*Reihen, Einleitung*

Im Folgenden werden wir Reihen, d.h. Summen von Zahlen untersuchen. Wir unterscheiden zwischen einer endlichen Reihe, bei der die Summe endlich viele Summanden besitzt, und einer unendlichen Reihe, mit einer unendlichen Zahl von Summanden. Eine endliche Reihe gibt uns keine Rätsel auf; mit genügend Zeit können wir die Summe einer endlichen Reihe berechnen, indem wir die Ausdrücke einen nach dem anderen addieren. Dagegen erfordert eine unendliche Reihe etwas Sorgfalt, da wir natürlich bei einer unendliche Anzahl von Ausdrücken nicht alle einen nach dem anderen addieren können.

$\langle a_n \rangle$ ist eine Zahlenfolge: $\langle a_n \rangle = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Aus dieser Folge ergibt sich eine Reihe

$\langle s_n \rangle = s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$

nach folgender Vorschrift:

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \qquad s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{i=1}^{4} a_i$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Das erste Glied der Reihe $s_1$ ist die erste Partialsumme der Reihe.

Das zweite Glied der Reihe $s_2$ ist die zweite Partialsumme der Reihe.

Das $n$-te Glied der Reihe $s_n$ ist die $n$-te Partialsumme der Reihe usw.

Partialsumme = Teilsumme

Wenn die Zahlenfolge unendlich ist, ist auch die Reihe unendlich.

Mit dem Begriff einer unendlichen Zahlenfolge hatten wir keine Verständnisprobleme. Man kann z.B. die natürlichen Zahlen in Form einer arithmetischen Folge aufschreiben:

$$\langle a_n \rangle = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots, \qquad a_1 = 0, \quad d = 1$$

Wir können auch die 10-te, 100-te oder eine andere Partialsumme berechnen:

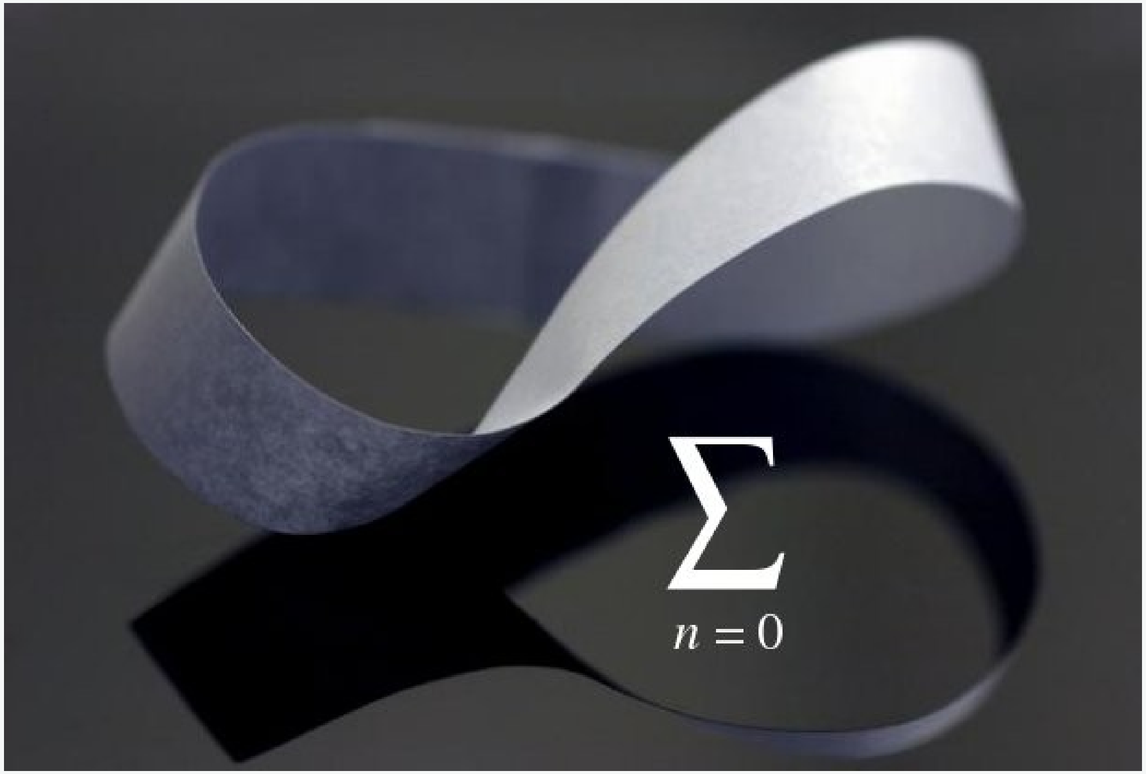
$$s_{10} = \sum_{i=0}^{10} a_i = 55, \qquad s_{100} = \sum_{i=0}^{100} a_i = 5050$$

nicht aber die unendliche Summe $s = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

Es stellt sich die Frage nach der Bedeutung von $s_n$, $n \to \infty$, wenn diese Summe nicht mit den bekannten Rechenmitteln berechnet werden kann. Auch der schnellste Rechner kann die unendlich vielen Glieder einer unendlichen Reihe nicht alle addieren.

Gibt es überhaupt Probleme, bei denen man unendlich viele Summanden summiert?

