Bestimmung der Fourierkoeffizienten

1. $\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\,dx$
2. $\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\,dx$
3. $\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\cdot\cos(m\,x)\,dx$
4. $\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\cdot\cos(m\,x)\,dx$
5. $\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\cdot\sin(m\,x)\,dx$

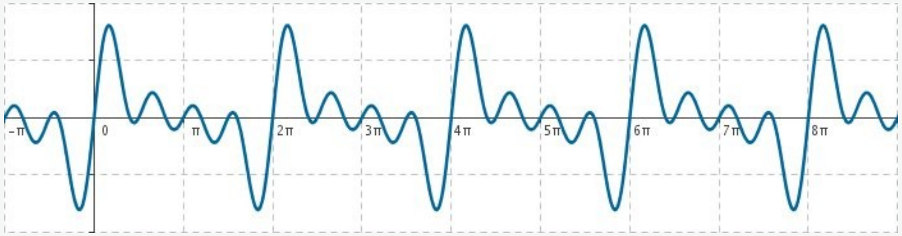
$$\sin\alpha\,\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$$

$$\int \cos^2(a\,x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\sin(2\,a\,x)$$

$$\int \sin^2(a\,x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\sin(2\,a\,x)$$



1. $$\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\,dx = \frac{1}{n}\left[\sin(n\,x)\right]_0^{2\pi} = 0$$

2. $$\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\,dx = -\frac{1}{n}\left[\cos(n\,x)\right]_0^{2\pi} = 0$$

3. $$\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\cos(m\,x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos((n-m)\,x) + \cos((n+m)\,x)\right]dx =$$

$$= \left[\frac{\sin((n-m)\,x)}{2\,(n-m)} + \frac{\sin((n+m)\,x)}{2\,(n+m)}\right]_0^{2\pi} = 0 \qquad (n \neq \pm m)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\cos(m\,x)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2\,n\,x)}{4\,n}\right]_0^{2\pi} = \pi \qquad (n = m)$$

Bestimmung der Fourierkoeffizienten

4. $$\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\cdot\cos(m\,x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\sin((n-m)\,x) + \sin((n+m)\,x)\Big]\,dx = 0$$

5. $$\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\cdot\sin(m\,x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\cos((n-m)\,x) - \cos((n+m)\,x)\Big]\,dx =$$

$$= \left[\frac{\sin((n-m)\,x)}{2\,(n-m)} - \frac{\sin((n+m)\,x)}{2\,(n+m)}\right]_0^{2\pi} = 0 \qquad (n \neq \pm m)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\,\sin(m\,x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2\,n\,x)}{4\,n}\right]_0^{2\pi} = \pi \qquad (n = m)$$

Zusammenstellung von elementaren Sinus- und Kosinusintegralen

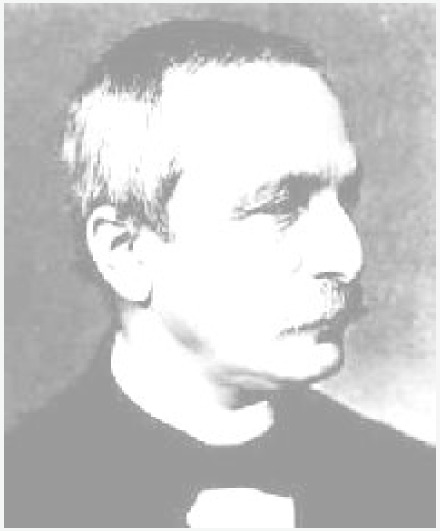
1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\,dx = 0$

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\,dx = 0$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\,\cos(m\,x)\,dx = \pi\,\delta_{m\,n}$

4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\cdot\cos(m\,x)\,dx = 0$

5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\cdot\sin(m\,x)\,dx = \pi\,\delta_{m\,n}$



Leopold Kronecker (1823-1891)
deutscher Mathematiker

Kronecker-Symbol:

$$\delta_{m\,n} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Orthonormalität:

$$\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n = \delta_{m\,n}$$

Bestimmung des Fourierkoeffizienten a_0

Fourier-Reihe von $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\,x) + b_n \cdot \sin(n\,x) \right]$$

Wir integrieren die Fourier-Reihe gliedweise im Periodenintervall $(0, 2\pi)$:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \cdot \int_0^{2\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\, dx + b_n \cdot \int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\, dx \right]$$

$$= a_0\, \pi$$

Wie wir gerade gezeigt haben:

$$\int_0^{2\pi} dx = 2\pi\,, \qquad \int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\, dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\, dx = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

Fourier-Reihe von $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n x) + b_n \cdot \sin(n x) \right]$$

Wir multiplizieren die Fourier-Reihe zunächst mit *cos (mx)* und integrieren anschließend wiederum über das Periodenintervall $(0, 2\pi)$:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(m x)\, dx = \frac{a_0}{2} \cdot \overbrace{\int_0^{2\pi} \cos(m x)\, dx}^{=0} +$$

