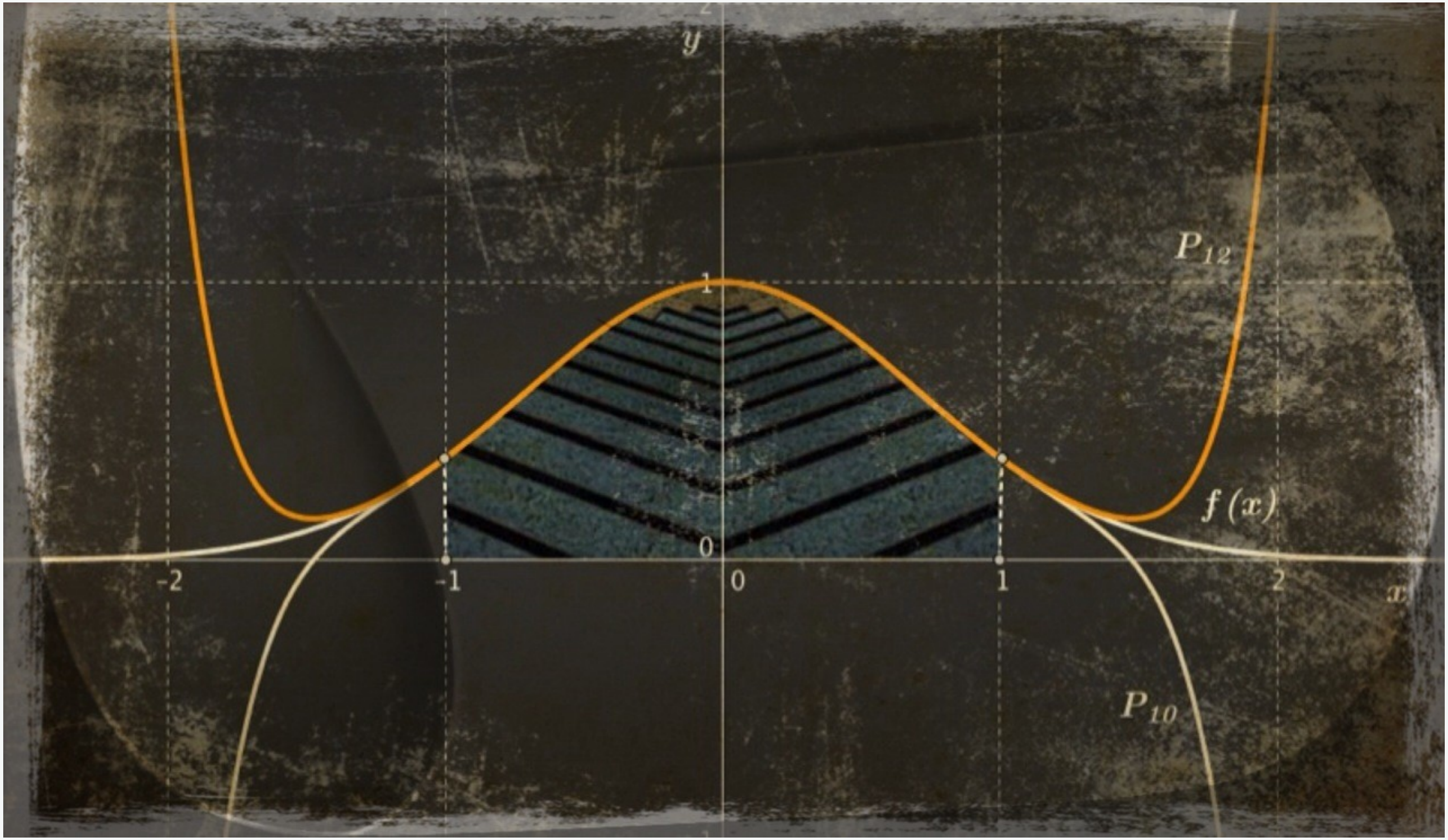

Integration durch Potenzreihenentwicklung

Ma 2 – Lubov Vassilevskaya

Es gibt Integrale, die man mit den bekannten Integrationstechniken nicht lösen kann. Zu diesen Integralen gehört z.B. das Gaußsche Fehlerintegral:

$$F(x) = \int_0^x e^{-u^2}\, du$$

In diesem Fall, wie auch in vielen anderen, gelingt es, die Integrandenfunktion in eine Potenzreihe zu entwickeln und anschließend zu integrieren. Diese Methode kann nur dann angewendet werden, wenn die Potenzreihe im Integrationsbereich konvergiert.