Kann eine unendliche Reihe, eine endliche Zahl ergeben?




*http://www.pbase.com/jakepratt/image/37146570*

Bei unendlichen Reihen ist eine Summenbildung nicht ohne weiteres möglich: 1) man kann unendlich viele Zahlen nicht addieren, 2) die bekannten Gesetze für das Rechnen mit reellen Zahlen, z.B. das Kommutativgesetz oder das Distributivgesetz, gelten nur für endlich viele Summanden.

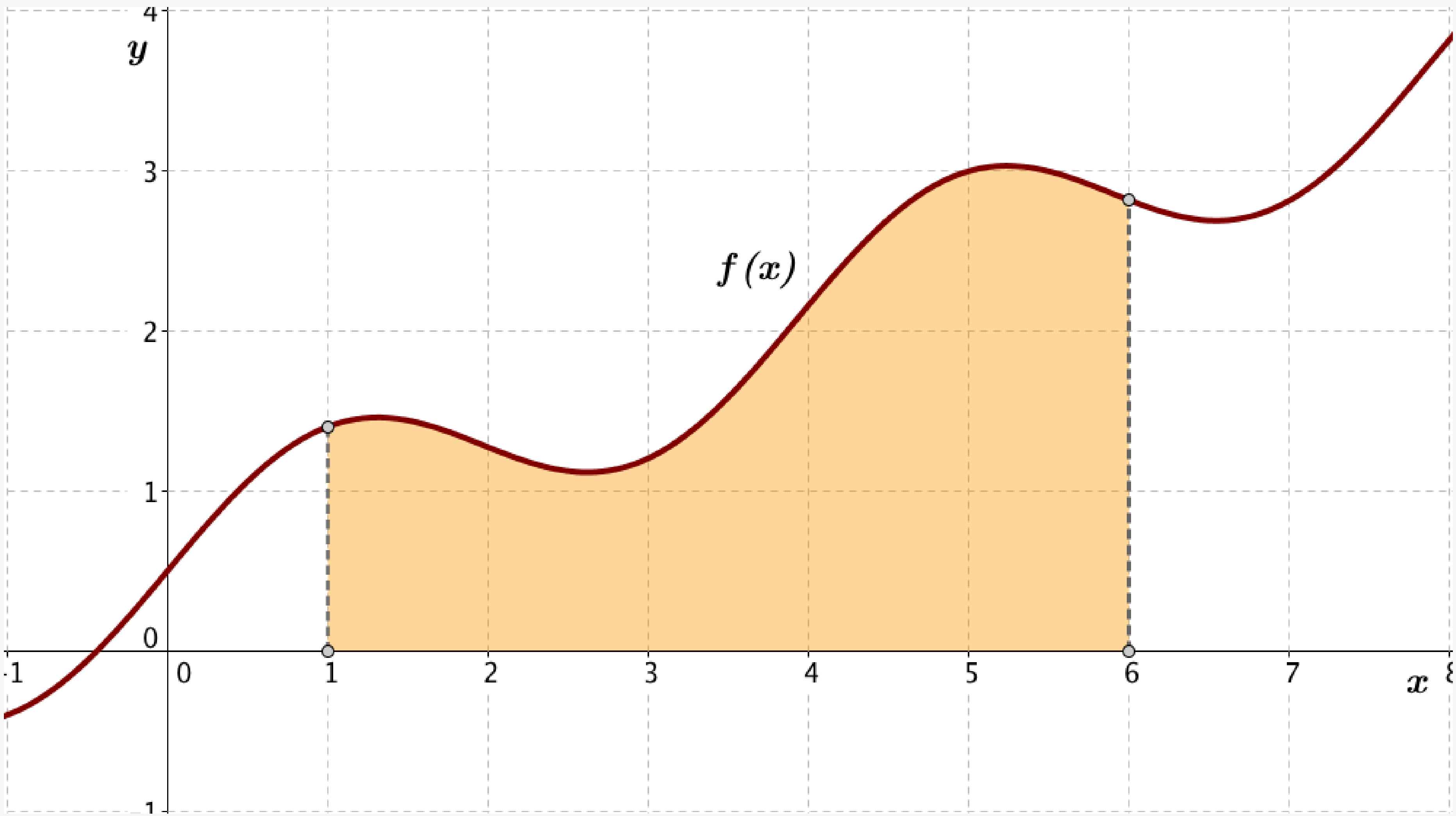



*Abb. B1-A: Die Fläche unter der Kurve der Funktion $y = f(x)$ im Intervall $x = [1, 6]$ soll berechnet werden. $f(x)$ ist im gegeben Intervall stetig und positiv*

Wie in Abbildung B1-A dargestellt, ist $y = f(x)$ eine stetige Funktion. Sie verläuft im Intervall [1, 6] oberhalb der $x$-Achse, hat also positive Funktionswerte.

