Die Zeitfunktionen erfüllen die Vorraussetzungen der Fourier-Transformation, so dass die Fouriertransformierten der Funktionen definiert sind.

$$f(t) \to F(\omega) = \Im[f(t)](\omega)$$

$$g(t) \to G(\omega) = \Im[g(t)](\omega)$$

Fouriertransformierten:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \qquad G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Linearität: $\boxed{a\, f(t) + b\, g(t) \to a\, F(\omega) + b\, G(\omega)}$

$$\Im[a\, f + b\, g](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (a\, f(t) + b\, g(t))\, e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt + b \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = a\, F(\omega) + b\, G(\omega)$$

Der Verschiebungssatz macht eine Aussage über die Fouriertransformierte einer zeitlich verschobenen Funktion $f(t-t_0)$.

$$\Im[f(t-t_0)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\, e^{-i\omega t}\, dt \overset{\xi = t - t_0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\omega(\xi + t_0)}\, d\xi =$$

$$= e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\omega\xi}\, d\xi = e^{-i\omega t_0}\, F(\omega)$$

Zeitverschiebung:

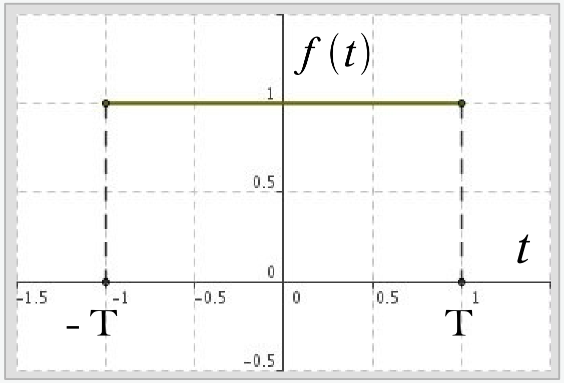
$$\boxed{\Im[f(t-t_0)](\omega) = e^{-i\omega t_0}\, F(\omega)}$$

$$F(\omega) = |F(\omega)|\, e^{i\varphi(\omega)}: \quad \Im[f(t-t_0)](\omega) = |F(\omega)|\, e^{i(\varphi(\omega) - \omega t_0)}$$

Das Spektrum von $f(t-t_0)$ besitzt dieselbe Amplitude wie $f(t)$, nur die Phase ist um ωt_0 verschoben.

Beispiel 1:

Gesucht ist das Spektrum des um $t_0 = T$ verschobenen Rechtecksignals.

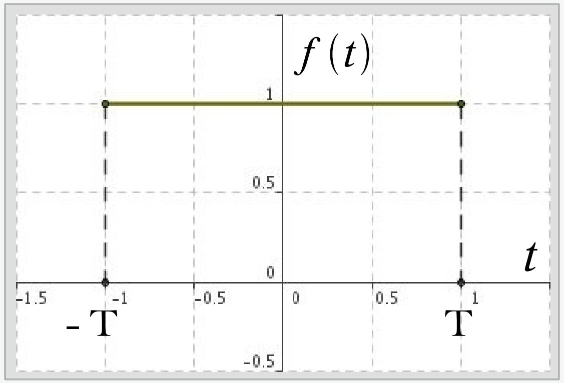


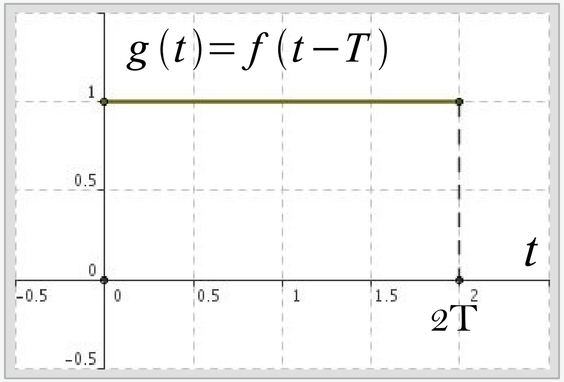
Gesucht ist das Spektrum des um $t_0 = T$ verschobenen Rechtecksignals.

$$f(t) \to F(\omega)$$

$$f(t-T) \to e^{-i\omega T}\, F(\omega)$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$