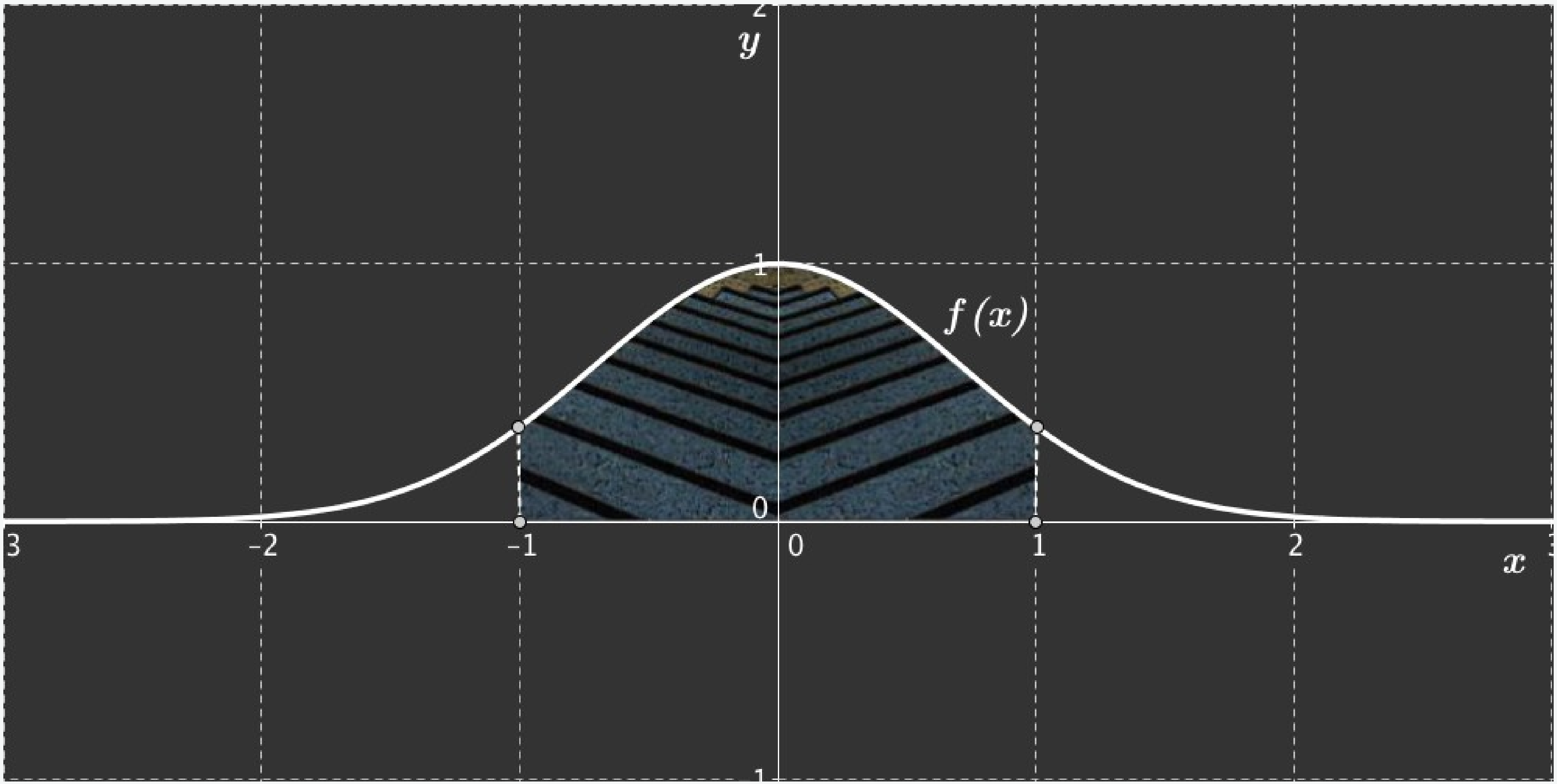

Abb. A1: Die Fläche unter der Gaußschen Glockenkurve y = f (x) im Interavall [-1, 1]