Um die Fläche unter der Kurve zu berechnen, werden wir wie folgt vorgehen:

- Die Fläche wird durch Schnitte parallel zur $y$-Achse in $n$ Streifen gleicher Breite $\Delta x$ zerlegt.
- Jeder Streifen wird durch ein Rechteck der Breite $\Delta x$ ersetzt, wobei die Höhe dem minimalen (oder dem maximalen) Funktionswert im Bereich $\Delta x$ entspricht.
- Die Summe der Rechtecksflächen bezeichnen wir als Untersumme oder (oder Obersumme)

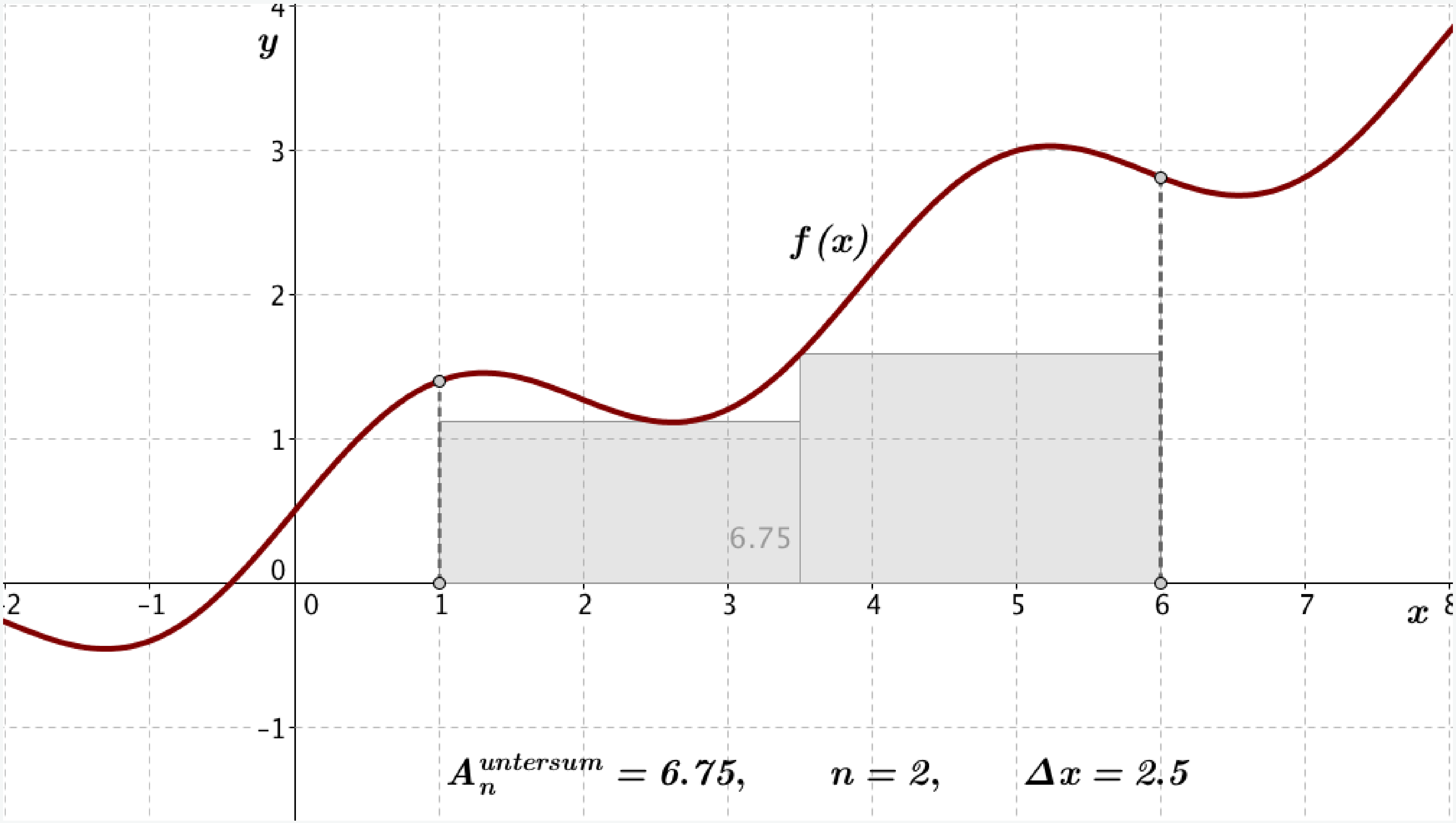



*Abb. B1-1: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion y = f(x) und der x-Achse im Intervall* [1, 6] (*n* = 2, *Untersumme*)

