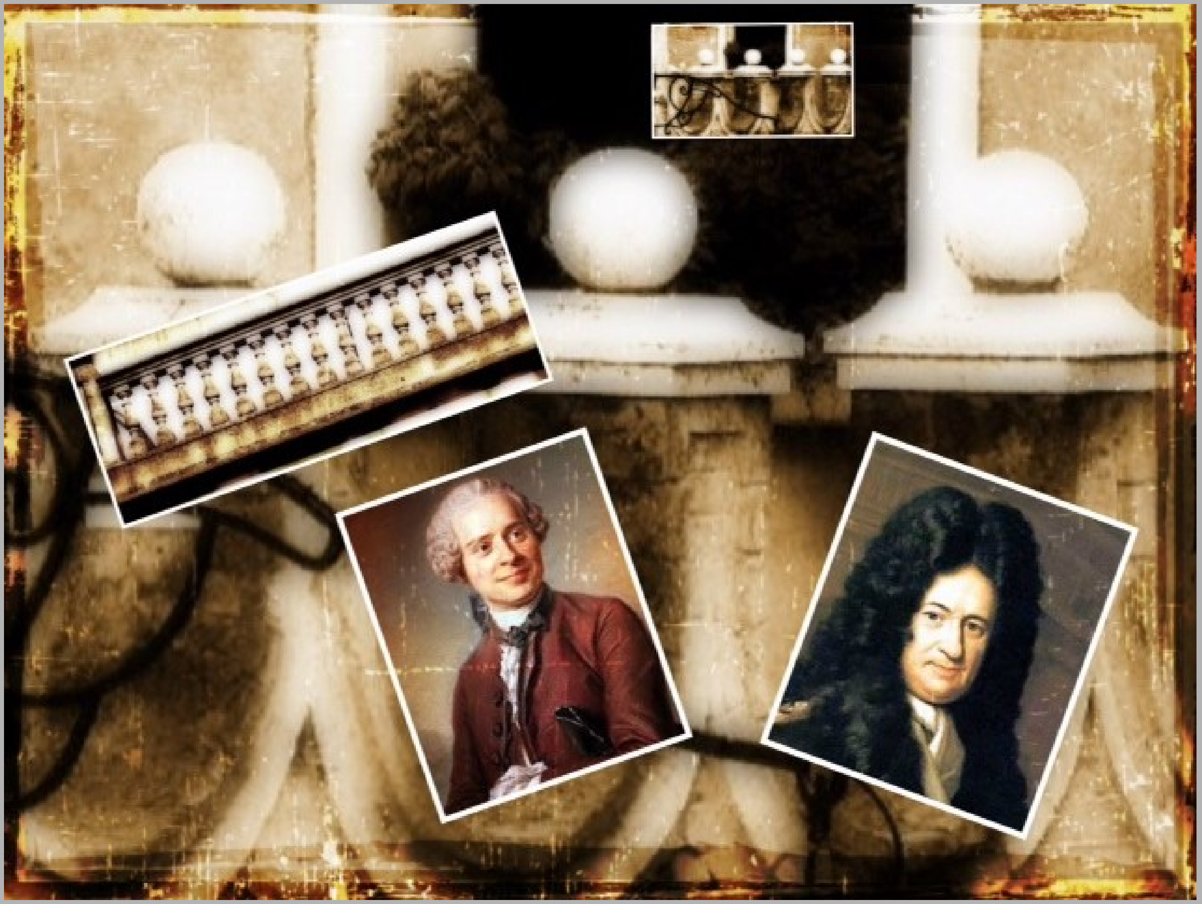


Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe

Unter dem Bildungsgesetz einer unendlichen Reihe

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

versteht man einen funktionalen Zusammenhang $a_n = f(n)$, aus dem sich die Reihenglieder berechnen lassen.

