$f(t)$ ist eine periodische Schwingung mit Periode T

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(\omega_n t) + b_n \cdot \sin(\omega_n t) \right]$$

$\omega_0 = 2\pi / T$ – die Frequenz der Grundschwingung

$\omega_n = n\,\omega_0 = 2n\pi / T$ – die Frequenzen der harmonischen Oberschwingungen

Die Fourierkoeffizienten bestimmen dabei die Amplituden der harmonischen Teilschwingungen und damit den Beitrag der Oberschwingungen zum Signal. Zu einer Frequenz $n\,\omega_0$ erhält man zwei Koeffizienten, a_n und b_n, da die Summanden in der Fourierdarstellung die Überlagerung von jeweils zwei harmonischen Sinus- und Kosinusschwingungen gleicher Frequenz darstellen. Ist nach der Amplitude gefragt, mit welcher die Frequenz $n\,\omega_0$ im Signal vorkommt, muss man zu einer anderen Darstellung übergehen.

Hilfsmittel:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

Fourier-Reihe in spektraler Darstellung

$$A_n \cos(\omega_n t - \varphi_n) = A_n \cos(\omega_n t) \cos\varphi_n + A_n \sin(\omega_n t) \sin\varphi_n =$$
$$= a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

$$a_n = A_n \cos\varphi_n, \qquad b_n = A_n \sin\varphi_n$$

$$a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) = A_n \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \tan\varphi_n = \frac{b_n}{a_n}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

A_n – die Gesamtamplitude, mit der die Frequenz $\omega_n = n\,\omega_0$ im Signal vorkommt.

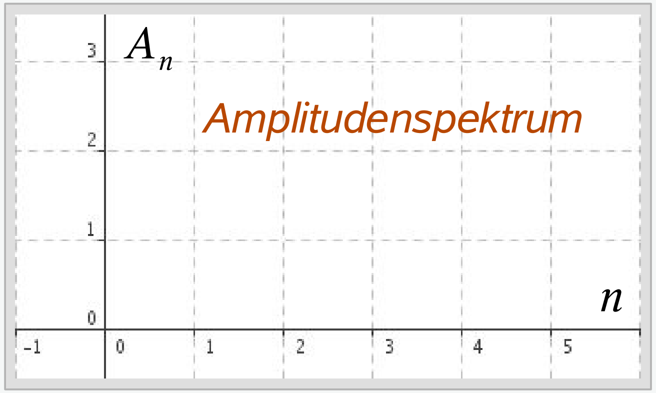
φ_n – die zugehörige Phase

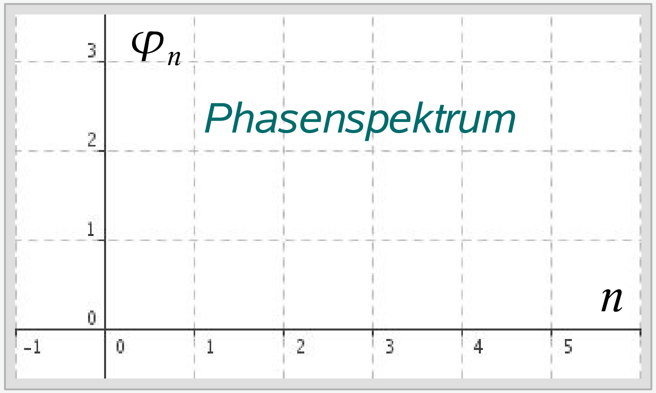
Spektrale Darstellung der Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