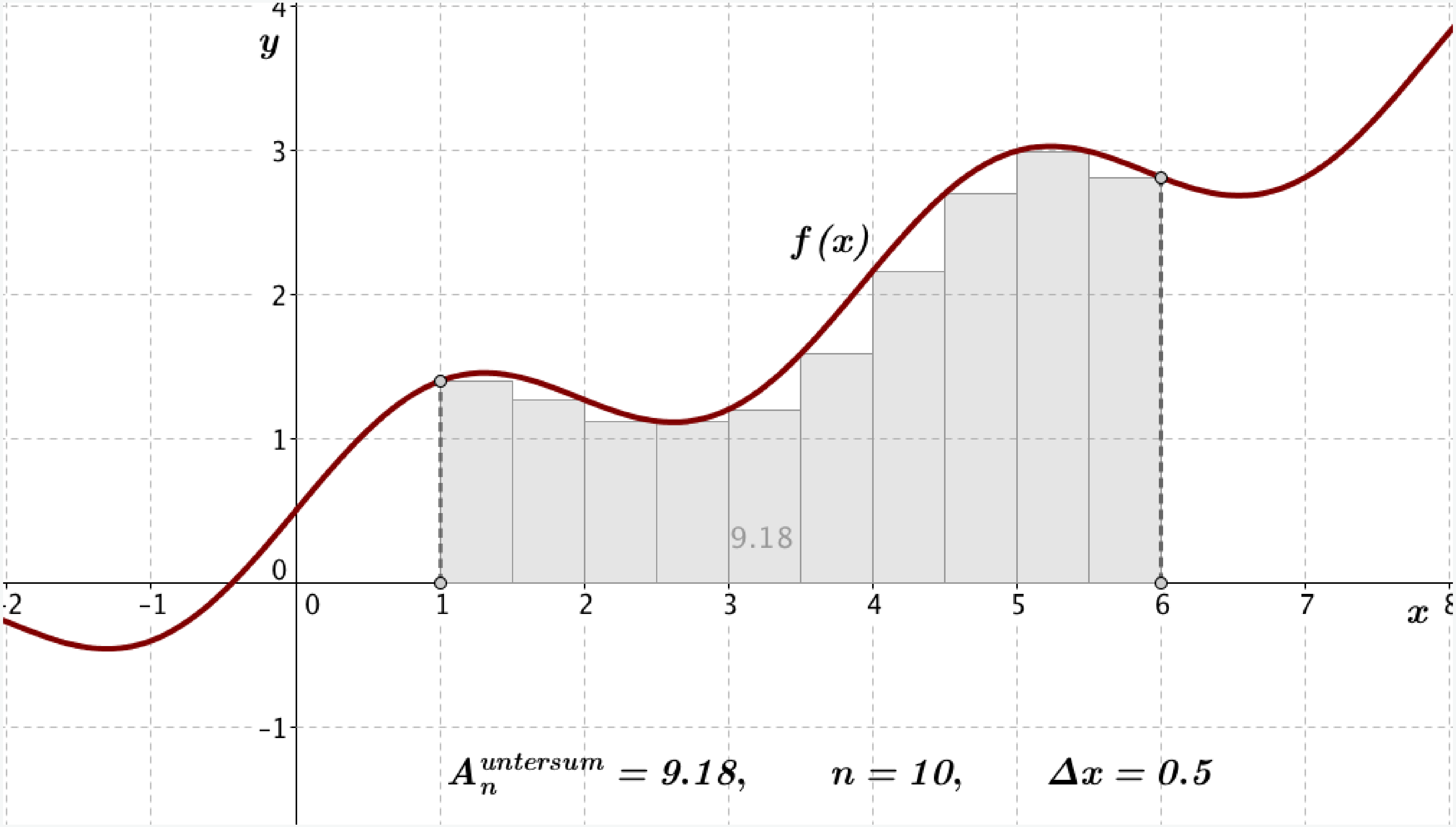



*Abb. B1-2: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[1, 6]$ ($n = 10$, Untersumme)*