Bestimmen Sie durch Potenzreihenentwicklung die Fläche unter der Gaußschen Glockenkurve $y = f(x)$ im Interavall [-1, 1]

$$f(x) = e^{-x^2}, \qquad A = \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{1}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!\,(n+1)}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n!\,(n+1)}{n!} \right| = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty$$

Die Reihe der Funktion e^{-x^2} kann aus dieser Reihe durch die Substitution $x \to -x^2$ gewonnen werden

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

$$A = \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^1 e^{-x^2} dx \simeq 2 \int_0^1 P_n \, dx$$

P_n – Näherungspolynom n. Grades

$$f(x) = e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n}$$

$$P_2 = 1 - x^2$$

$$P_4 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} = P_2 + \frac{x^4}{2!}$$

$$P_6 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} = P_4 - \frac{x^6}{3!}$$

$$P_8 = 1 - x^2 + \ldots + \frac{x^8}{4!} = P_6 + \frac{x^8}{4!}$$

$$P_{10} = P_8 - \frac{x^{10}}{5!}, \qquad P_{12} = P_{10} + \frac{x^{12}}{6!}$$

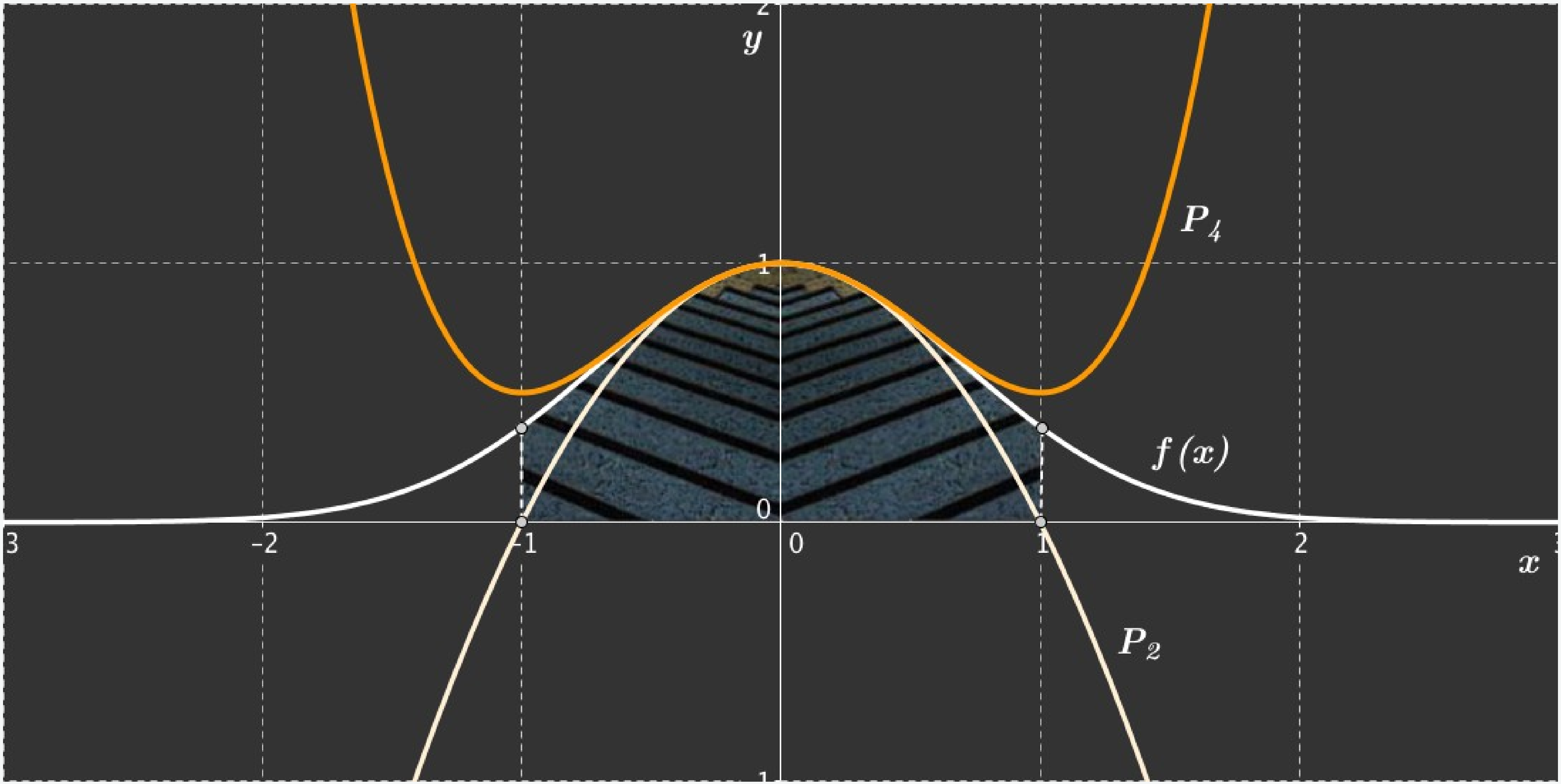

Abb. L1-1: Die Fläche unter der Gaußschen Glockenkurve $y = f(x)$ im Interavall [-1, 1] und Näherungspolynome 2. und 4. Grades

