$f(t)$ ist eine nichtperiodische Funktion. Um die Frequenzen in einem beliebigen Zeitsignal zu bestimmen, interpretieren wir die Funktion $f(t)$ als periodische Funktion mit Periode $T \to \infty$.

Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\,\omega_n t}, \qquad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\,\omega_n t}\, dt$$

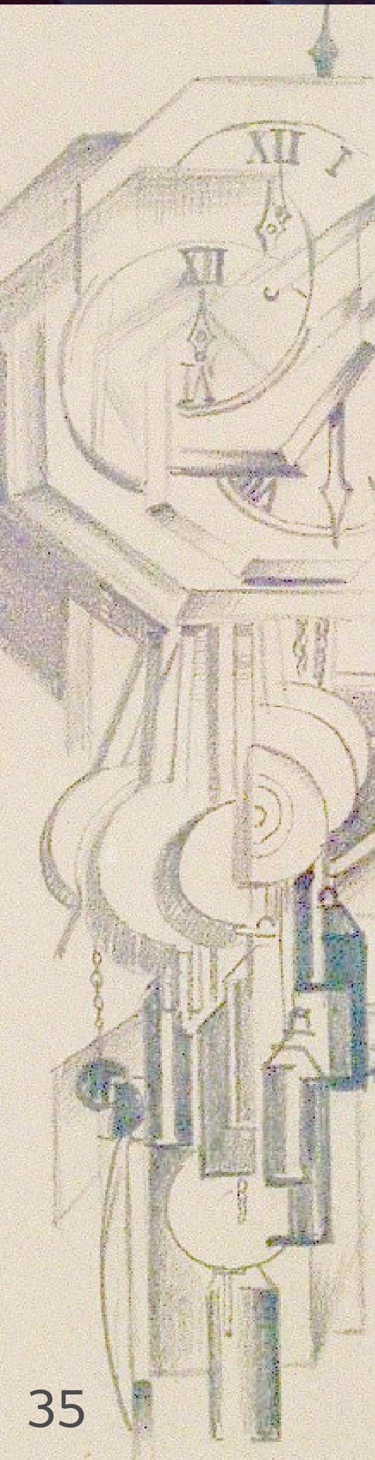
$$\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{2\pi}{T}, \qquad \frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}, \qquad T \to \infty, \qquad \Delta\omega \to 0$$

Setzt man die Koeffizienten c_n in die Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\,\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\,\omega_n t}\, dt \right] e^{i\,\omega_n t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \left[\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f(t)\, e^{-i\,\omega_n t}\, dt \right] e^{i\,\omega_n t} \overset{\Delta\omega \to 0}{\Rightarrow}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$



$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

– Fourierintegral

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

– Fouriertransformierte von f oder Spektralfunktion

Die Fourier-Transformation ordnet jeder Zeitfunktion $f(t)$ eine Frequenzfunktion $F(\omega)$ zu. Die Fourier-Transformation bildet den Zeitbereich auf den Spektralbereich (Frequenzbereich), indem sie der Zeitfunktion $f(t)$ die Spektralfunktion $F(\omega)$ zuweist.

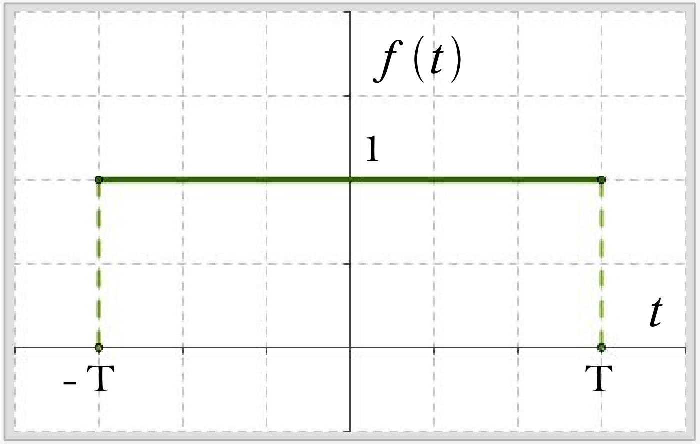
Satz: Fourier-Transformation

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbar und $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$,

dann existiert für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ die Fouriertransformierte von $f(t)$.

