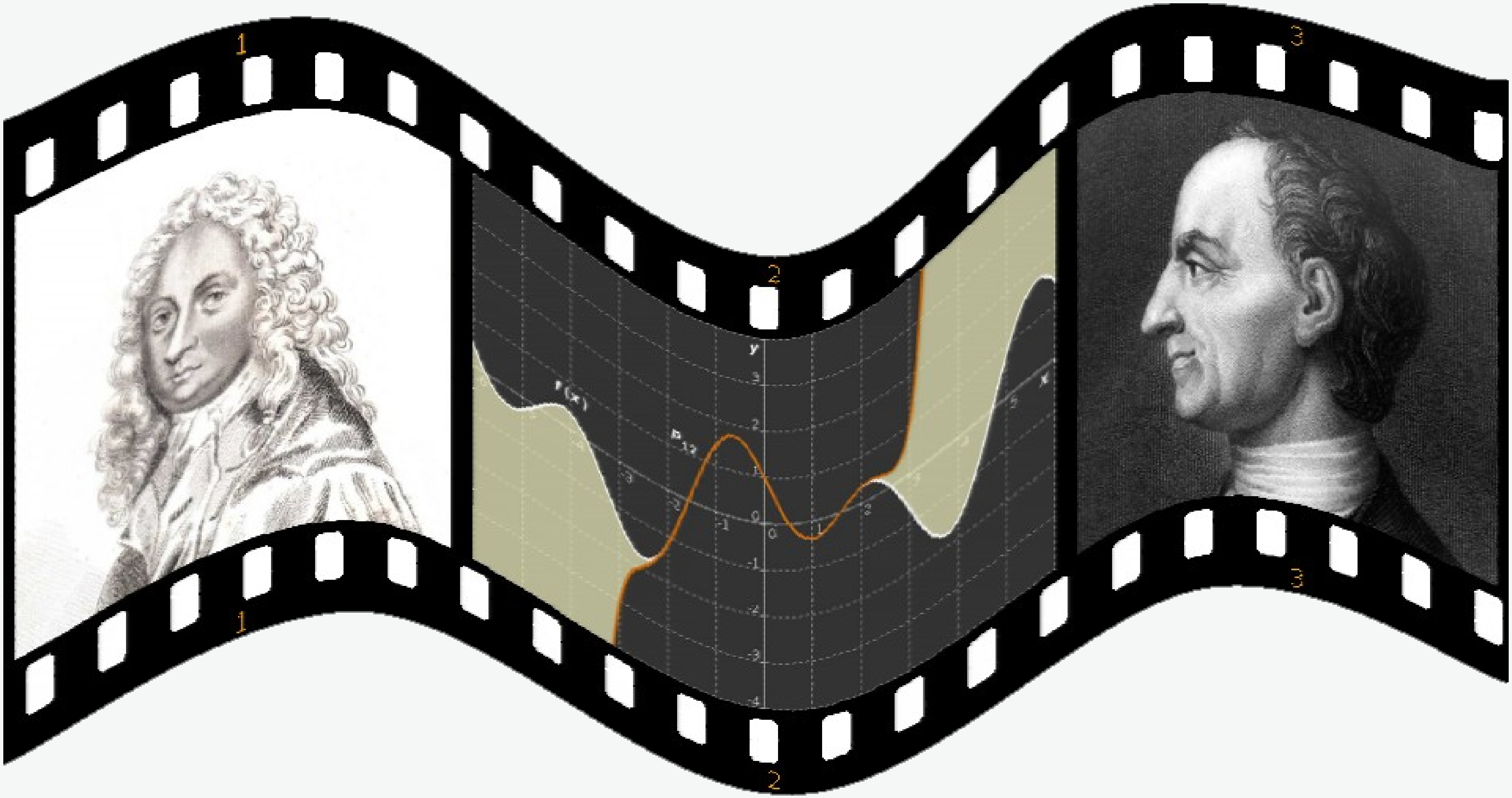
Maclaurinsche Reihe

Colin Maclaurin

Colin Maclaurin (1698-1746), schottischer Mathematiker, der Erfinder der nach ihm benannten Maclaurinschen Reihe und Mitentwickler der Euler-Maclaurin-Formel.


1
2
3

Annahme:

Eine in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ beliebig oft differenzierbare Funktion $f(x)$ kann in eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$

entwickelt werden.

Wir werden zeigen, dass die Koeffizienten in der Potenzentwicklung eindeutig durch die Funktions- und Ableitungswerte

$$f(0), \quad f'(0), \quad f''(0), \quad f'''(0), \quad \ldots$$

bestimmt sind.

Die ersten Ableitungen lauten:

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + 4\,a_4\,x^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2\,a_2 + 6\,a_3\,x + 12\,a_4\,x^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 6\,a_3 + 24\,a_4\,x + \dots$$

An der Stelle $x = 0$ gilt:

$$f(0) = a_0 = (0!)\;a_0\,, \qquad f'(0) = a_1 = (1!)\;a_1$$

$$f''(0) = 2\,a_2 = (2!)\;a_2\,, \qquad f'''(0) = 6\,a_3 = (3!)\;a_3$$

$$a_0 = \frac{f(0)}{0!}\,, \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}\,, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}\,, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,, \quad \dots\,, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

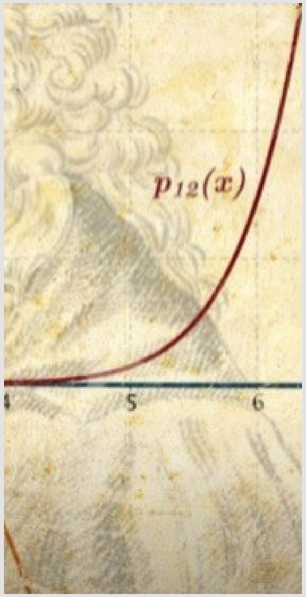
Entwicklung einer Funktion in eine Maclaurinsche Reihe:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$



Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine Maclaurinsche Reihe und berechnen Sie den Konvergenzradius

Aufgabe 1: $f(x) = e^{x}$

Aufgabe 2: $f(x) = e^{-x}$

Aufgabe 3: $f(x) = \cos x$

Aufgabe 4: $f(x) = \sin x$

Aufgabe 5: $f(x) = e^{i\varphi}$

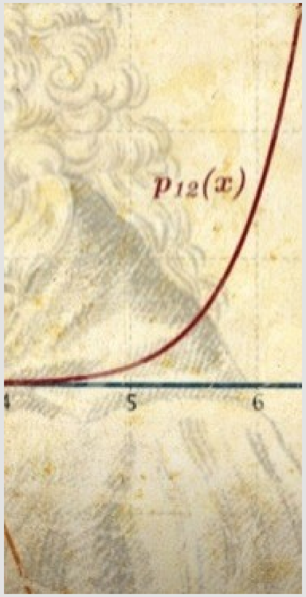
Aufgabe 6: $a)\ f(x) = \cosh x$, $\quad b)\ f(x) = \sinh x$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Aufgabe 7: $f(x) = \sin(x^2)$

Aufgabe 8: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Aufgabe 9: $f(x) = \sin^2 x$



Aufgabe 10: $f(x) = \cos^2 x$

Aufgabe 11: $f(x) = x^2 e^x$

Aufgabe 12: $f(x) = \cos x - \sin(2x)$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = f^{(4)}(x) = \ldots = e^x$$

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = \ldots = 1$$

$$e^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \ldots =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

$$a_n = \frac{1}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!\,(n+1)}$$

Konvergenzbereich:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n!\,(n+1)}{n!} \right| = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty$$

$$f(x) = e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{4}}{4!} + \dots$$

Der n-te Näherungspolynom der Funktion $y = f(x)$ hat die Form:

$$p_{n}(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{x^{m}}{m!} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{4}}{4!} + \dots \frac{x^{n}}{n!}$$

$$p_{1}(x) = \sum_{m=0}^{1} \frac{x^{m}}{m!} = 1 + x, \qquad p_{2}(x) = \sum_{m=0}^{2} \frac{x^{m}}{m!} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!}$$

$$p_{4}(x) = \sum_{m=0}^{4} \frac{x^{m}}{m!} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{4}}{4!}$$

$$p_{5}(x) = \sum_{m=0}^{5} \frac{x^{m}}{m!} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{4}}{4!} + \frac{x^{5}}{5!}$$

$$p_{8}(x) = \sum_{m=0}^{8} \frac{x^{m}}{m!} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{4}}{4!} + \dots + \frac{x^{8}}{8!}$$

In folgenden Abbildungen werden diese Näherungsfunktionen graphisch dargestellt.