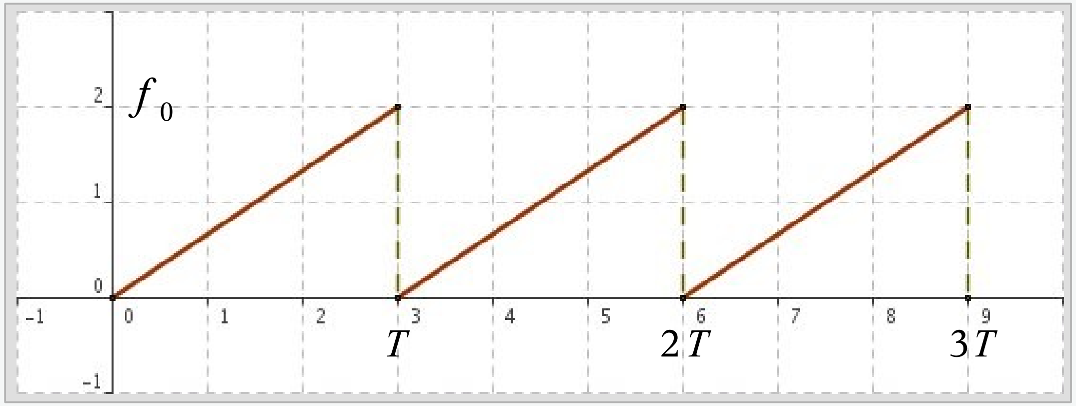
Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass jede Frequenz durch eine Fourier-komponente und nicht durch zwei Fourierkomponenten dargestellt wird.

Zur graphischen Darstellung der Koeffizienten wählt man oft die folgenden Diagramme:





Die Amplituden A_n und die Phasen φ_n werden als Werte über den diskreten Frequenzen abgetragen (= diskretes Spektrum von f).



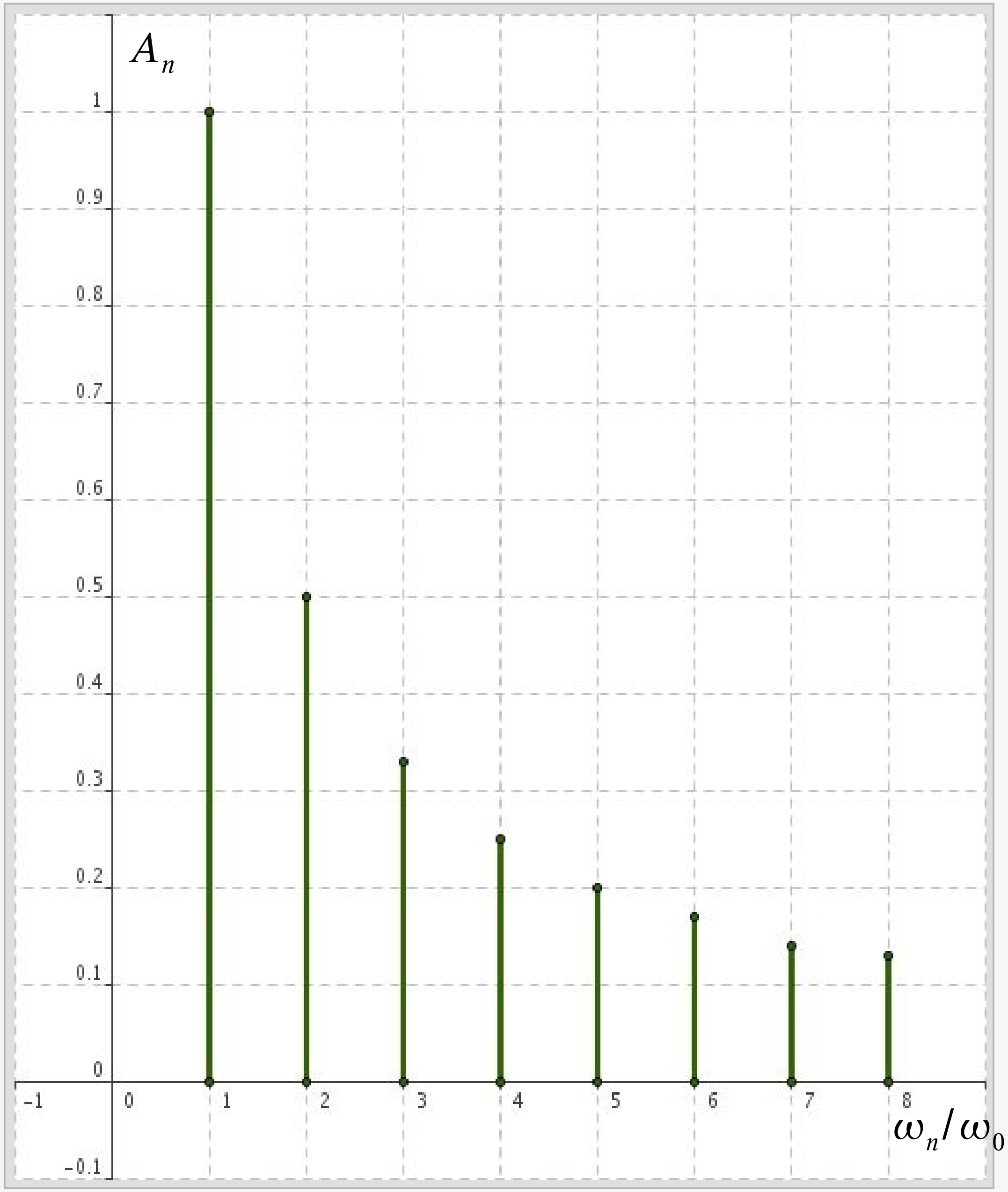
$$f(t) = \frac{f_0}{T}\, t \qquad (0 \leqslant t < T)$$