Um präzise anzugeben, zu welcher Zeitfunktion $F(\omega)$ gehört, verwendet auch die Notation

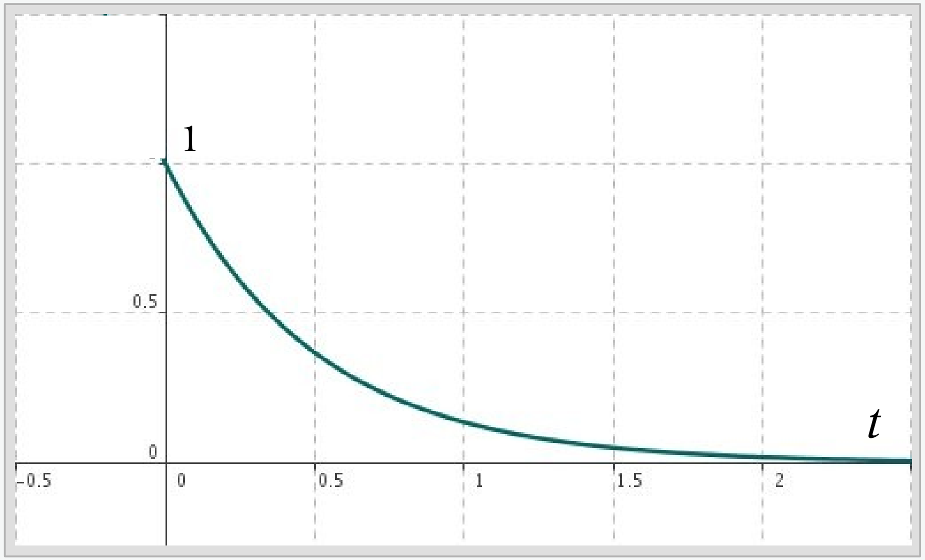
$$\mathfrak{I}[f(t)](\omega) = F(\omega)$$



Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Fouriertransformierte für den Rechteckimpuls.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$



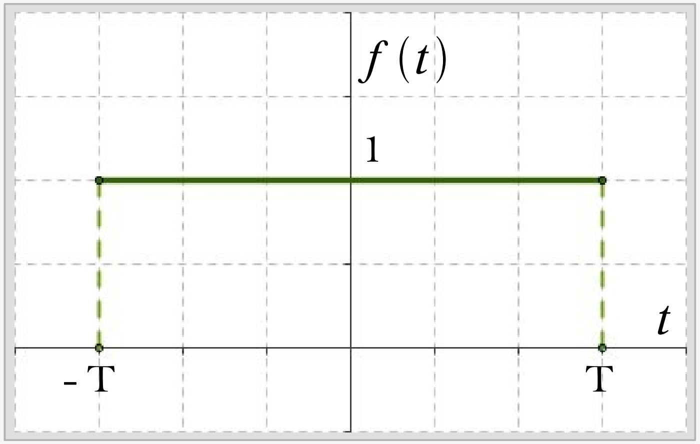
Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Fouriertransformierte für die Exponentialfunktion

$$f(t) = e^{-\alpha t}\, \Theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t,\ \alpha > 0, \end{cases}$$

Sprungfunktion (Heavisidefunktion)