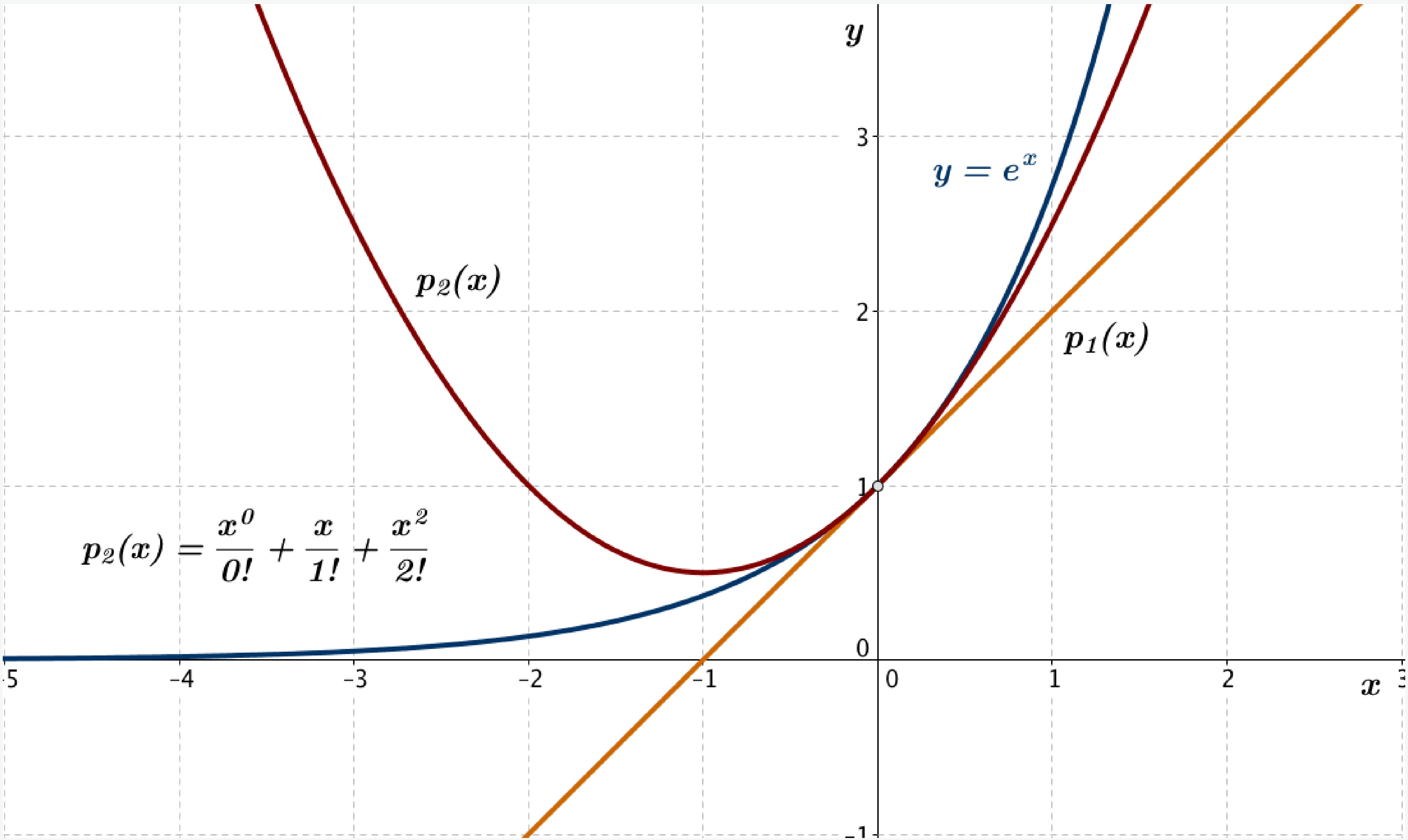


Abb. L1-1: Die Funktion f (x) = exp x und Näherungspolynome 2, 4. und 5. Grades

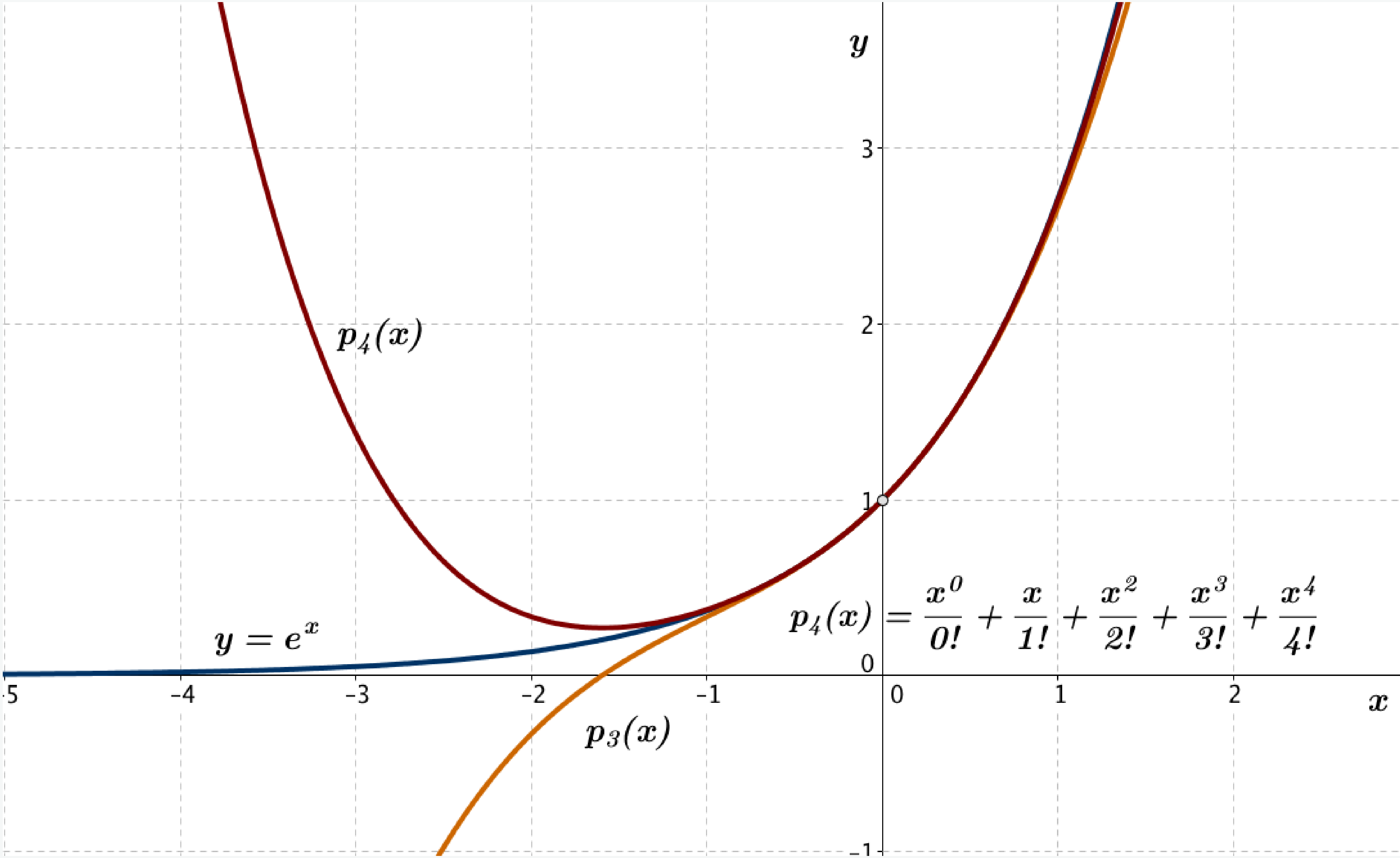


Abb. L1-2: Die Funktion $f(x) = \exp x$ und Näherungspolynome 3. und 4. Grades

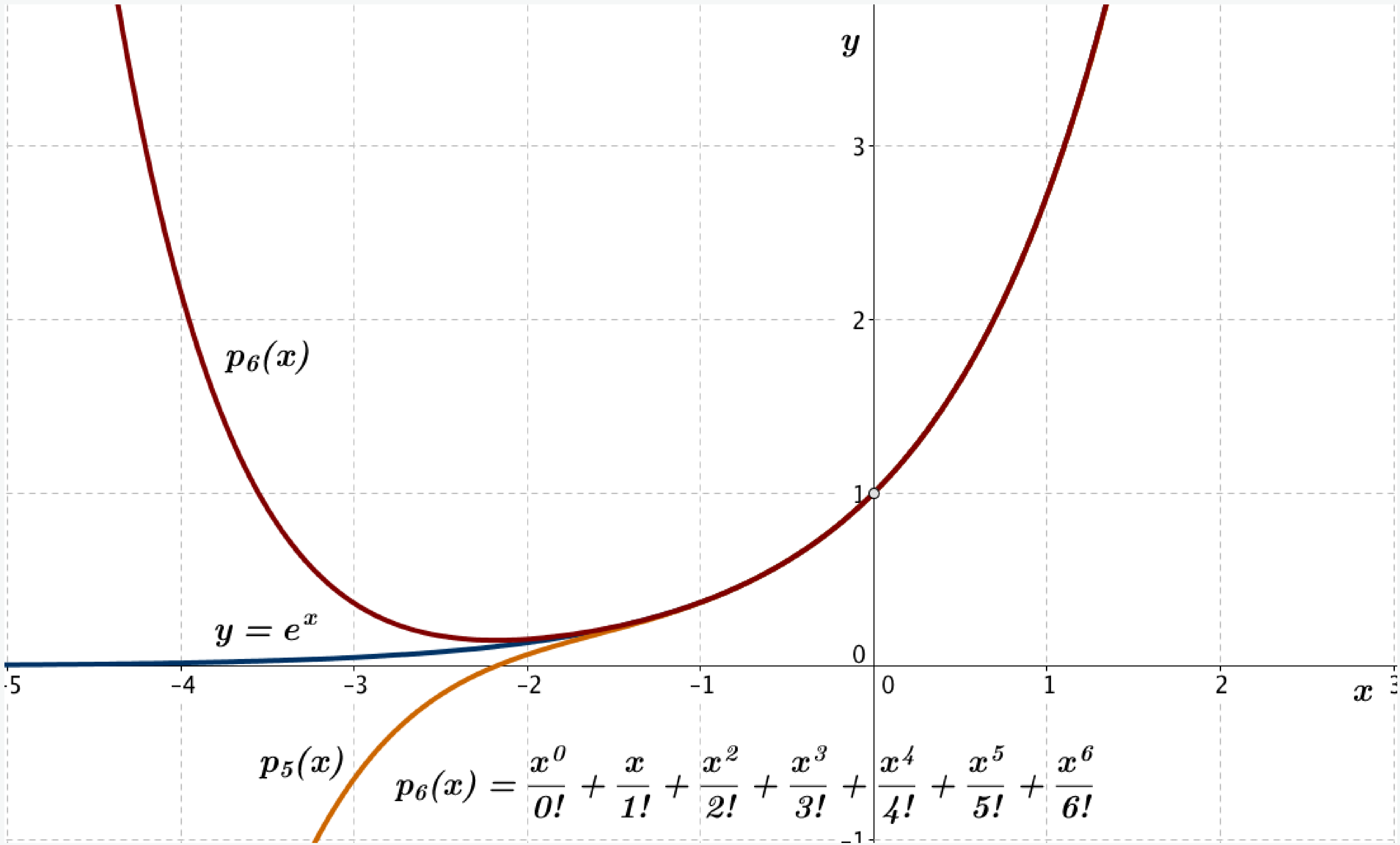


Abb. L1-3: Die Funktion f (x) = exp x und Näherungspolynome 5. und 6. Grades

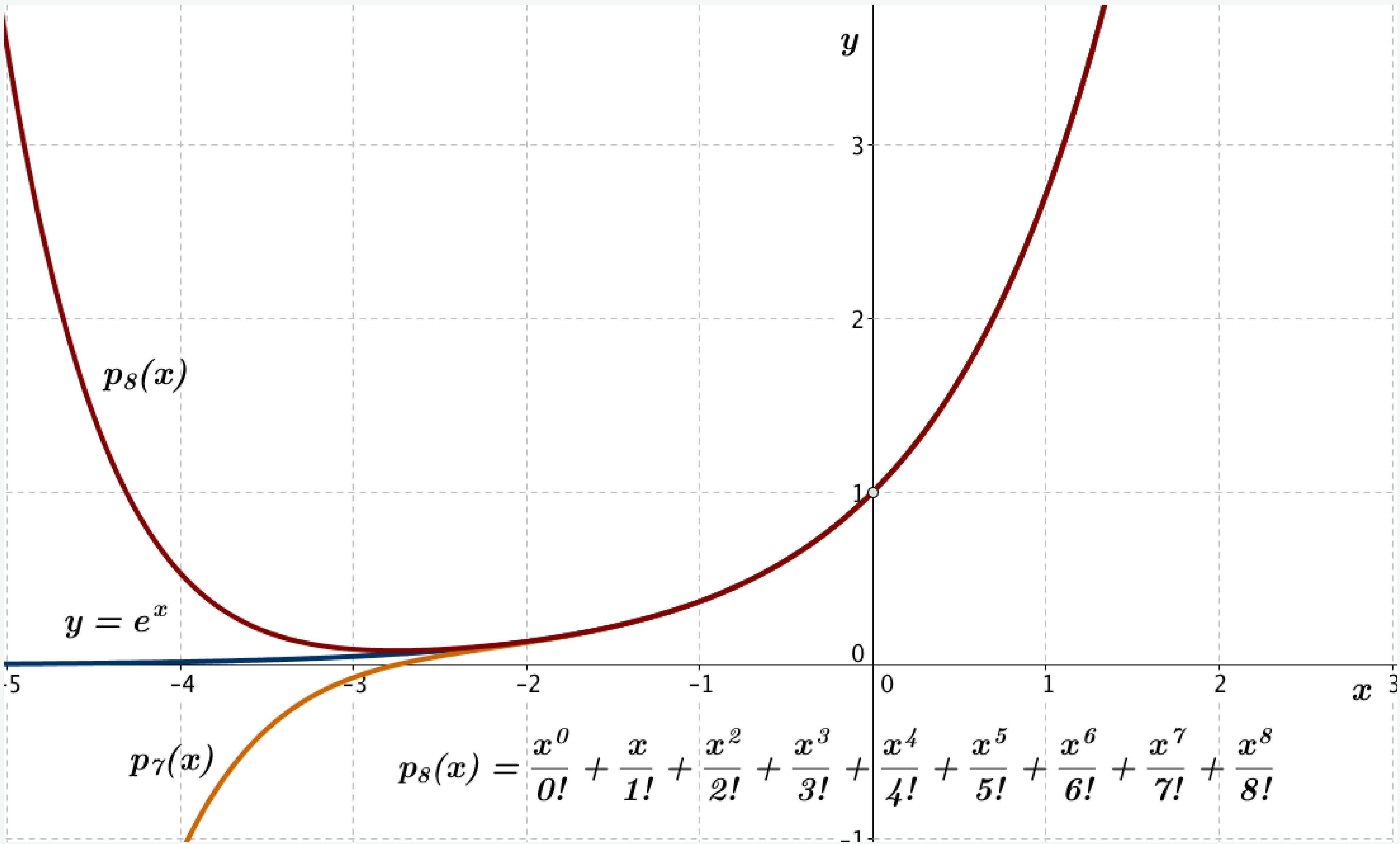


Abb. L1-4: Die Funktion f (x) = exp x und Näherungspolynome 7. und 8. Grades

Ersetzen wir in der Reihenentwicklung von *f (x) = exp (x)* die Variable *x* formal durch - *x*, so erhalten wir die Maclaurinsche Reihe von *f (x) = exp (–x)*

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

5. und *9*. Partialsummen der Maclaurinschen Reihe von *exp (–x)* sind

$$p_5(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120}$$

$$p_9(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \ldots - \frac{x^9}{362880}$$