Beispiel 1:

Aus der arithmetischen Zahlenfolge

$$\langle a_n \rangle = \langle n \rangle = 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ \ldots$$

entsteht durch Partialsummenbildung eine sog. arithmetische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$$

Beispiel 2:

Aus der unendlichen Zahlenfolge

$$\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

entsteht durch Partialsummenbildung die sog. harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Beispiel 3:

Aus der geometrischen Folge

$$\langle a_n \rangle = \langle a\, q^{n-1} \rangle = a, \ a\, q, \ a\, q^2, \ \ldots, \ a\, q^{n-1}, \ldots$$

erhalten wir durch Partialsummenbildung die sog. geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, q^{n-1} = a + a\, q + a\, q^2 + \ldots + a\, q^{n-1} + \ldots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Für unendliche große n definiert man daher

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \to \infty} s_n$$

Damit wird die Summe einer unendlichen Reihe als Grenzwert der Folge der Partialsummen erklärt. So kann man die Konvergenz einer unendlichen Reihe (und damit das Problem der Existenz einer Summe dieser Reihe) auf die Konvergenz der Folge der zugehörigen Partialsummen zurückführen

Eine unendliche Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ heißt konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert. Der Grenzwert der Partialsumme heißt dann Summe der unendlichen Reihe, und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} s_n = s$$

Existiert s nicht, so heißt die Reihe divergent.

Wir zeigen, dass die geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q^1 + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots$$

für $|q| < 1$ konvergiert und für $|q| > 1$ divergiert.

$$s_n = 1 + q^1 + q^2 + \ldots + q^{n-1}, \qquad q\, s_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$$

$$s_n - q\, s_n = 1 + q^1 + q^2 + \ldots + q^{n-1} - \left[q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n \right] =$$

$$= 1 - q^n$$

$$s_n - q\, s_n = s_n (1 - q) = 1 - q^n \quad \Rightarrow \quad s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

$$|\, q \,| < 1 \quad : s = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}, \qquad \lim_{n \to \infty} q^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q^1 + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1 - q}$$

Die Folge der Partialsummen besitzt für $|q| < 1$ diesen Grenzwert.

Konvergenzkriterien ermöglichen eine Entscheidung darüber, ob eine vorgegebene unendliche Zahlenreihe konvergiert oder divergiert.

Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n > 0$$

ist die Bedingung

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = 0}$$

Diese Bedingung ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend.

Jean-Baptiste d'Alembert
(1717 - 1783)

Quotientenkriterium von d'Alembert:

Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$$

so ist die Reihe konvergent. Ist aber $q > 1$, so ist die Reihe divergent.

Für $q = 1$ versagt das Quotientenkriterium, d.h. eine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz ist dann mit dem Quotientenkriterium nicht möglich.

Das Quotientenkriterium liefert eine hinreichende Bedingung für die Reihenkonvergenz.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Eine alternierende Reihe ist eine Reihe, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots$$

$$a_n > 0$$

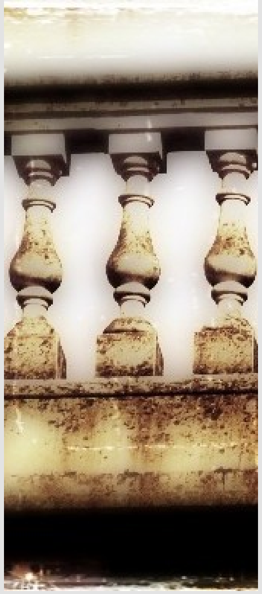
Der Faktor $(-1)^{n+1}$ bestimmt das Vorzeichen der Glieder.

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen:

Eine alternierende Reihe ist konvergent, wenn die Reihenglieder die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$

2. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$



Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren

$a)\quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots$

$b)\quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots$

$c)\quad \frac{1}{5} + \frac{3}{8} + \frac{5}{11} + \frac{7}{14} + \ldots$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Um zu bestimmen, ob diese Reihe konvergiert oder divergiert, bestimmen wir zuerst eine allgemeine Formel für die Glieder.

Im Zähler jedes Reihengliedes steht eine 1, im Nenner – Potenzen von 2. Deswegen besteht unsere Aufgabe darin, die Folge der Exponenten von 2 allgemein darzustellen:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \ldots = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \ldots =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{b_n}}$$

Wir haben also die Exponenten $b_n = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ mit der konstanten Differenz $d = 2$.