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



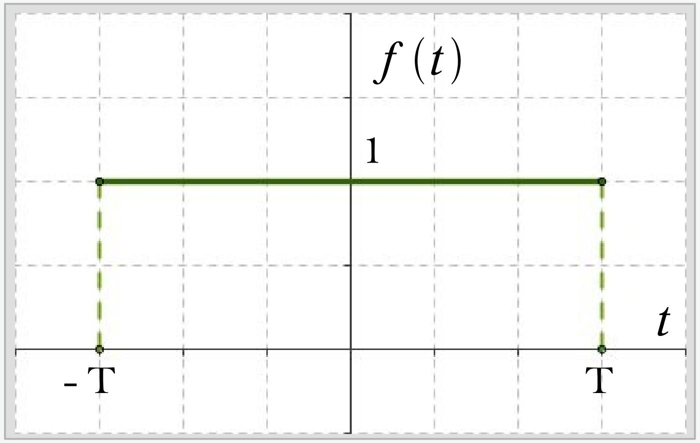
Berechnen Sie die Fouriertransformierte für den Rechteckimpuls.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |\, t \,| < T \\ 0 & |\, t \,| > T \end{cases}$$

$$\mathfrak{I}[f(t)](\omega) = F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int\limits_{-T}^{T} 1 \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \int\limits_{-T}^{T} e^{-i\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-T}^{T} =$$

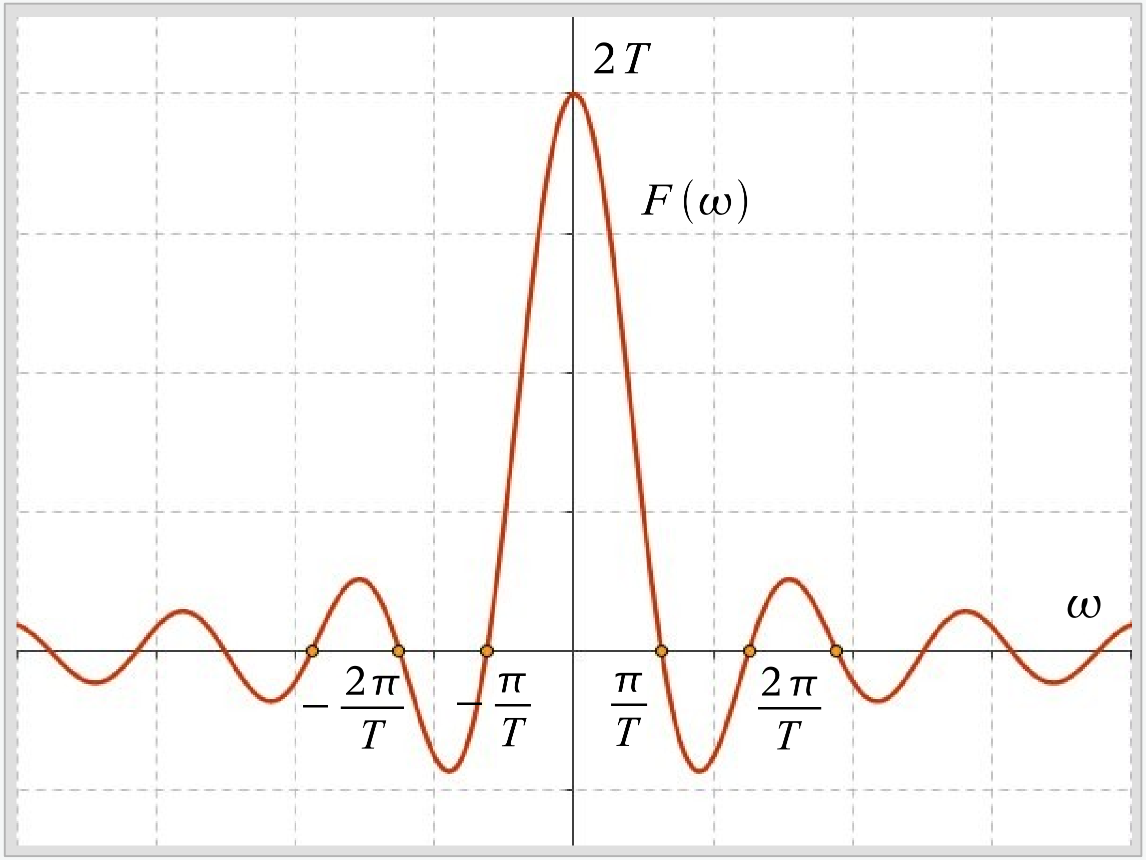
$$= \frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T} \right) = \frac{2}{\omega}\, \frac{e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}}{2i} = \frac{2}{\omega} \sin(\omega T) = 2T\, \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$$