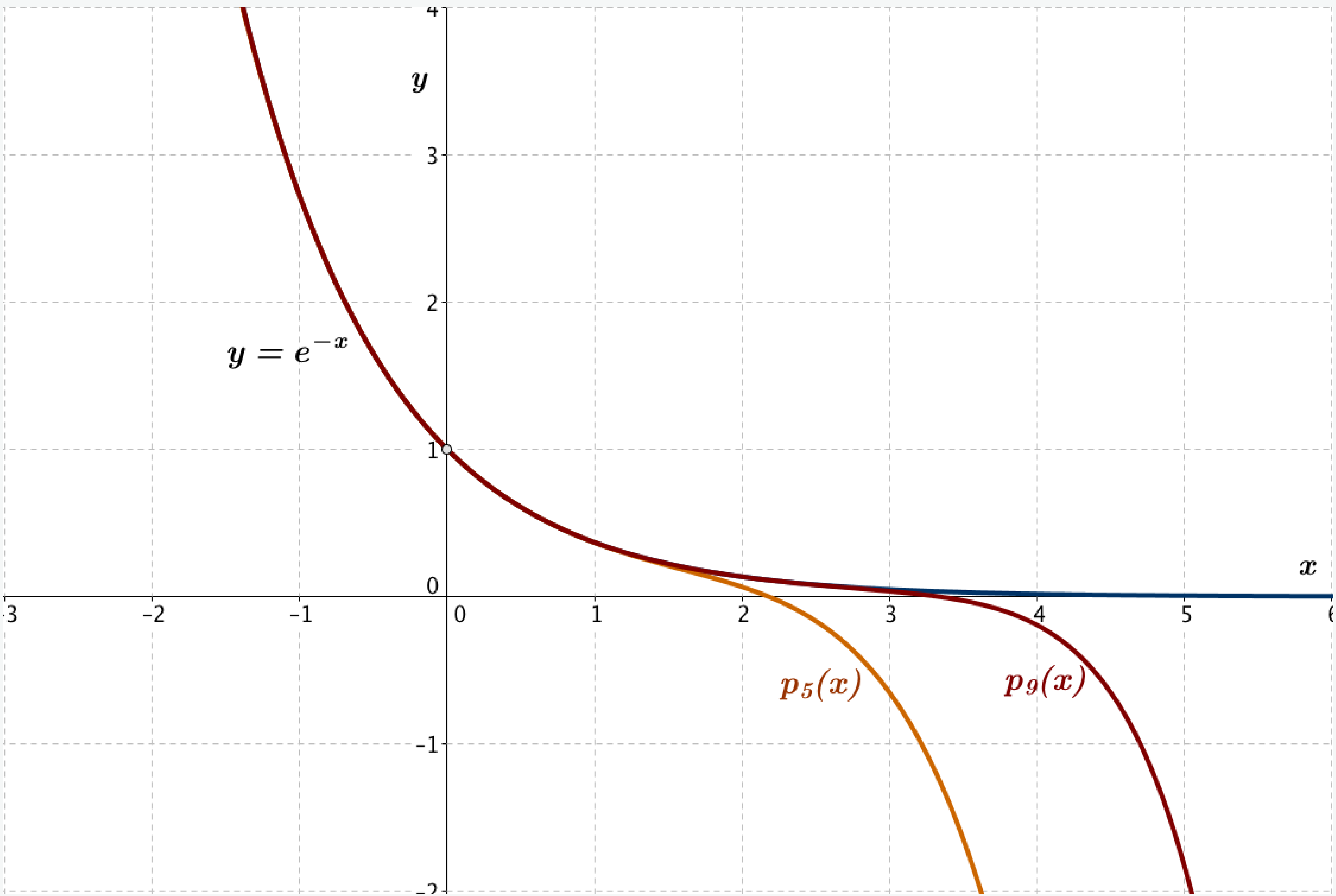


Abb. L2-1: Die Funktion f (x) = exp (- x) und Näherungspolynome 5. und 9. Grades

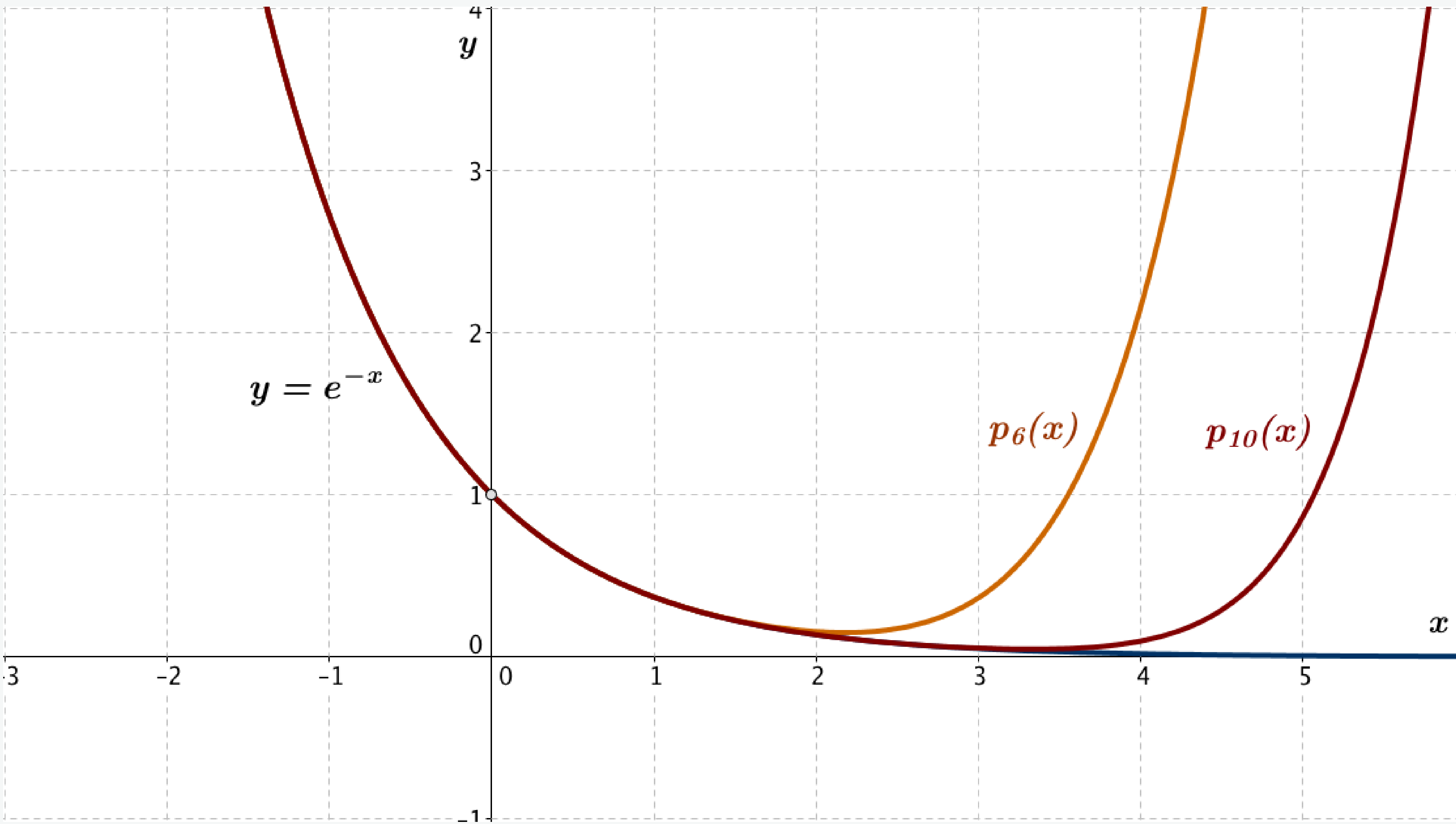


Abb. L2-2: Die Funktion f (x) = exp (- x) und Näherungspolynome 6. und 10. Grades

$y = e^{-x}$
$p_{12}(x)$
$p_7(x)$
x

$$f(x) = \cos x , \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x , \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x , \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x , \qquad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = f^{(8)}(x) = f(x) = \cos x , \qquad f^{(4)}(0) = 1$$

$$f^{(5)}(x) = f^{(9)}(x) = f'(x) = -\sin x , \qquad f^{(5)}(0) = 0$$

Ab der vierten Ableitung wiederholen sich die Ableitungswerte.

Die Maclaurinsche Reihe der Kosinusfunktion enthält nur gerade Potenzen.

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

$$|x| < \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r\,, \qquad \textit{falls} \quad a_n \neq 0\,, \quad \textit{ist} \quad a_{n+1} = 0$$

Um den Konvergenzradius zu berechnen, muss man mit einem mathematischen "Trick" die Reihe mit Hilfe der Substitution $t = x^2$ in eine neue Gestalt bringen.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$t = x^2: \qquad 1 - \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{4!} - \frac{t^3}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{(2n)!}$$

Die Reihe in der neuen Variablen t enthält alle Potenzen, ihr Konvergenzradius kann berechnet werden:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \right| = \lim_{n \to \infty} (2n+1)(2n+2) = \infty$$

Die Kosinusreihe konvergiert überall.