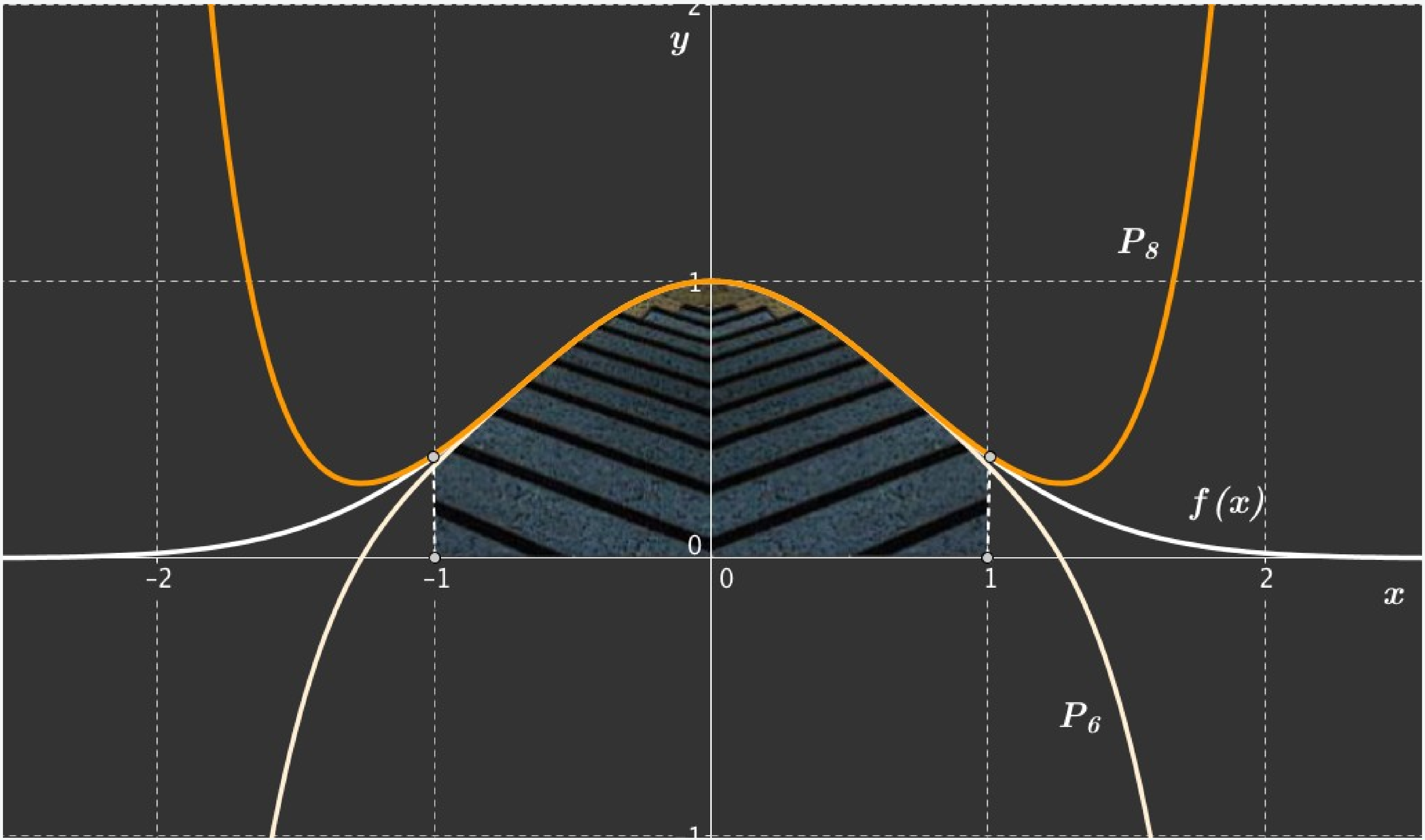

Abb. L1-2: Die Fläche unter der Gaußschen Glockenkurve y = f (x) im Interavall [-1, 1] und Näherungs-polynome 6. und 8. Grades