$$\boxed{\sin x = -\frac{i}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix} \right)}$$

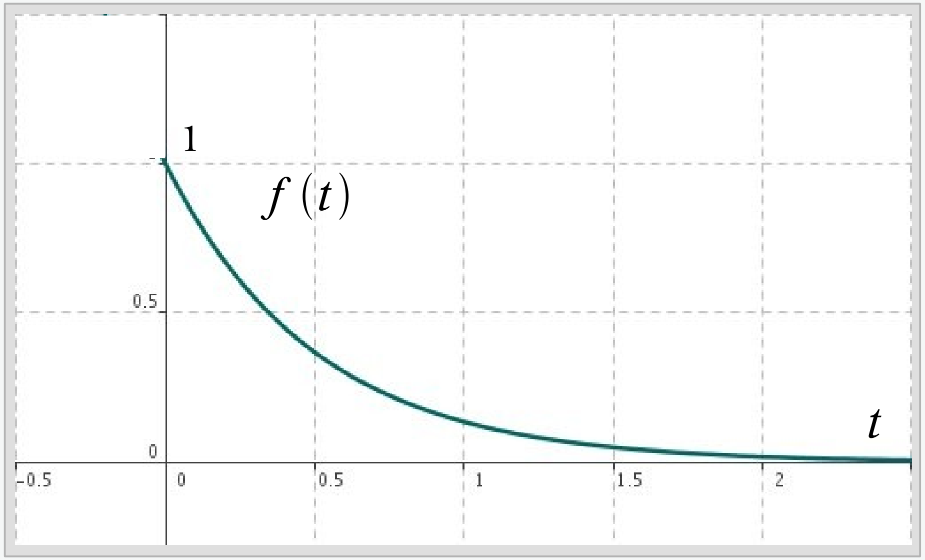


$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

$$F(\omega) = 2T \, \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$$



Lösung 2: Fouriertransformierte der Exponentialfunktion



$$f(t) = e^{-\alpha t}\, \Theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t\,,\ \alpha > 0, \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega) t} dt = -\left[\frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{\alpha + i\omega} \right]_{t=0}^{t=\infty} =$$

$$= -\lim_{t \to \infty} \frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{\alpha + i\omega} + \frac{1}{\alpha + i\omega} = 0 + \frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{\alpha - i\omega}{(\alpha + i\omega)(\alpha - i\omega)} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{i\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\boxed{F(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega}}$$