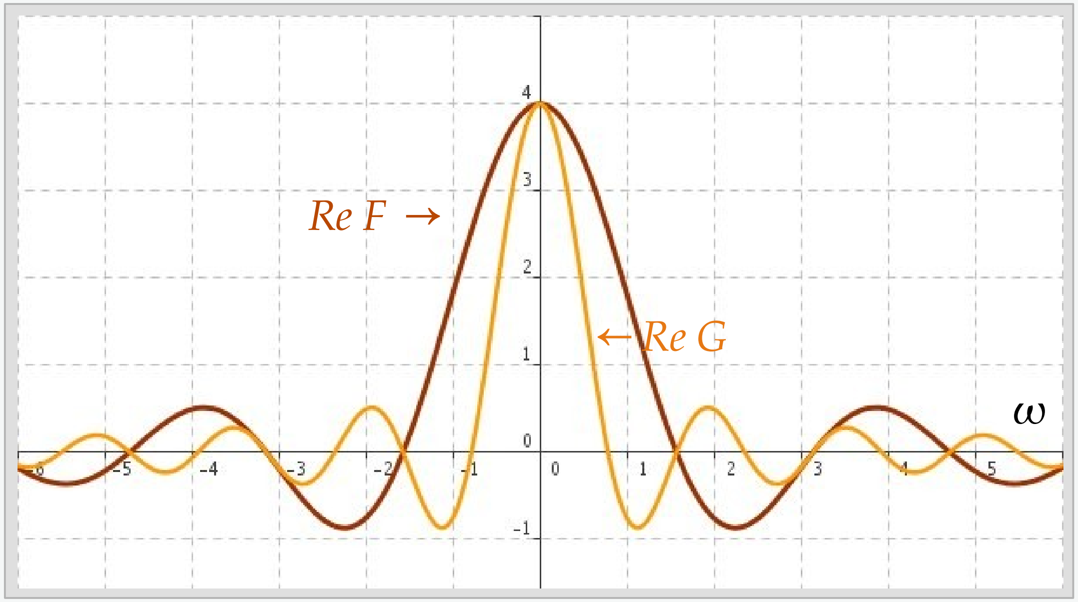


$$f(t) \to F(\omega) = 2\,\frac{\sin(\omega T)}{\omega}$$

$$g(t) \to G(\omega) = e^{-i\omega T}\, F(\omega)$$

$$G(\omega) = F(\omega)\, e^{-i\omega T} = 2\,\frac{\sin(\omega T)}{\omega}\left(\cos(\omega T) - i \sin(\omega T)\right)$$

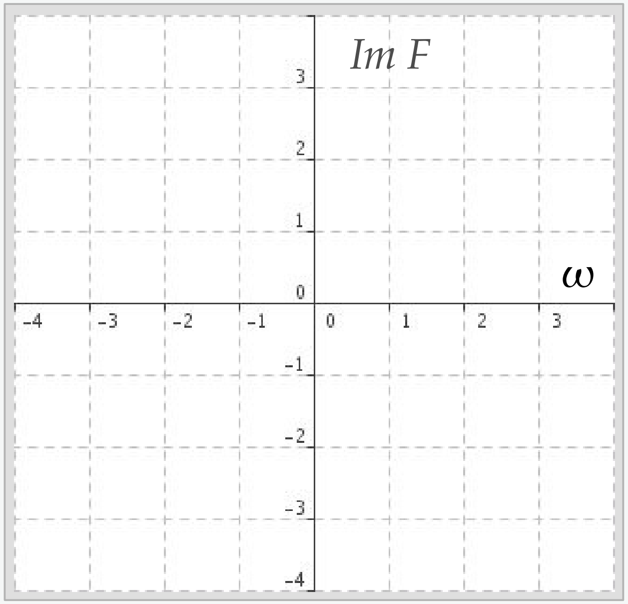
$$= \frac{\sin(2\omega T)}{\omega} - \frac{2i}{\omega}\sin^2(\omega T)$$