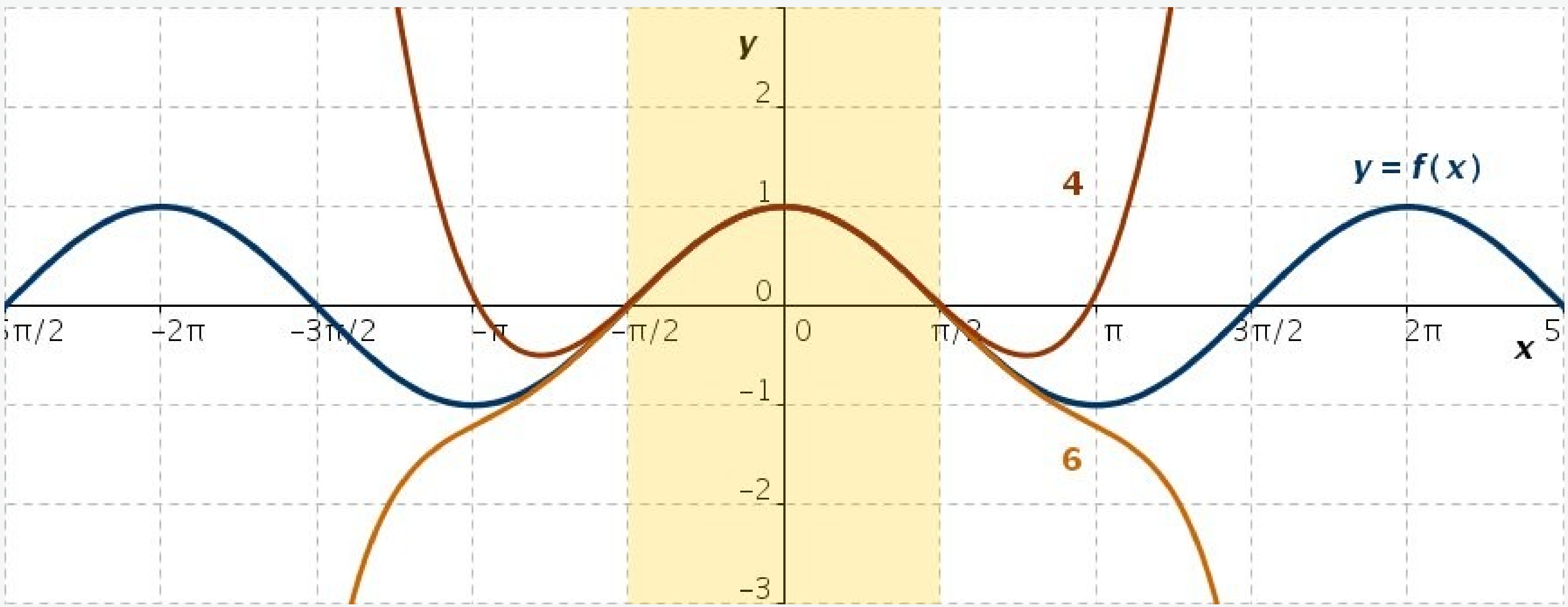


Abb. L3-1: Die Funktion f (x) = cos x und Näherungspolynome 4. und 6. Grades

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$p_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

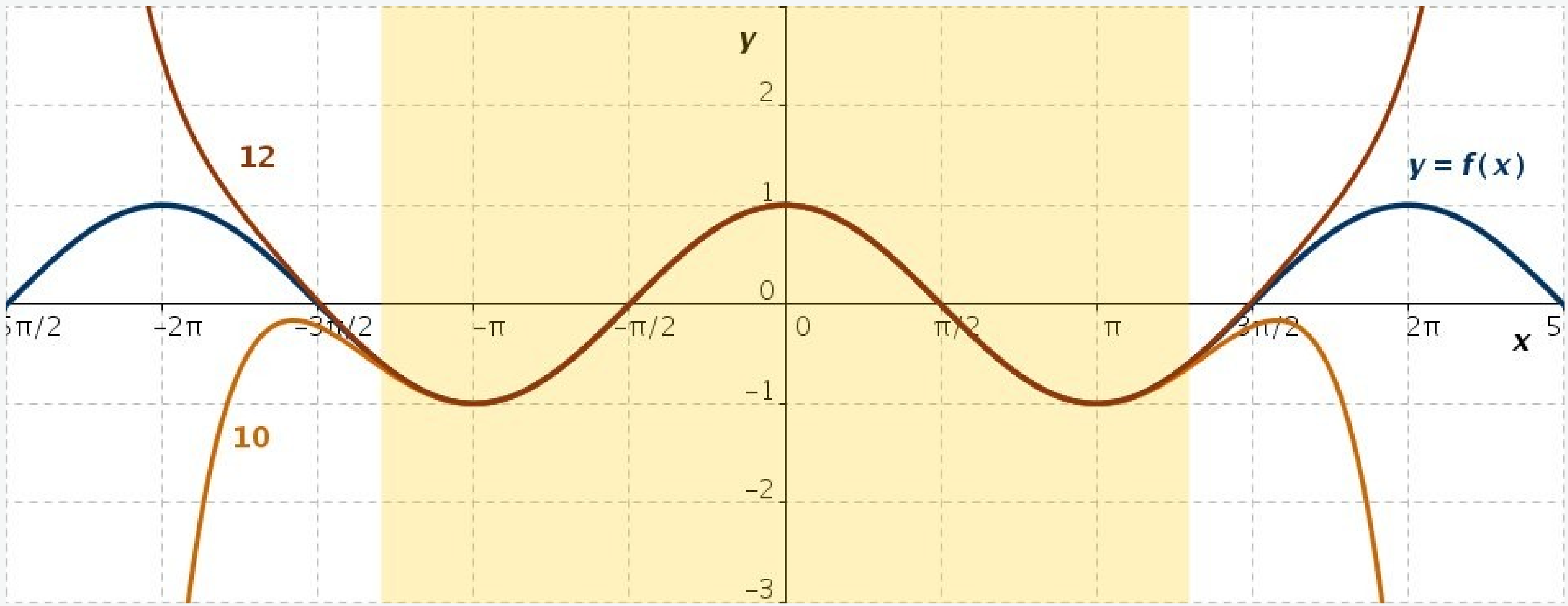


Abb. L3-2: Die Funktion f (x) = cos x und Näherungspolynome 10. und 12. Grades

$$p_{10}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots - \frac{x^{10}}{10!}$$

$$p_{12}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^{12}}{12!}$$

$$y = \sin x$$

Die Maclaurinsche Reihe der Sinusfunktion erhalten wir durch gliedweise Differentiation der Kosinusreihe:

$$\cos' x = -\sin x$$

$$\sin x = -\frac{d}{dx}(\cos x) = -\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

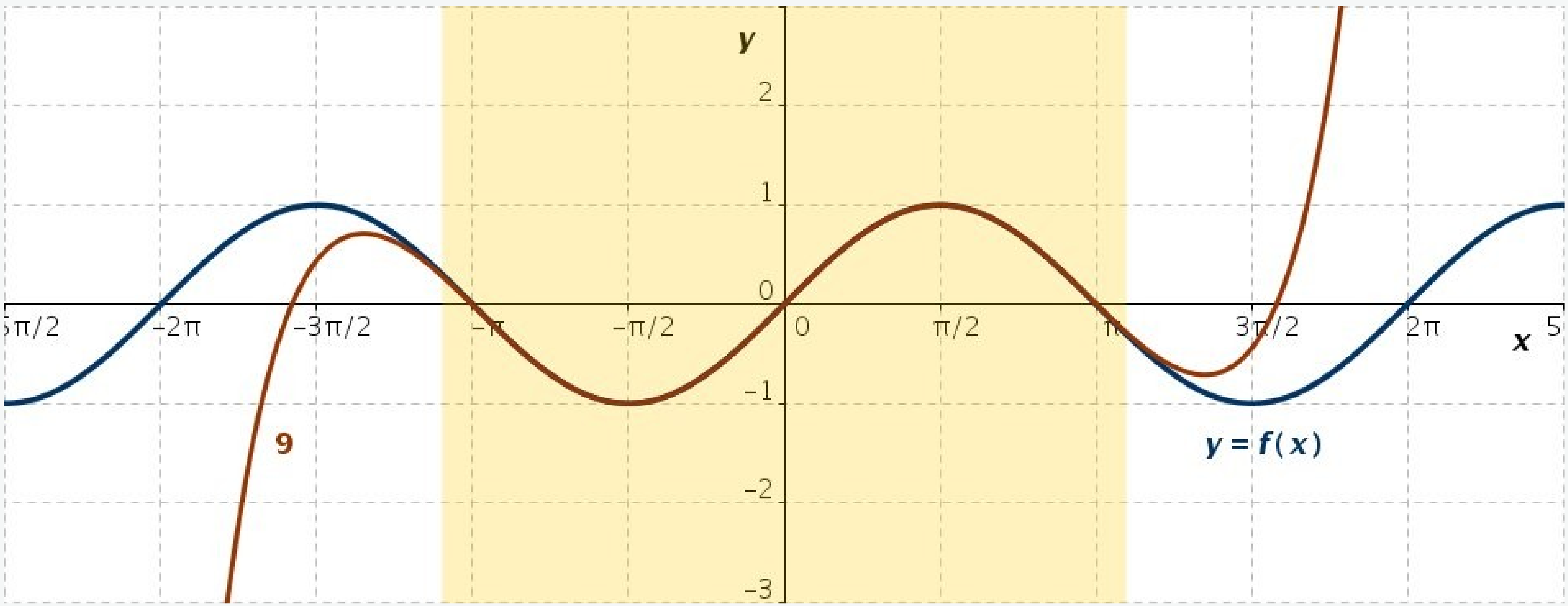


Abb. L4-1: Die Funktion f (x) = sin x und Näherungspolynom 9. Grades

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$p_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^9}{9!}$$

$$f(x) = e^{i\varphi}$$

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} +$$

$$+ \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\varphi)^7}{7!} + \frac{(i\varphi)^8}{8!} + \frac{(i\varphi)^9}{9!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \ldots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} - \ldots\right) =$$

$$= \cos\varphi + i\,\sin\varphi$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