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 2, \quad b_3 = 4, \quad b_4 = 6, \ldots$$

$$b_2 = b_1 + 2, \qquad b_3 = b_2 + 2 = b_1 + 2(3 - 1)$$

$$b_n = b_1 + 2(n - 1) = 0 + 2(n - 1) = 2n - 2$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n = \frac{1}{2^{2n-2}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n-2}}{2^{2(n+1)-2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n}}{2^{2(n+1)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n}}{2^{2n} \cdot 2^2} = \frac{1}{4} < 1$$

Die Reihe konvergiert.

$$b)\quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n\cdot c_n}$$

$$b_n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots \qquad b_1 = 1, \quad d = 1$$

$$b_n = b_1 + d\,(n-1) = 1 + n - 1 = n$$

$$c_n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ldots \qquad c_1 = 2, \quad d = 1$$

$$c_n = c_1 + d\,(n-1) = 2 + n - 1 = n + 1$$

$$a_n = \frac{1}{b_n\cdot c_n} = \frac{1}{n\,(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n\,(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$$

In diesem Fall muss man mit anderen Mitteln auf Konvergenz prüfen:

$$a_n = \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$a_n = \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Die Reihe konvergiert.

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{8} + \frac{5}{11} + \frac{7}{14} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{c_n}$$

$$b_n = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, \ldots \qquad b_1 = 1, \quad d = 2$$

$$b_n = b_1 + d\,(n-1) = 1 + 2\,(n-1) = 2n - 1$$

$$c_n = 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17, \ldots \qquad c_1 = 5, \quad d = 3$$

$$c_n = c_1 + d\,(n-1) = 5 + 3\,(n-1) = 3n + 2$$

$$a_n = \frac{b_n}{c_n} = \frac{2n-1}{3n+2}, \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2}{3} \neq 0$$

Die Reihe divergiert.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren

Aufgabe 2: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

Aufgabe 3: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

Aufgabe 4: $a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n+1}}{n!}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!}$

Aufgabe 5: $a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^4}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+3)^3}$

Aufgabe 6: $a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^{3n-1}}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+7}{3^{4n+3}}$

Aufgabe 7: $a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n-1}}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{\sqrt{n+2}}$

Aufgabe 8: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{(n+1)\,5^{n+1}}$

Lösung 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \ldots = \frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{3}{125} + \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{5^{n+1}} \frac{5^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{5} < 1$$

Die Reihe konvergiert.

Lösung 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{4^2}{2^4} + \frac{5^2}{2^5} + \ldots = \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{8} + 1 + \frac{25}{32} + \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \frac{n+1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} < 1$$

Die Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n+1}}{n!} = \frac{6^2}{1!} + \frac{6^3}{2!} + \frac{6^4}{3!} + \frac{6^5}{4!} + \ldots = \frac{6^2}{1} + \frac{6^3}{2} + \frac{6^4}{6} + \frac{6^5}{24} + \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{6^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{6^{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{6 \cdot n!}{(n+1)!} = 6 \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= 6 \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n!\,(n+1)} = 6 \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Die Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!} = \frac{3^2}{2!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^6}{6!} + \frac{3^8}{8!} + \ldots = \frac{9}{1 \cdot 2} + \frac{3^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} +$$

$$+ \frac{3^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{3^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots = \frac{9}{2} + \frac{27}{8} + \frac{81}{80} + \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{3^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{3^{2n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^2 \cdot (2n)!}{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{9}{(2n+1) \cdot (2n+2)} = \lim_{n \to \infty} \frac{9}{n^2 \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{9}{4n^2} = 0 < 1$$

Die Reihe konvergiert.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^4}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^4} \cdot \frac{n^4}{3^n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3\,n^4}{(n+1)^4} = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^4 = 3 > 1$$

Die Reihe divergiert.

$$b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+3)^3}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{(n+4)^3} \cdot \frac{(n+3)^3}{2^n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\,(n+3)^3}{(n+4)^3} \right) = 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+4} \right)^3 = 2 > 1$$

Die Reihe divergiert.

Konvergenz und Divergenz: Lösung 6

a) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^{3n-1}}$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2^3} \lim_{n \to \infty} \frac{n+2+1}{n+2} =$$

$$= \frac{1}{2^3} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2^3} < 1$$

Die Reihe konvergiert.