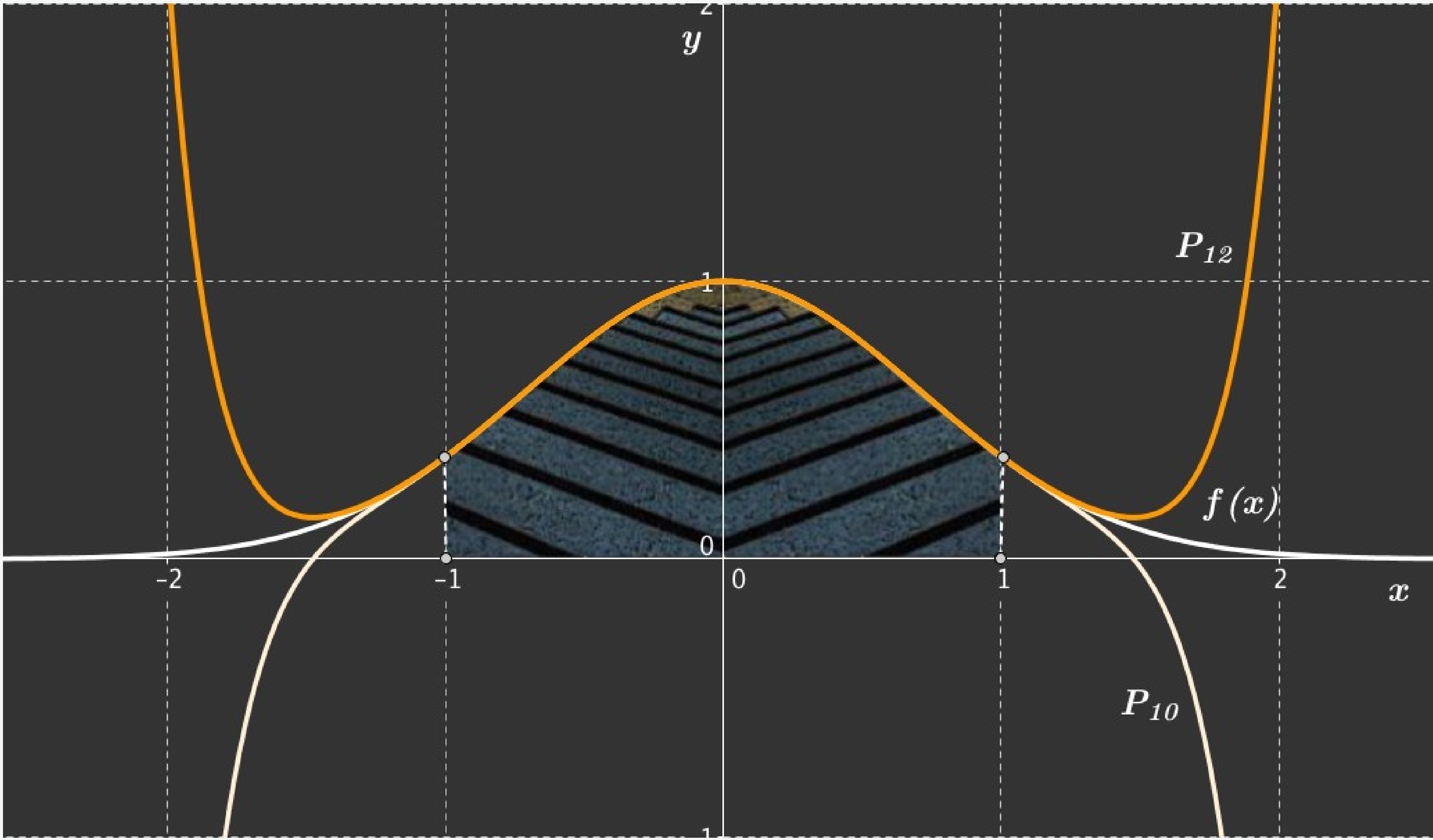

Abb. L1-2: Die Fläche unter der Gaußschen Glockenkurve $y = f(x)$ im Interavall [-1, 1] und Näherungspolynome 10. und 12. Grades

$$f(x) = e^{-x^2}, \qquad P_2 = 1 - x^2, \qquad P_4 = P_2 + \frac{x^4}{2}$$

$$P_6 = P_4 - \frac{x^6}{6}, \qquad P_8 = P_6 + \frac{x^8}{24}, \qquad P_{10} = P_8 - \frac{x^{10}}{120}, \qquad P_{12} = P_{10} + \frac{x^{10}}{720}$$

$$A = \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx = 2\int_0^1 e^{-x^2} dx \simeq 2\int_0^1 P_n \, dx$$

$$A_{(n)} = 2\int_0^1 P_n \, dx$$

$$A_{(2)} = 2\int_0^1 P_2 \, dx = 2\int_0^1 (1 - x^2) \, dx = 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3} \simeq 1.3333$$

$$A_{(4)} = 2\int_0^1 P_4 \, dx = 2\int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx = 2\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{23}{15} \simeq 1.5333$$

$$A_{(6)} = 2\int_0^1 P_6\,dx = 2\int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}\right) dx =$$

$$= 2\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42}\right]_0^1 = \frac{52}{35} \simeq 1.4857$$

$$A_{(8)} = 2\int_0^1 P_8\,dx = 2\int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}\right) dx =$$

$$= 2\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216}\right]_0^1 = \frac{5651}{3780} \simeq 1.4950$$