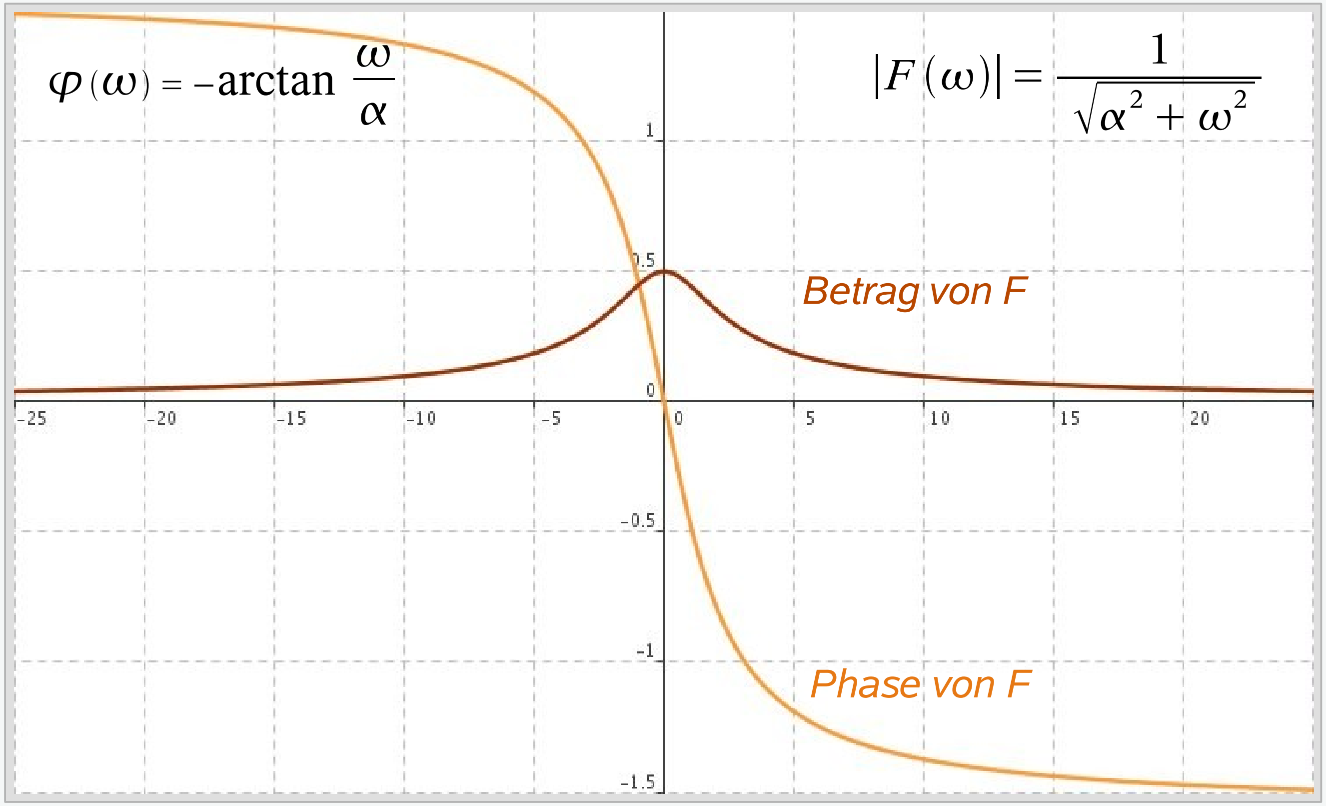
An diesem Beispiel erkennt man, dass die Fouriertransformierte einer Zeitfunktion im Allgemeinen komplex ist.

$$\operatorname{Re} F(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \qquad \operatorname{Im} F(\omega) = \frac{-\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Den Graphen komplexwertiger Funktion kann man nicht direkt zeichnen, sondern man muss entweder Real- und Imaginärteil getrennt darstellen oder man zerlegt die komplexe Funktion in Betrag und Phase

$$F(\omega) = |F(\omega)|\, e^{i\varphi(\omega)} \qquad |F(\omega)| = \sqrt{F(\omega) \cdot F^*(\omega)} \qquad \tan\varphi(\omega) = \frac{\operatorname{Im} F(\omega)}{\operatorname{Re} F(\omega)}$$

Man spricht analog der Bezeichnung bei den Fourier-Reihen auch von Amplituden- und Phasenspektrum.



Bemerkungen:

- Die Fouriertransformierte ist auch für komplexwertige Funktionen
$$f(t) = f_1(t) + i\, f_2(t)$$
definiert. $F(\omega)$ ist im Allgemeinen immer eine komplexwertige Funktion.