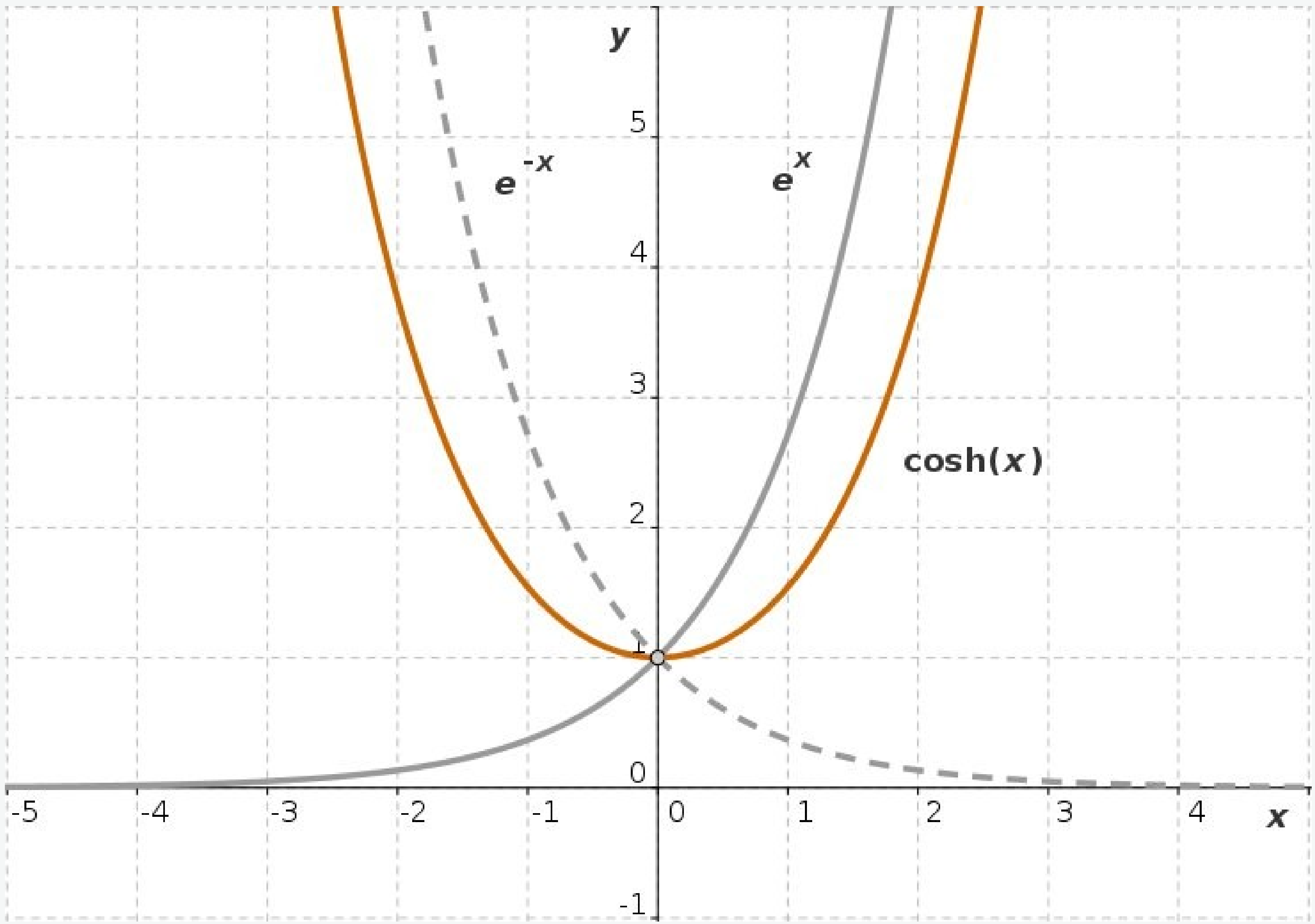


Abb. L6-1: Zur graphischen Darstellung der Funktion y = cosh x

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

$a)$ $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) =$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$b)$ $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) =$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

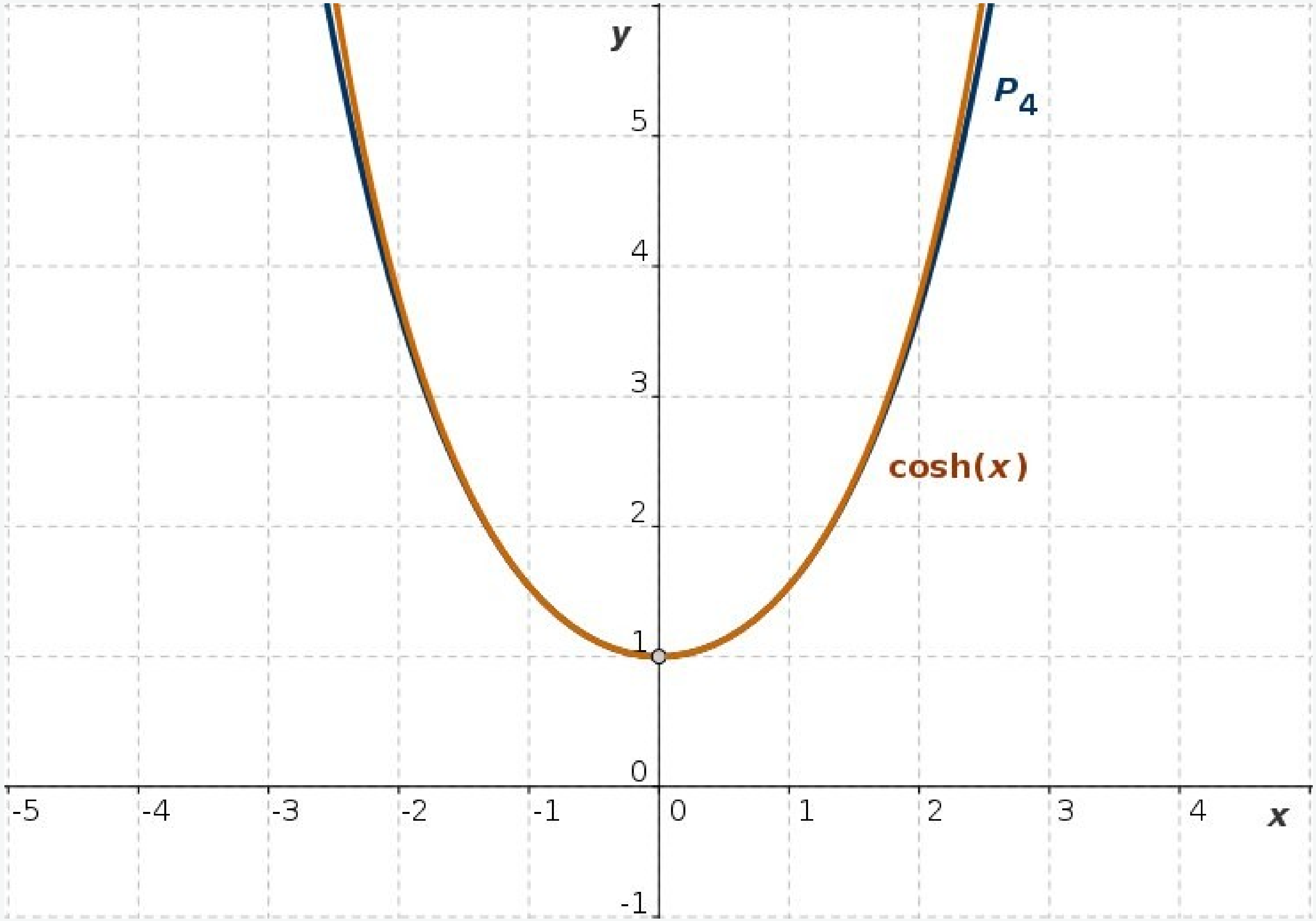


Abb. L6-2: Die Funktion y = cosh x und Näherungspolynom 4. Grades

$$P_4 = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\sin\left(x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+2)!}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