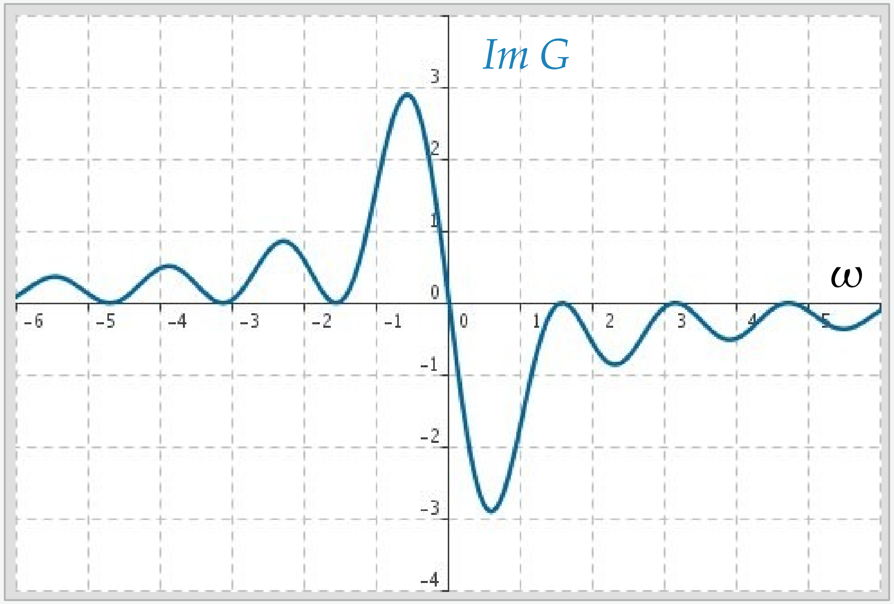


$$\mathrm{Re}\{F(\omega)\} = 2\,\frac{\sin(\omega T)}{\omega}$$

$$\mathrm{Re}\{G(\omega)\} = \frac{\sin(2\,\omega T)}{\omega}$$

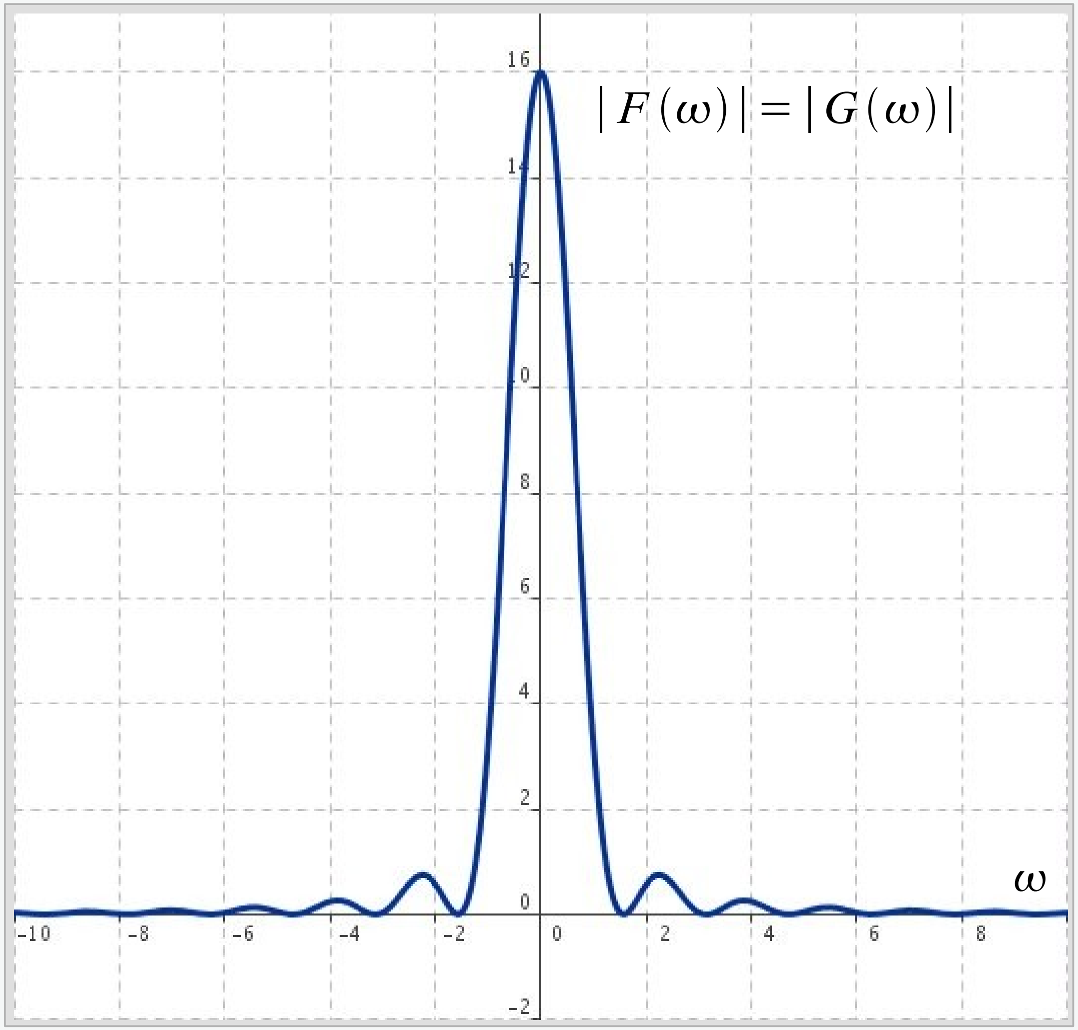
Der Realteil G wird moduliert mit $\cos(\omega T)$.