$A_{(10)} \simeq 1.4935, \qquad A_{(12)} \simeq 1.4937$

$$A = \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx \simeq 1.4936$$

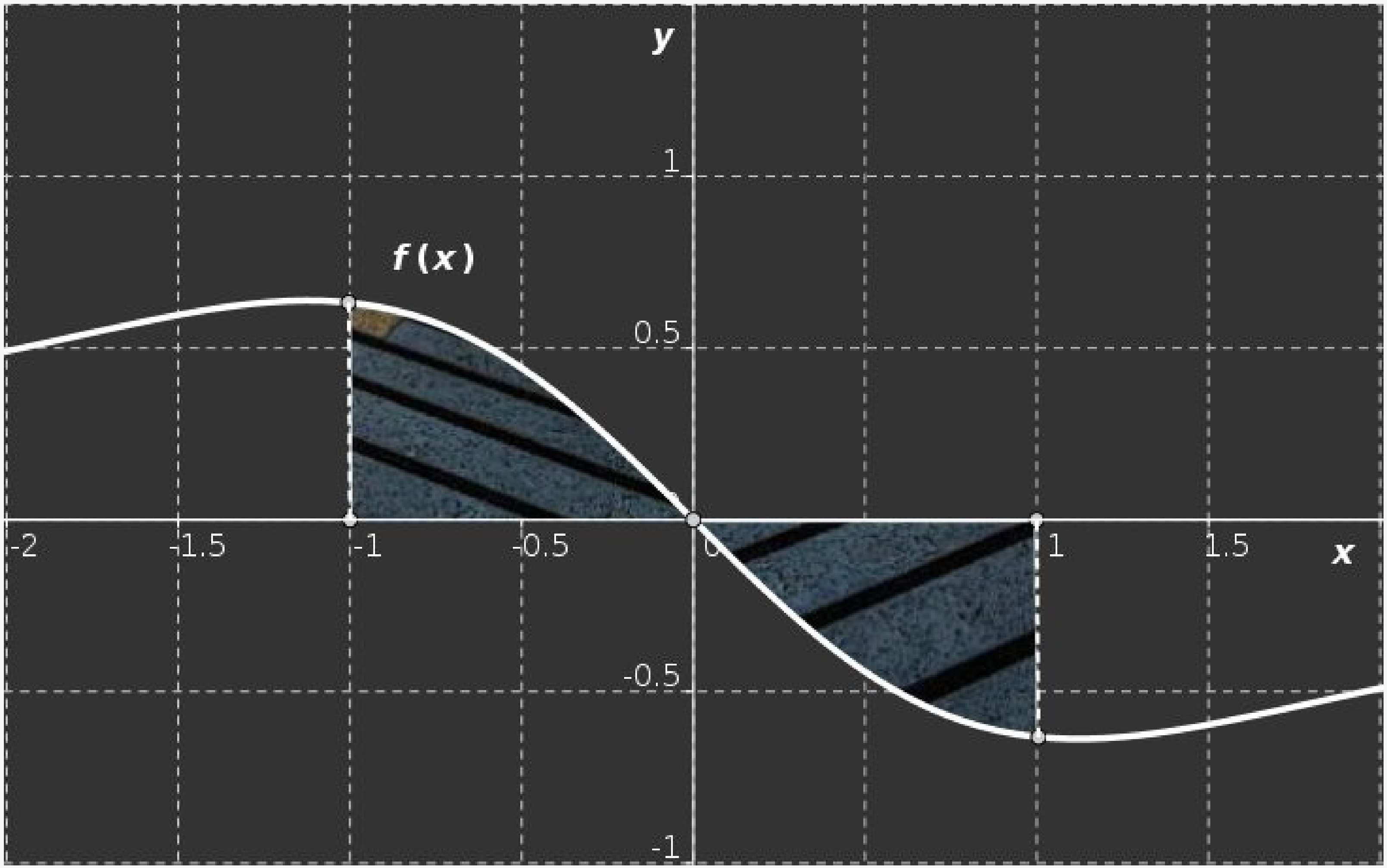

Abb. A2: Die Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ im Interavall [-1, 1]

Bestimmen Sie durch Potenzreihenentwicklung die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und x-Achse im Interavall [-1, 1]

$$f(x) = \frac{e^{-x^2} - 1}{x}$$

Die Reihe der Funktion e^{-x^2} kann aus der Reihe für e^x durch die Substitution $x \to -x^2$ gewonnen werden

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

$$\frac{e^{-x^2} - 1}{x} = \frac{1}{x} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots - 1 \right) =$$

$$= -x + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{4!} - \ldots$$

$$A_{(n)} = 2 \int_{-1}^{0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x} \, dx \simeq 2 \int_{-1}^{0} P_n \, dx$$

$$A_{(5)} = 2 \int_{-1}^{0} P_4 \, dx = 2 \int_{0}^{1} \left(-x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{6} \right) dx = \frac{29}{36} \simeq 0.8056$$

$$A_{(7)} = 2 \int_{-1}^{0} P_6 \, dx = 2 \int_{0}^{1} \left(-x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{24} \right) dx = \frac{229}{288} \simeq 0.7951$$

$$A_{(9)} = 2 \int_{-1}^{0} P_8 \, dx = \frac{5737}{7200} \simeq 0.7968$$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie das Integral durch Entwicklung des Integranden in Eine Reihe um die Stelle $x = 0$.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \right) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots \right) =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \ldots \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \ldots \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi^4}{9600} - \ldots \right) \simeq 1.371$$