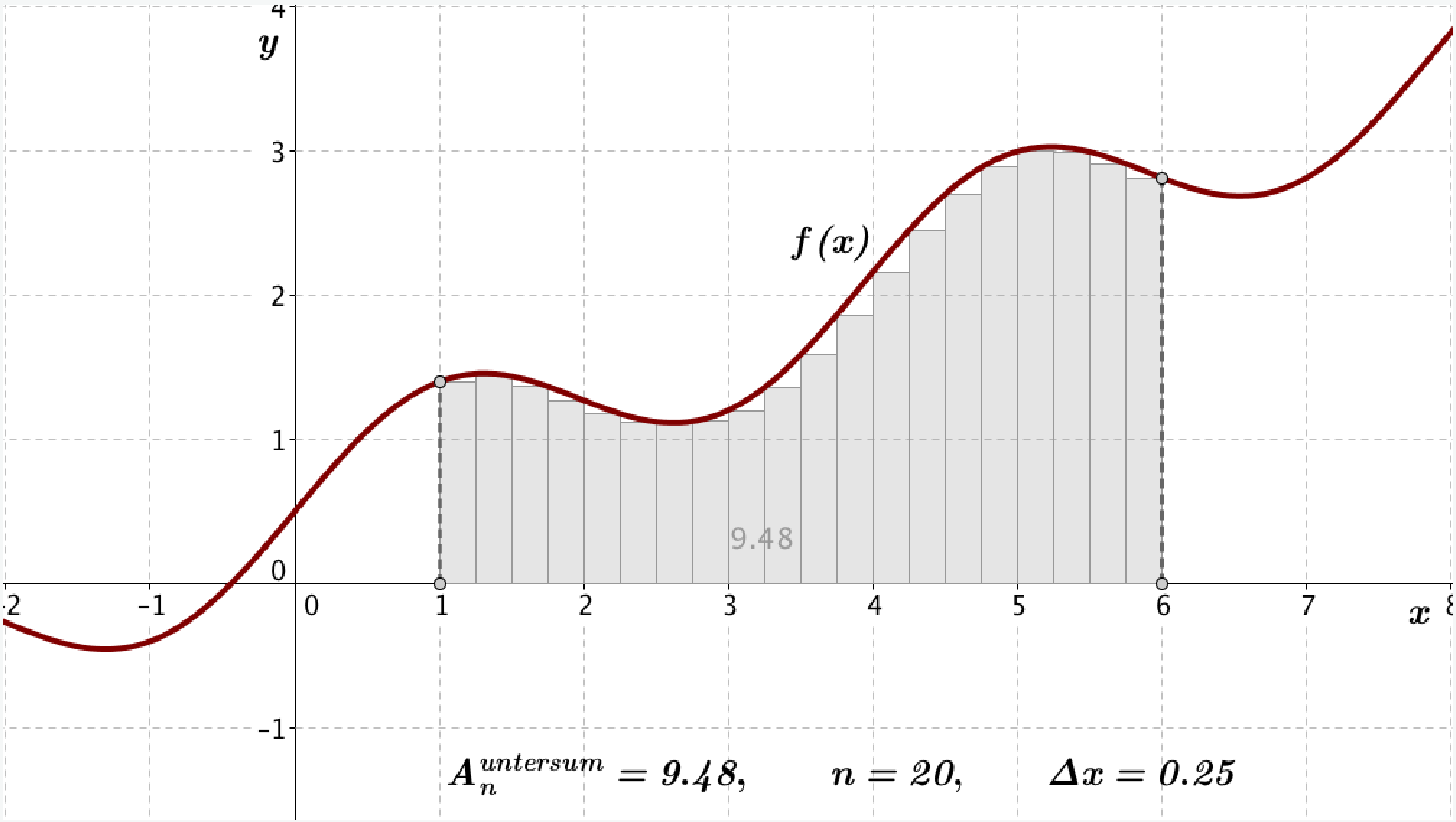



*Abb. B1-3: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall [1, 6] ($n = 20$, Untersumme)*

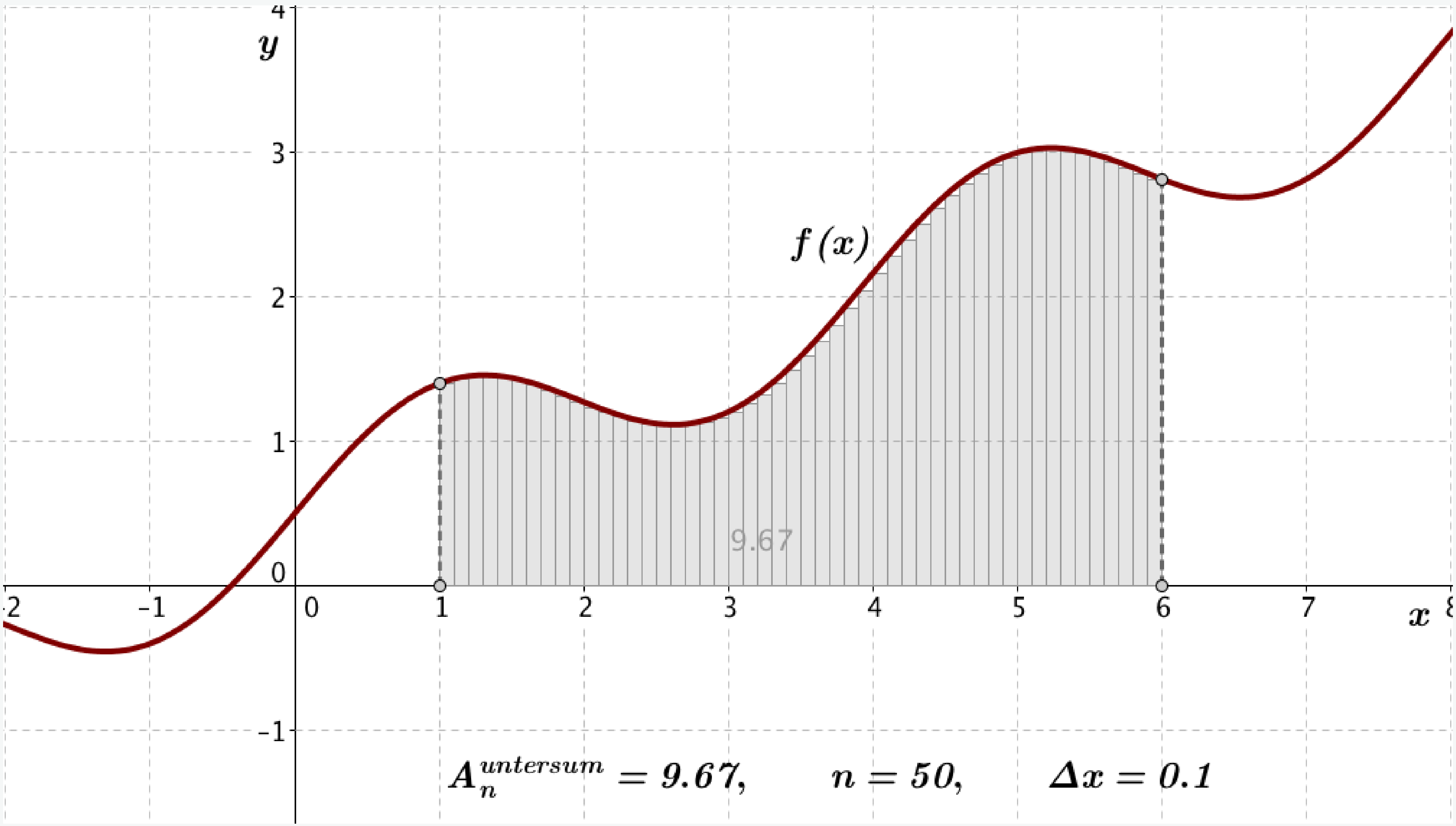



*Abb. B1-4: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall [1, 6] ($n = 50$, Untersumme)*