$$f(t) = \frac{f_0}{2} - \frac{f_0}{\pi}\left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{4}\sin(4\omega_0 t) + \ldots\right]$$

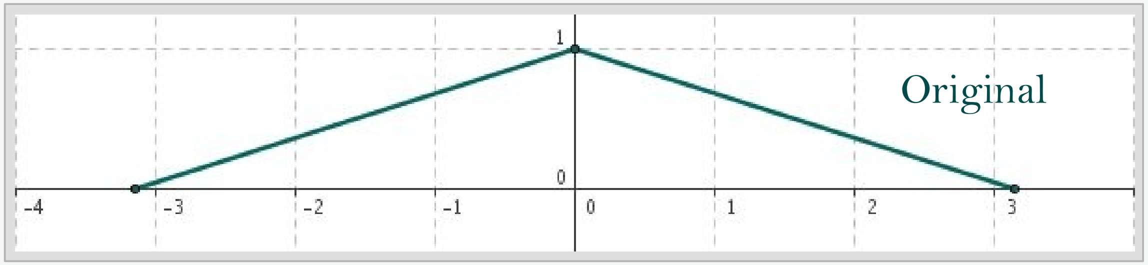
In der Kippspannung sind folgende Komponenten enthalten:

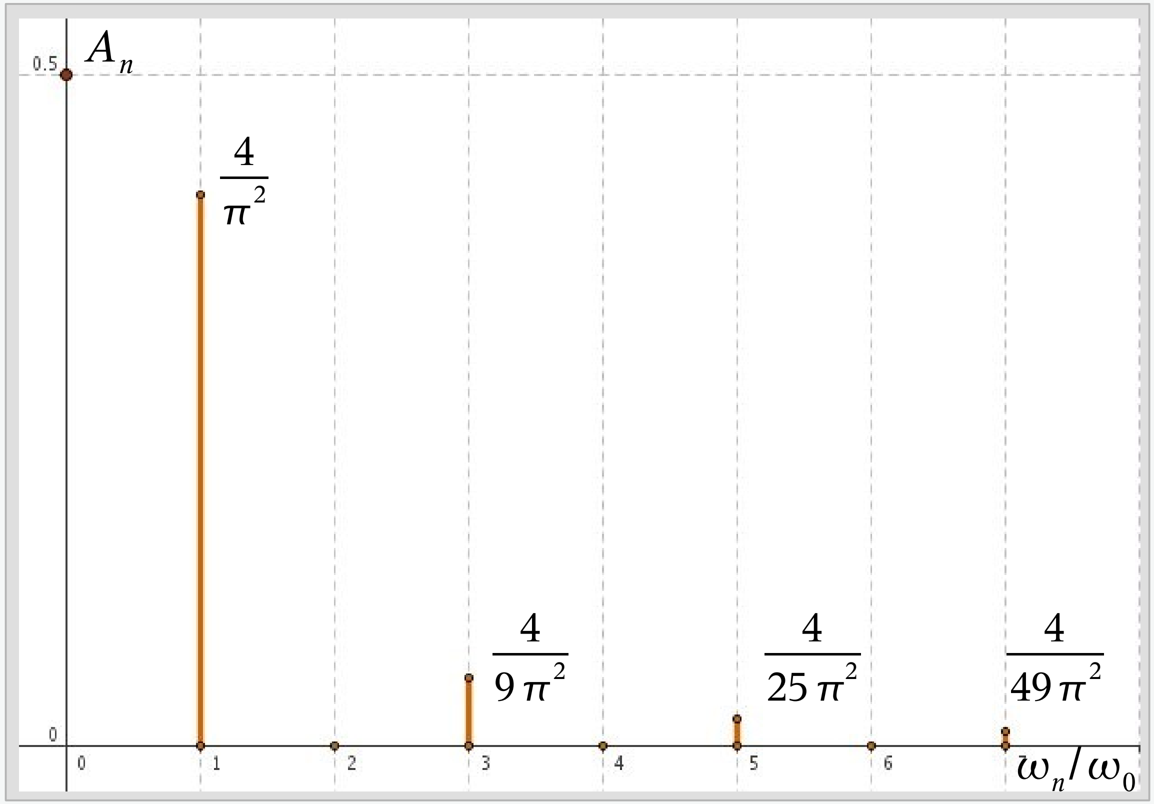
- Der Gleichspannungsanteil $f_0/2$
- Die Grundschwingung mit der Kreisfrequenz ω_0 und der Amplitude f_0/π