- Ist f eine reellwertige Funktion (ein reelles Signal), dann lässt sich die Fouriertransformierte mit der Eulerschen Beziehung
$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$$
auch schreiben als

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)\right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t)\, dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t)\, dt$$

Man spricht von der Kosinus- und Sinustransformierten.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega\, t)\, dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega\, t)\, dt$$

- $f(-t) = f(t)$ $-$ f ist eine gerade Funktion

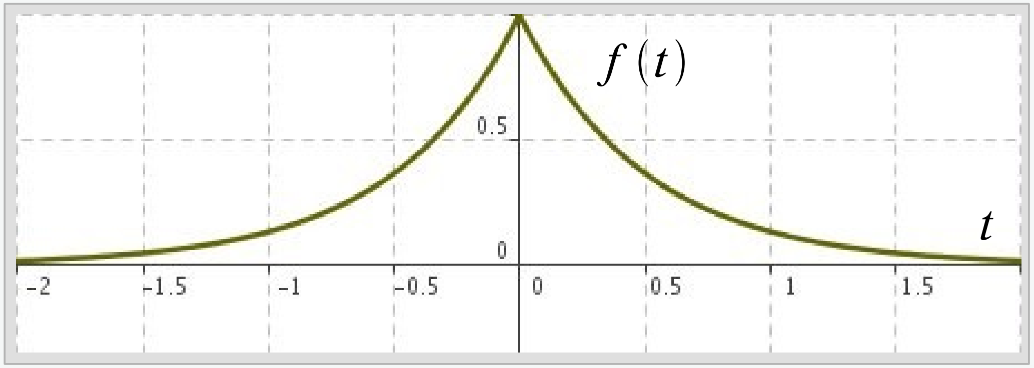
$$F(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega\, t)\, dt$$

- $f(-t) = -f(t)$ $-$ f ist eine ungerade Funktion

$$F(\omega) = -2i\int_{0}^{\infty} f(t)\sin(\omega\, t)\, dt$$

Aufgabe 3: Die Fouriertransformierte von f ist zu berechnen.

$$f(t) = e^{-\alpha |t|} \qquad (\alpha > 0), \qquad f(-t) = f(t)$$

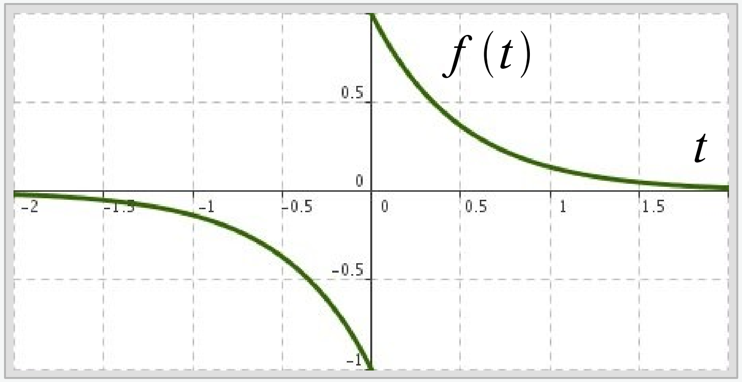


Aufgabe 4: Die Fouriertransformierte von f ist zu berechnen.

$$f(t) = e^{-\alpha |t|}\, sgn(t) \qquad (\alpha > 0)$$

$$f(-t) = -f(t)$$

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & |t| > T \\ 0 & |t| = T \\ -1 & |t| < T \end{cases}$$