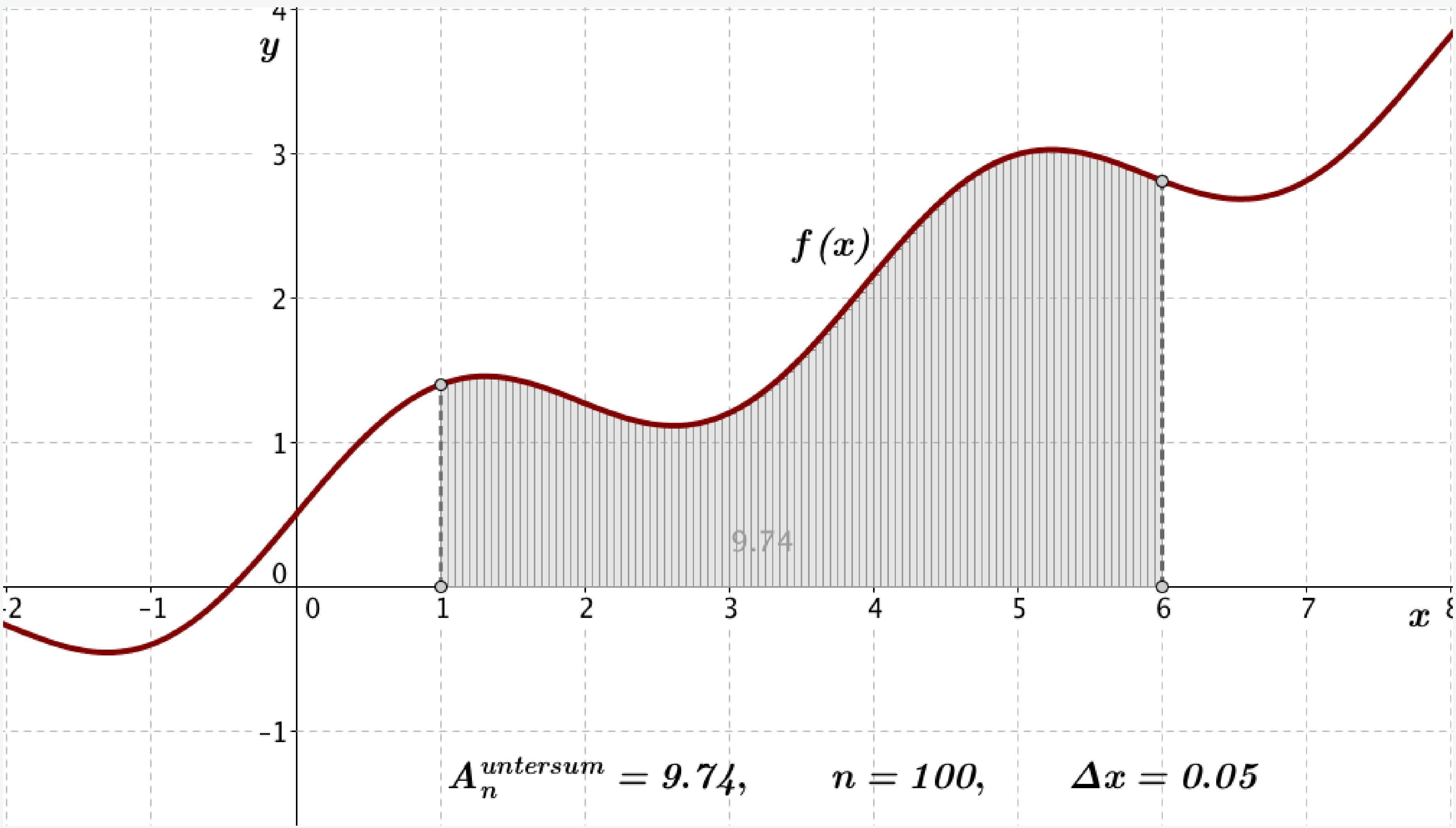



*Abb. B1-5: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion* $y = f(x)$ *und der x-Achse im Intervall* [1, 6] ($n = 100$, *Untersumme*)