$$\mathrm{Im}\{G(\omega)\} = -2\,\frac{\sin^2(\omega T)}{\omega}$$

Der Imaginärteil, der vorher 0 war, ist jetzt von 0 verschieden und “ergänzt” den Realteil gerade so, dass $|F(\omega)|$ unverändert bleibt.



Die Gleichung $\quad f(t-T) \rightarrow G(\omega) = e^{-i\omega T} F(\omega)$

beinhaltet nur einen Phasenfaktor, der bei der Betragsbildung irrelevant ist. Solange wir uns nur für $| F(\omega) |$ interessieren, können wir die Funktion f auf der Zeitachse verschieben, wie wir wollen: wir merken nichts davon.

Eine für die Anwendungen wichtige Eigenschaft ist die Frequenzverschiebung. Diese Eigenschaft trifft eine Aussage über das Spektrum der Funktion $e^{i\omega_0 t} f(t)$

$$\Im[e^{-i\omega_0 t} f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i(\omega+\omega_0)t}\, dt = F(\omega+\omega_0)$$

$$\Im[e^{i\omega_0 t} f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i(\omega-\omega_0)t}\, dt = F(\omega-\omega_0)$$

Frequenzverschiebung:

$$\boxed{\Im[f(t)\, e^{-i\omega_0 t}](\omega) = F(\omega+\omega_0), \qquad \Im[f(t)\, e^{i\omega_0 t}](\omega) = F(\omega-\omega_0)}$$

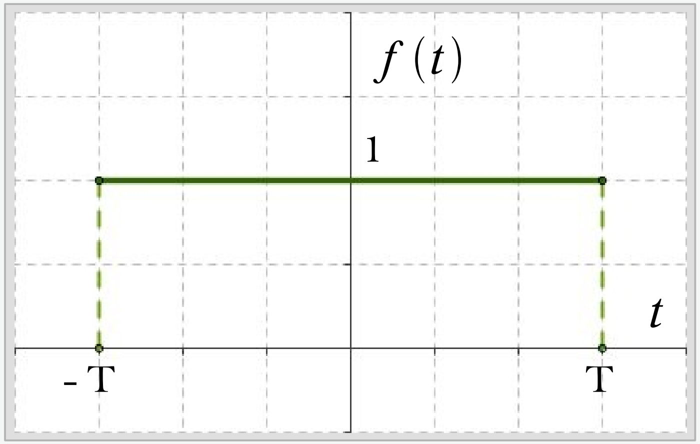
Aufgabe 5:

Gesucht ist das Spektrum eines mit $\cos(\omega_0 t)$ modulierten Rechteckimpulses.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

Gesucht ist das Spektrum eines mit $\cos(\omega_0 t)$ modulierten Rechteckimpulses.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$



Das Spektrum des Rechtecks:

$$f(t) \to F(\omega) = 2\,\frac{\sin(\omega T)}{\omega}$$

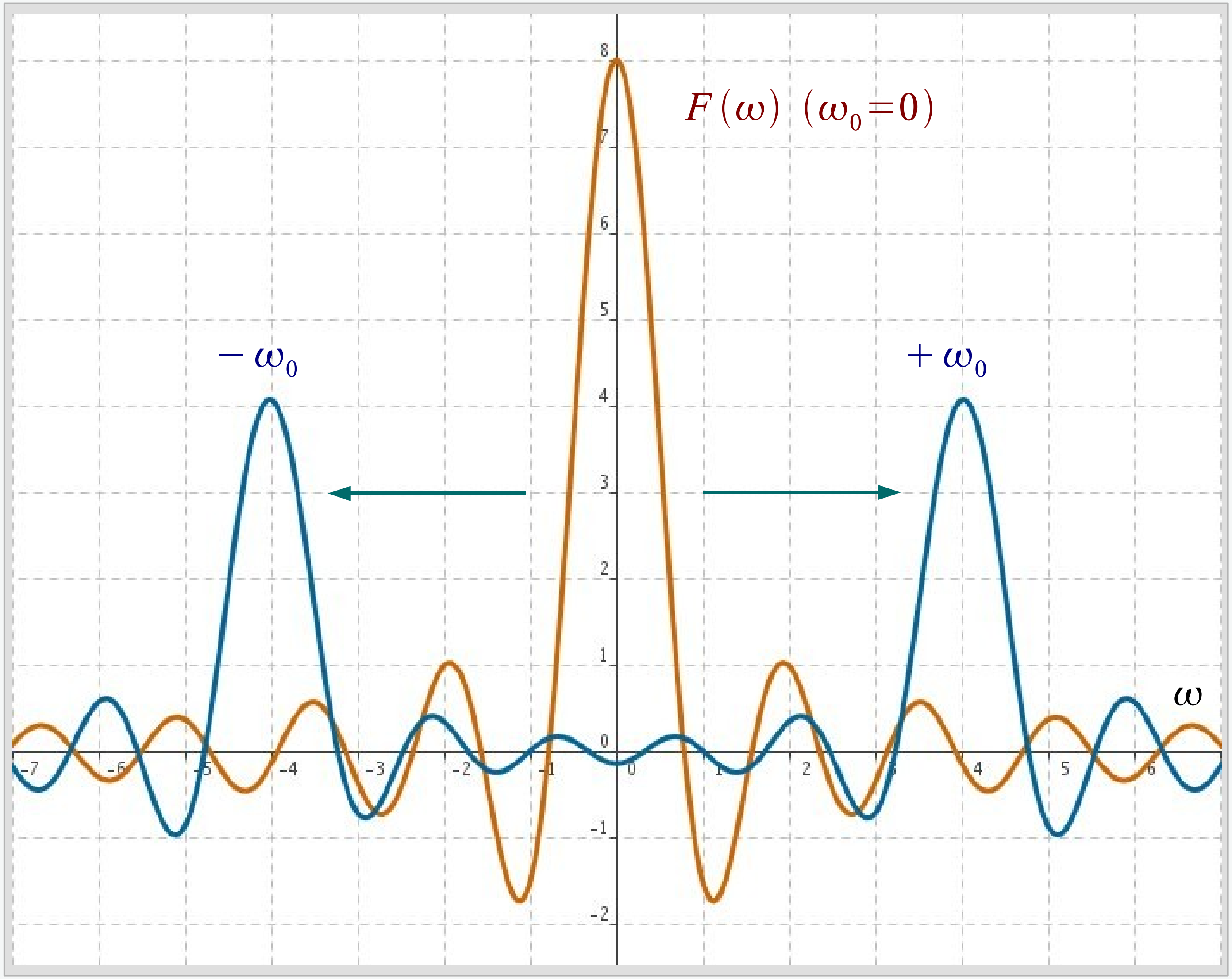
$$\Im[f(t)\cos(\omega_0 t)](\omega) = \frac{1}{2}\left(f(t)\,e^{i\omega_0 t} + f(t)\,e^{-i\omega_0 t}\right) = \frac{1}{2}\left(F(\omega+\omega_0) + F(\omega-\omega_0)\right)$$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)$$

$$\Im[f(t)\,e^{-i\omega_0 t}](\omega) = F(\omega+\omega_0), \qquad \Im[f(t)\,e^{i\omega_0 t}](\omega) = F(\omega-\omega_0)$$

$$\Im[f(t)\cos(\omega_0 t)](\omega) = \frac{\sin((\omega+\omega_0)T)}{\omega+\omega_0} + \frac{\sin((\omega-\omega_0)T)}{\omega-\omega_0}$$

Das mit $\cos(\omega_0 t)$ amplitudenmodulierte Signal besitzt als Spektrum das um $\pm\omega_0$ verschobene Spektrum der ursprünglichen Funktion f.



Die Amplitudenmodulation des Rechtecksignals entspricht einer Verschiebung des Spektrums um die Modulationsfrequenz ω_0 nach rechts und links.