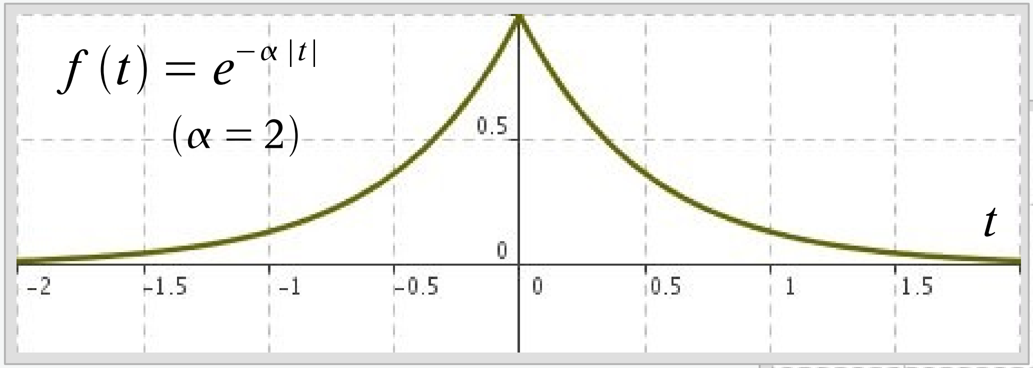
$$F(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(\omega\, t)\, dt = 2\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(\omega\, t)\, dt$$

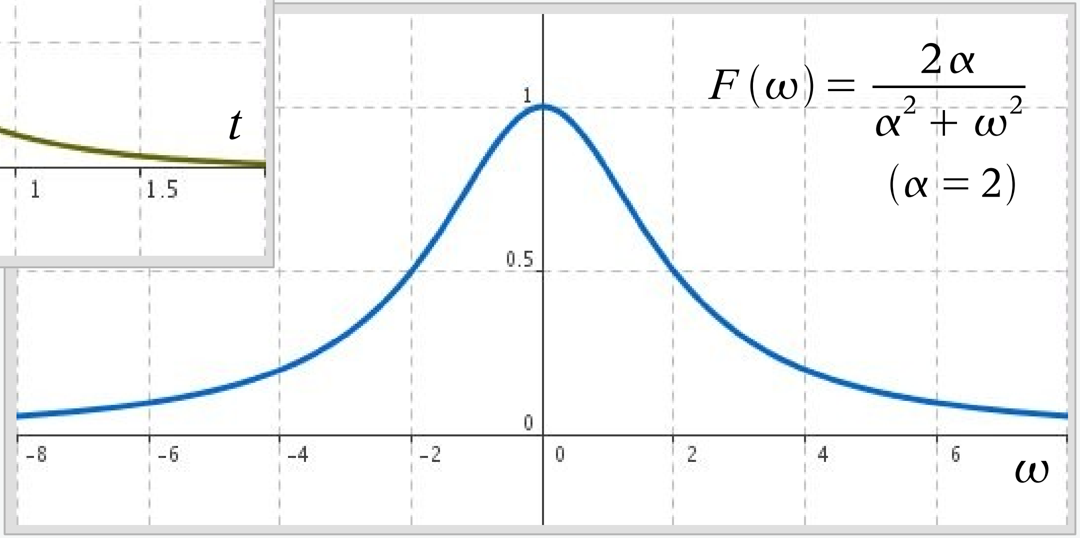
Die Beträge können weggelassen werden, da nur über positive t integriert wird.

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\,(e^{i\omega t})$$

$$F(\omega) = 2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, e^{i\omega t}\, dt = 2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty e^{(-\alpha+i\omega)t}\, dt = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{(-\alpha+i\omega)t}}{-\alpha+i\omega}\right]_0^\infty = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{\alpha-i\omega} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} + \frac{i\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right\} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$





$$F(\omega) = -2i \int_0^\infty f(t) \sin(\omega\, t)\, dt = -2i \int_0^\infty e^{-\alpha t} \sin(\omega\, t)\, dt =$$

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega t) = \mathrm{Im}(e^{i\omega t})$$

$$= -2i\, \mathrm{Im} \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, e^{i\omega t}\, dt = -2i\, \mathrm{Im} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} + \frac{i\,\omega}{\alpha^2+\omega^2} \right\}$$

$$F(\omega) = \frac{-2i\,\omega}{\alpha^2+\omega^2}, \qquad i\,F(\omega) = \frac{2\,\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$