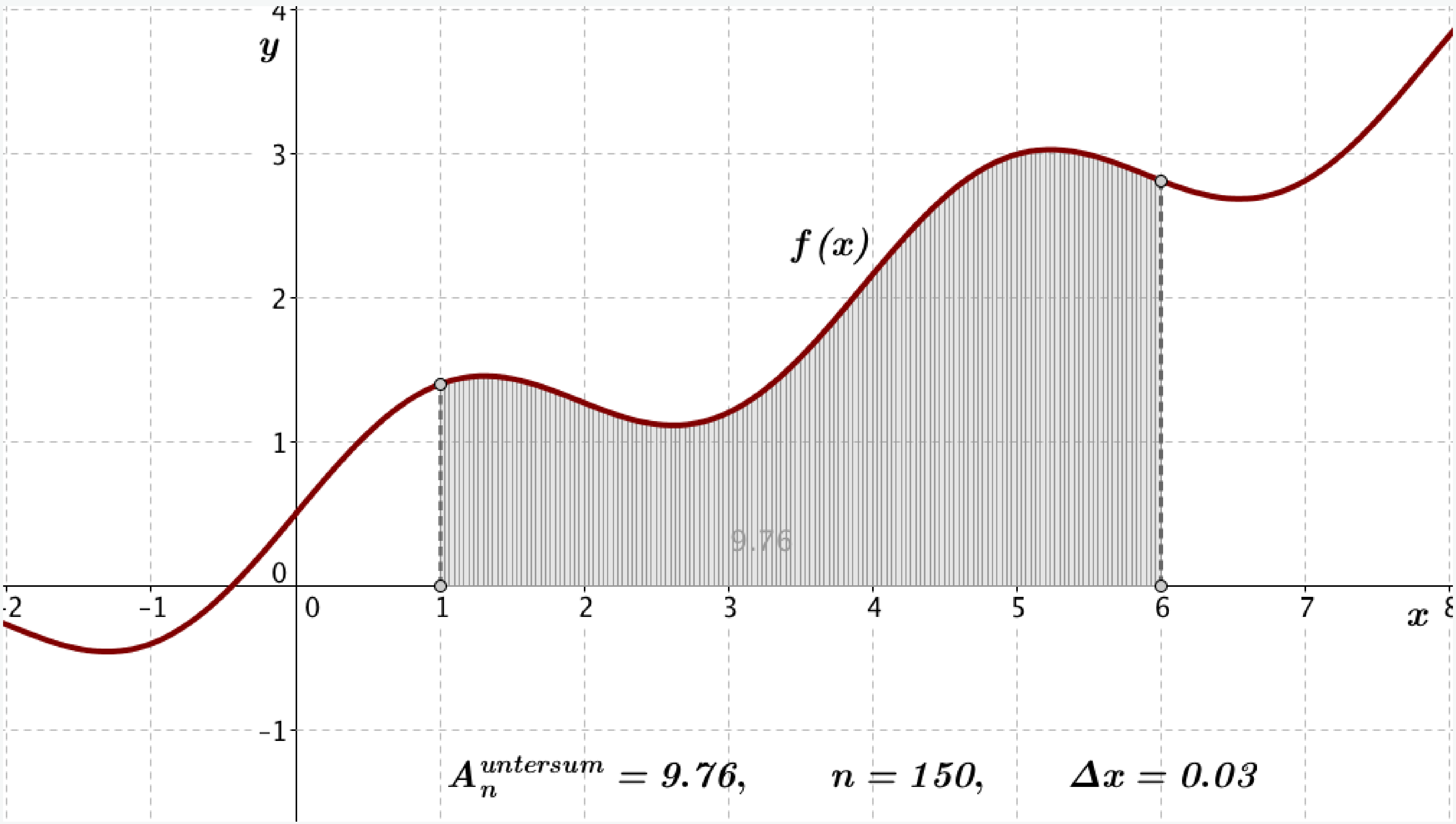



*Abb. B1-6: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall* [1, 6] (*$n = 150$, Untersumme*)