1 Möglichkeit:

$$f(x) = \sin^2 x\,, \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = (\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x = \sin(2x)\,, \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 2\cos(2x)\,, \qquad f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = -4\sin(2x)\,, \qquad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = -8\cos(2x)\,, \qquad f^{(4)}(0) = -8 = -2^3$$

$$f^{(5)}(x) = 16\sin(2x)\,, \qquad f^{(5)}(0) = 0$$

$$f^{(6)}(x) = 32\cos(2x)\,, \qquad f^{(6)}(0) = 32 = 2^5$$

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!}\,x^2 - \frac{2^3}{4!}\,x^4 + \frac{2^5}{6!}\,x^6 + \,\ldots$$

2 Möglichkeit:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\,(1 - \cos(2x))$$

$$\cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \ldots$$

$$1 - \cos(2x) = \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\,(1 - \cos(2x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

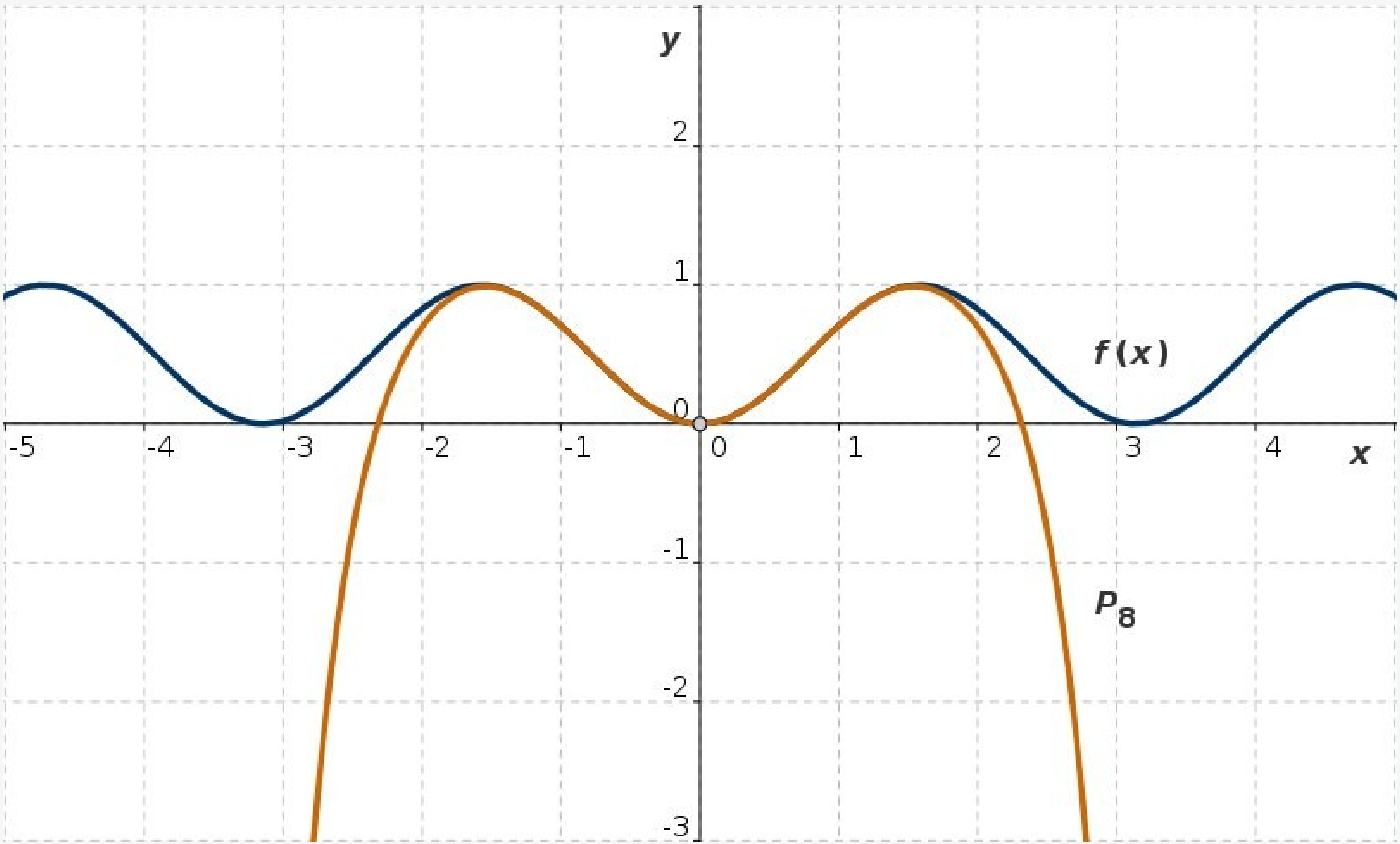


Abb. L8-1: Die Funktion y = f (x) und Näherungspolynom 8. Grades

$$P_8 = x^2 - \frac{1}{3}\, x^4 + \frac{2}{45}\, x^6 - \frac{3}{315}\, x^8$$

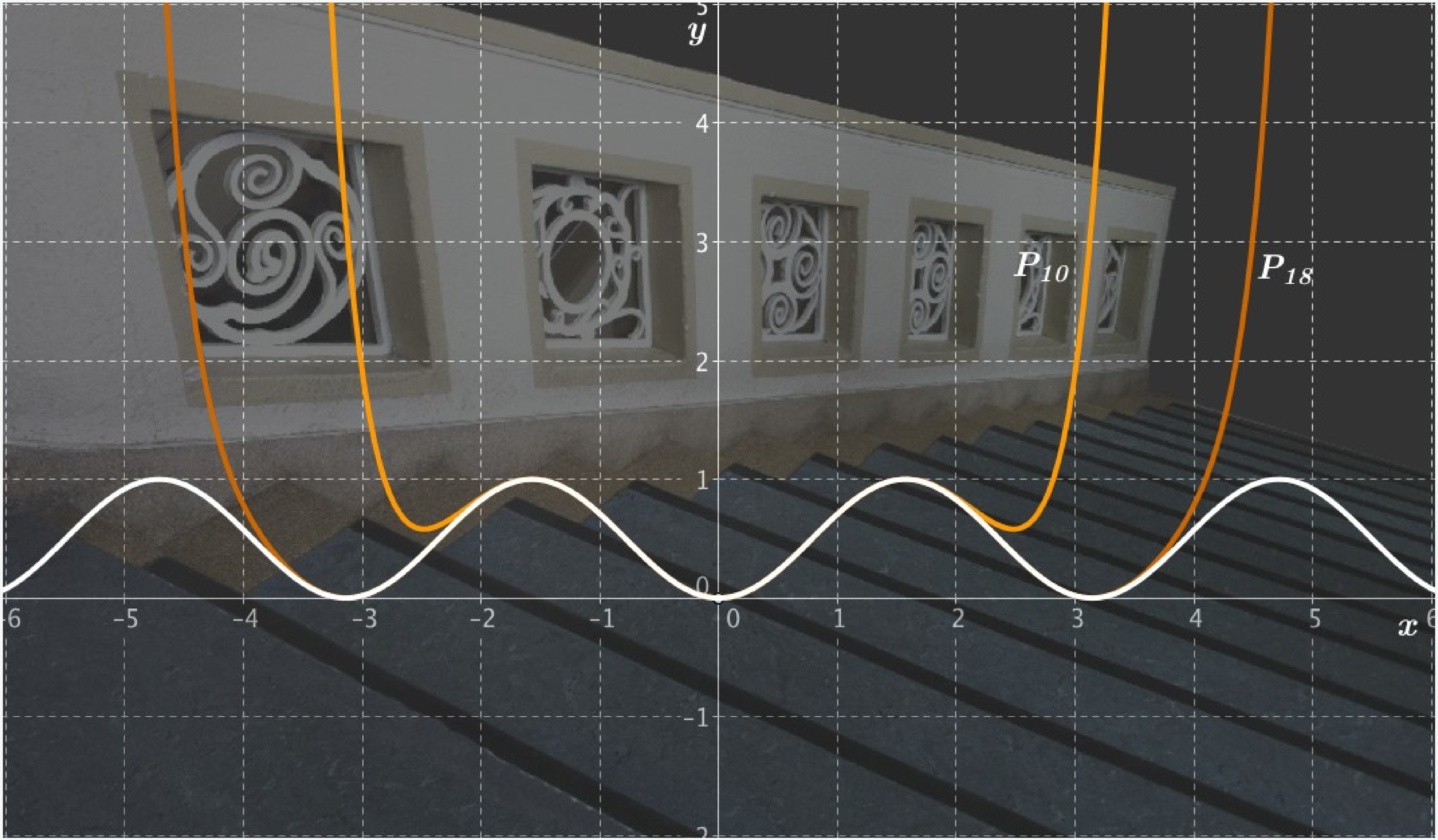


Abb. L8-2: Die Funktion y = f (x) und Näherungspolynome 10. und 18. Grades

Lösung 10:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin(x^2) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$$