- Sinusförmige Oberschwingungen mit den Kreisfrequenzen $2\omega_0,\ 3\omega_0,\ 4\omega_0, \ldots$ und den Amplituden $f_0/2\pi,\ f_0/3\pi,\ f_0/4\pi, \ldots$

Amplitudenspektrum einer Kippspannung



Frequenzplot der Dreieckfunktion $f(x)$





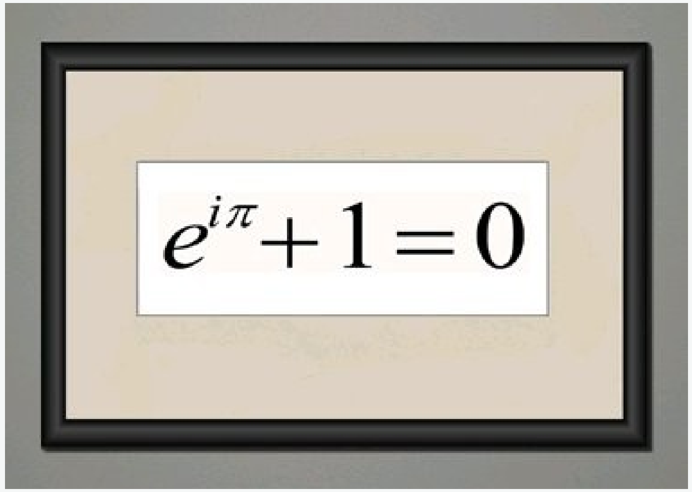
$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\omega_0 t) + \ldots\right)$$