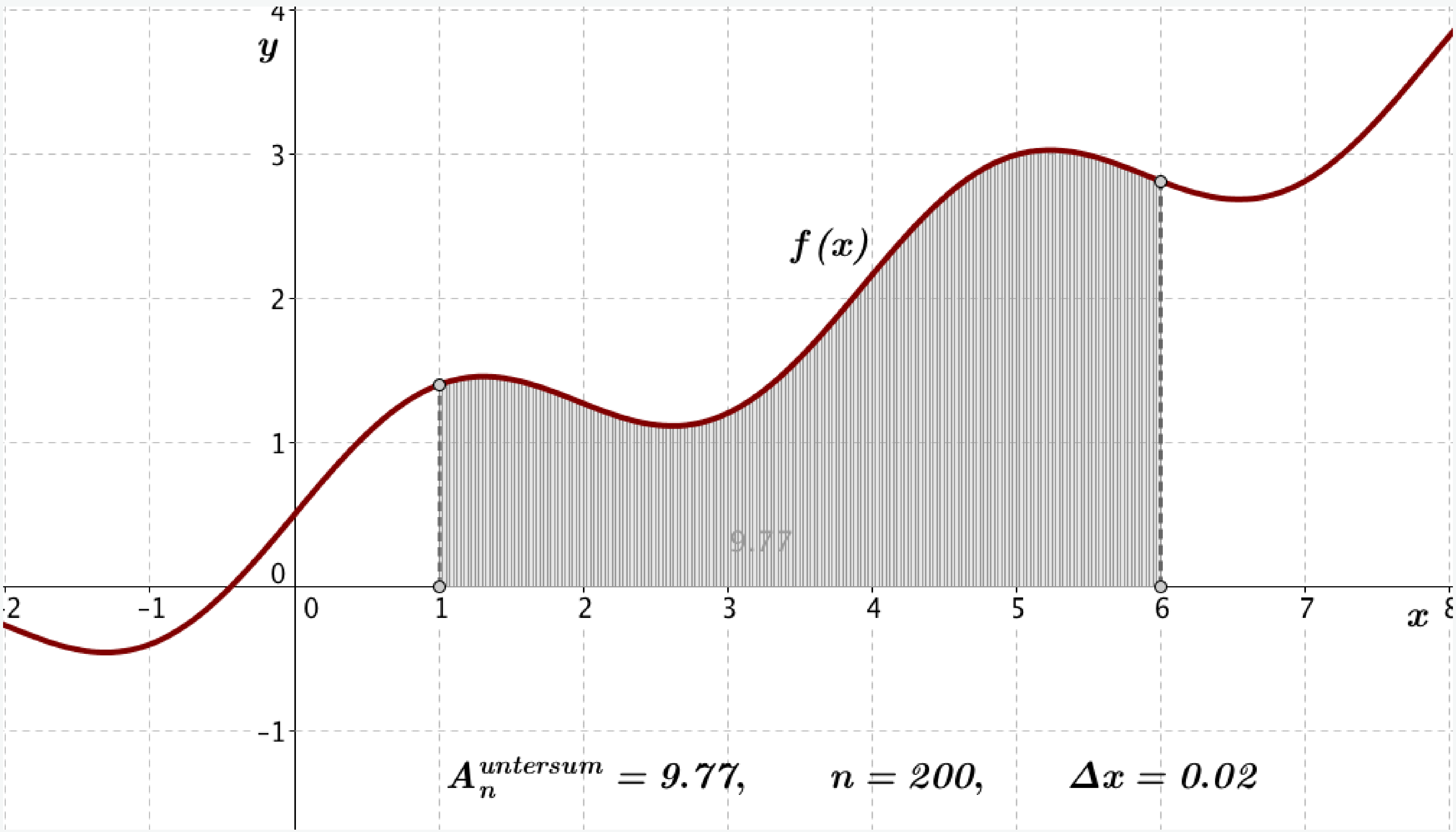



*Abb. B1-7: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall [1, 6] ($n = 200$, Untersumme)*

| | |
|---|---|
| $n = 2,$ | $A_n = 6.75$ |
| $n = 10,$ | $A_n = 9.18$ |
| $n = 20,$ | $A_n = 9.48$ |
| $n = 50,$ | $A_n = 9.67$ |
| $n = 100,$ | $A_n = 9.74$ |
| $n = 150,$ | $A_n = 9.76$ |
| $n = 200,$ | $A_n = 9.77$ |

Hier ist $n$ die Anzahl der Rechtecke, $A$ mit Index $n$ ist die entsprechende Fläche.

Wir approximieren die Fläche unter der Kurve durch die Fläche der Rechtecke. Mit wachsendem $n$ wird die Approximation besser und der Fehler kleiner. Aber auch bei sehr großem, aber endlichem $n$ wird die Approximation den exakten Flächeinhalt nicht erreichen.

Dezimale Darstellung des Bruches 1/3 :

$$\frac{1}{3} = 0.\bar{3} = 0.33333...$$

abkürzende dezimale Schreibweise (*"Null, Komma Peroide 3"*)

Wir gehen von einer geometrischen Folge aus: $a_1 = 0.3, \quad q = 10^{-1}$

$$a_1 = 0.3,$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 0.3 \cdot 10^{-1} = 0.03,$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = 0.03 \cdot 10^{-1} = 0.003,$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = 0.003 \cdot 10^{-1} = 0.0003,$$

$$s_1 = a_1 = 0.3, \qquad s_2 = a_1 + a_2 = 0.3 + 0.03 = 0.33$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0.3 + 0.03 + 0.003 = 0.333$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{3} = 0.\bar{3}$$

*Guido Grandi (1671-1742)*

Guido Grandi war ein italienischer Mathematiker und Mönch. Er wurde an einem Jesuiten-Kolleg erzogen. Grandi unterrichtete Philosophie und Theologie und wurde später Professor für Mathematik an der Universität Pisa.

Grandi beschäftigte sich auch mit der alternierenden unendlichen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Er stellte fest, dass er bei verschiedener Klammersetzung entweder 0 oder 1 als Summe erhielt. Fasst man zur Berechnung der Summe jeweils zwei Glieder in folgender Weise zusammen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots \ ,$$

so ergibt sich für die Reihe der Wert Null. Genau so gut hätte man aber wie folgt zusammenfassen können

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \ \ldots$$

In diesem Fall würde für die Summe der Wert Eins entstehen.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 0 \qquad \text{oder} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1$$

Grandi interpretierte dies in einer Abhandlung als Beweis für die Möglichkeit Gottes, die Welt aus dem Nichts zu schaffen.

Andere Mathematiker wiesen der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

unter diesem Dilemma die Summe ½ zu und begründete dies über die geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

Derartige Ungereimtheiten können auftreten, wenn man die für endlich viele Summanden geltenden Gesetze der Arithmetik gedankenlos auf Summen mit unendlich vielen Summanden überträgt. Daher muss der Begriff Summe einer unendlichen Reihe anders definiert werden.