Lösung 11:

$$x^2 e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$$

$$f(x) = \cos x - \sin(2x)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ \ldots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\sin(2x) = (2x) - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x - \sin(2x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ \ldots \ -$$

$$- \left((2x) - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \ldots \right)$$

$$= 1 - (2x) - \frac{x^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{(2x)^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \ \ldots$$

$$= 1 - 2x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2^3 x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{2^5 x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{2^7 x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \ \ldots$$

In folgenden Abbildungen werden die Funktion $y = f(x)$ und der Näherungspolynom n. Grades dargestellt

$$f(x) = \cos x - \sin(2x)$$

$$P_7 = 1 - 2x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2^3 x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{2^5 x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{2^7 x^7}{7!}$$

$$P_{20} = 1 - 2x - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{2^{19} x^{19}}{19!} + \frac{x^{20}}{20!}$$

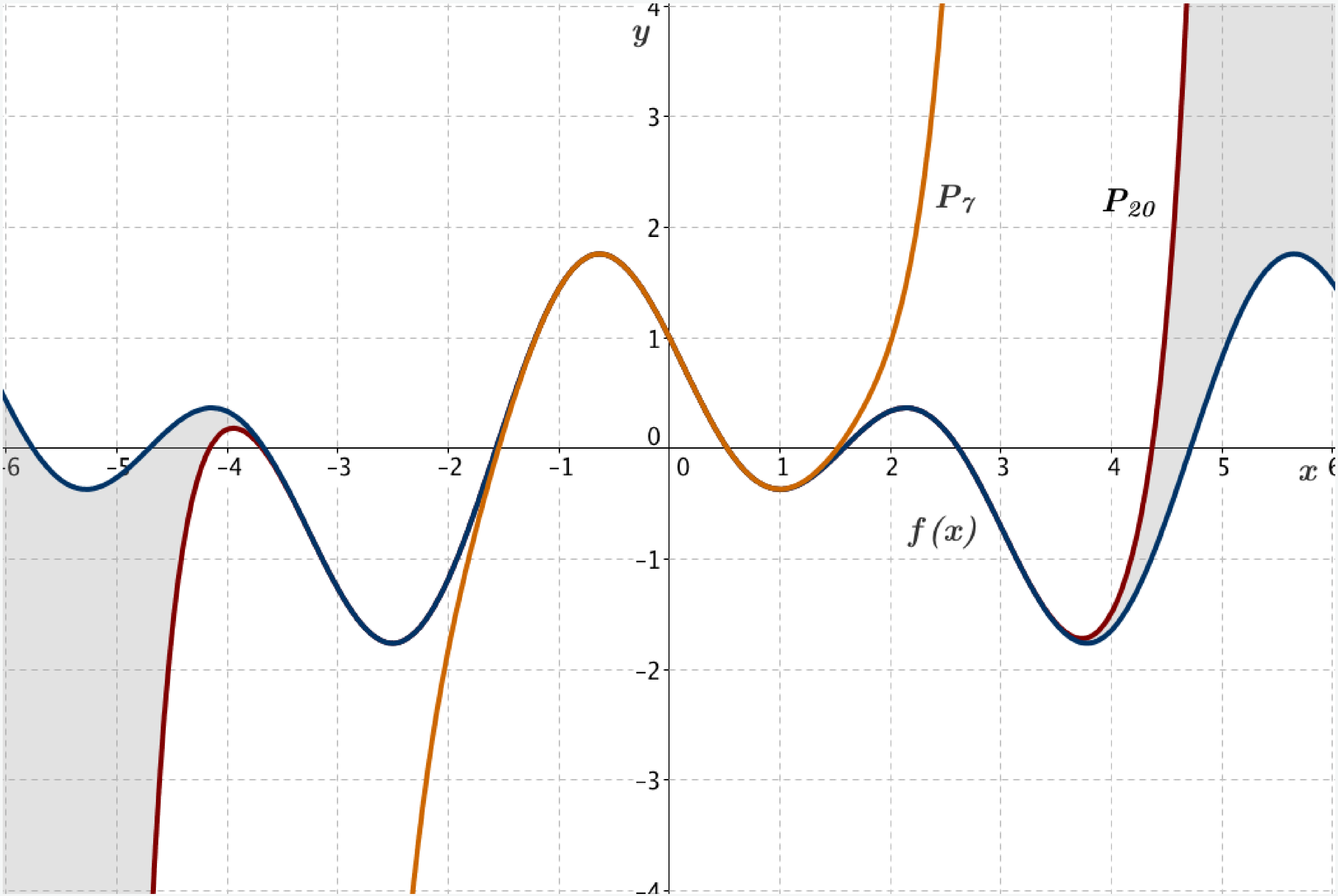


Abb. L12-1: Die Funktion y = f (x) und Näherungspolynom 7. und 20. Grades

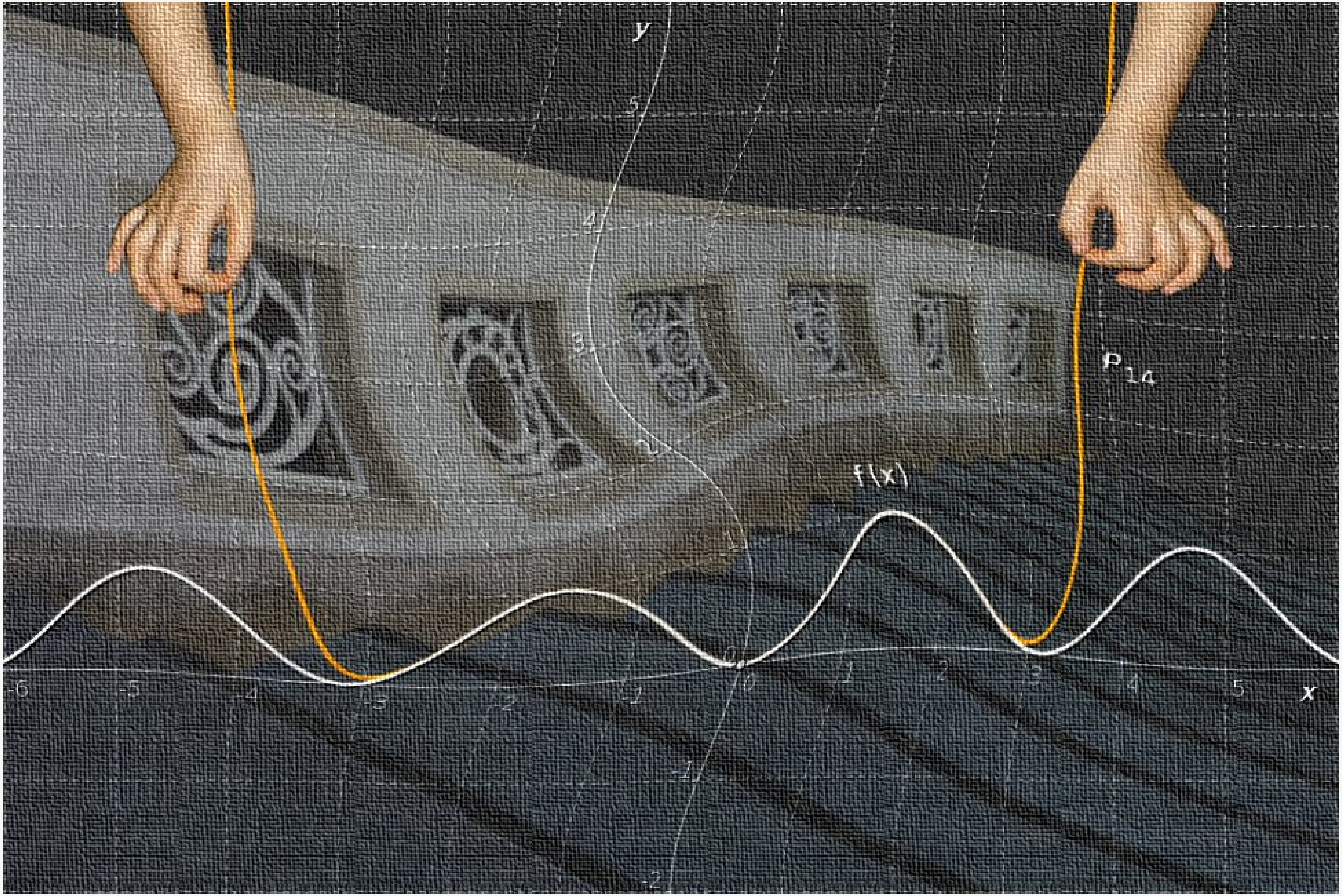


Abb. L12-3: Die Funktion y = f (x) und Näherungspolynom 14. Grades