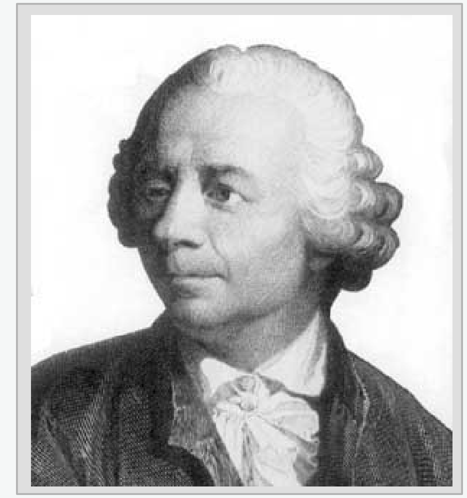
$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^* = r\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

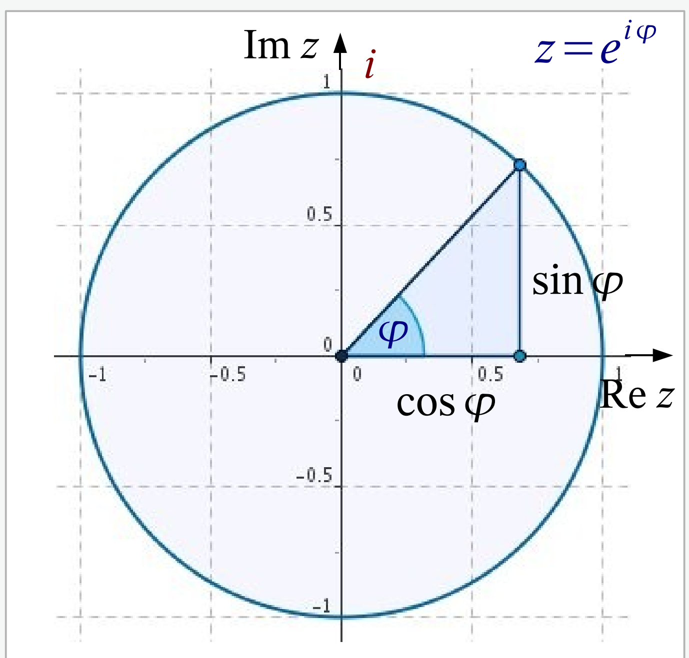
$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = -1$

$z = x + i\,y \qquad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$





Leonhard Euler (1707-1783)



$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$

$$\sin\varphi = -\frac{i}{2}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$

Fourier-Reihe von $f(x)$:

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(\omega_n t) + b_n \cdot \sin(\omega_n t) \right], \qquad \omega_n = n\,\omega_0 = \frac{2\pi n}{T}}$$

$$\cos(\omega_n t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}\right) \qquad \sin(\omega_n t) = -\frac{i}{2}\left(e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}\right)$$

$$a_n \cdot \cos(\omega_n t) + b_n \cdot \sin(\omega_n t) = c_n\, e^{i\omega_n t} + c_{-n}\, e^{-i\omega_n t}$$

$$c_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + i\,b_n}{2}$$

$$n \to -n: \quad a_{-n} \to a_n, \qquad b_{-n} \to -b_n, \qquad c_{-n} \to c_n$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \cdot e^{-i\omega_n t}\right)_{n \to -n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n\, e^{i\omega_n t}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n\, e^{i\omega_n t} + c_{-n}\, e^{-i\omega_n t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\omega_n t}, \qquad c_0 = \frac{a_0}{2}}$$

eine einfache Darstellung

Satz von Fourier: (Komplexe Formulierung)

Sei $f(x)$ eine komplexwertige Funktion mit reeller Periode p. f sei stückweise stetig differenzierbar und erfülle die Mittelwerteigenschaft. Dann konvergiert die komplexe Fourier-Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \, e^{i\,\omega_n t}, \qquad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\,\omega_n t}\, dt, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Bemerkungen:

Es gibt nur eine Summenformel für die Fourier-Reihe und die Koeffizienten c_n werden über eine einheitliche Formel bestimmt.

Um die reelle Schwingung mit reeller Frequenz zu beschreiben, benötigt man in der komplexen Formulierung negative Frequenzen.