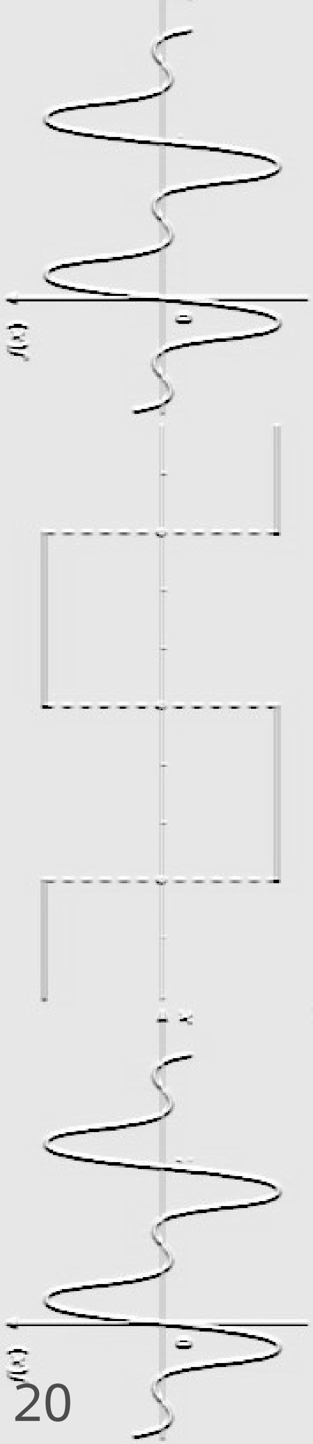
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos(n x) \cos(m x)\, dx + b_n \cdot \int_0^{2\pi} \sin(n x) \cos(m x)\, dx \right]$$

$m \neq n:$ die andere zwei Integrale = 0

$n = m:$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(m x)\, dx = a_m \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(m x)\, dx = a_m \pi$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(n x)\, dx}$$



Eine periodische Funktion $f(x)$ mit der Periode $T = 2\pi$ lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen in eine unendliche trigonometrische Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\,x) + b_n \cdot \sin(n\,x) \right]$$

entwickelt (sog. Fourier-Reihe von $f(x)$). Die Berechnung der Fourier-koeffizienten $a_0,\ a_1, a_2, \ldots,\ b_1,\ b_2, b_3, \ldots$ erfolgt dabei aus den Integral-formeln

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(n\,x)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(n\,x)\,dx$$

$$(n \in \mathbb{N})$$

Fourier-Reihe einer periodischen Funktion

- Symmetriebetrachtungen:

Die Fourier-Reihe einer geraden Funktion $f(x)$ enthält nur gerade Reihenglieder, d.h. neben dem konstanten Glied nur Kosinusglieder $(b_n = 0)$

$$f(-x) = f(x), \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\,x)$$

Die Fourier-Reihe einer ungeraden Funktion $f(x)$ enthält nur ungerade Reihenglieder, d.h. Sinusglieder $(a_n = 0)$

$$f(-x) = -f(x), \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\,x)$$

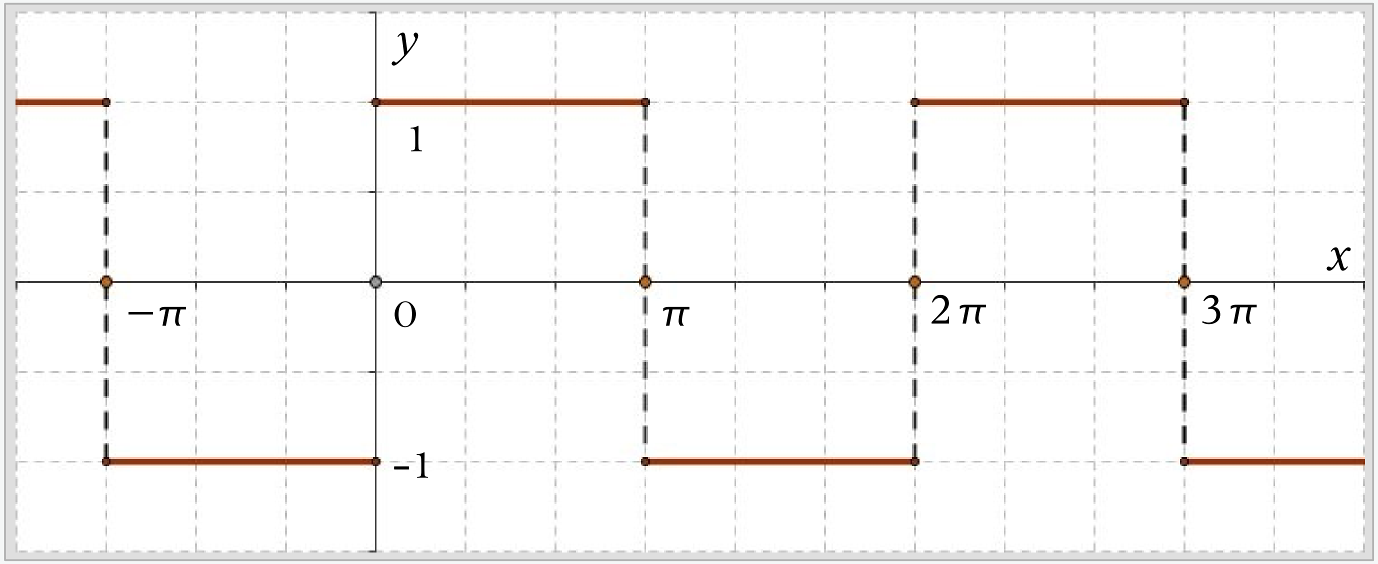
- Durch Abbruch der Fourier-Reihe nach endlich vielen Gliedern erhält man eine Näherungsfunktion für $f(x)$ in Form einer trigonometrischen Reihe. Ähnlich wie bei den Potenzreihen gilt auch hier: Je mehr Glieder berücksichtigt werden, um so “besser” ist die Näherung.

- Die Fourier-Reihe ist keineswegs auf periodische Funktionen mit der Periode 2π beschränkt. Sie lässt sich auch auf periodische Funktionen mit beliebiger Periode ausdehnen.

Entwickeln Sie die in Bild dargestellte Rechteckskurve mit der Funktionsgleichung

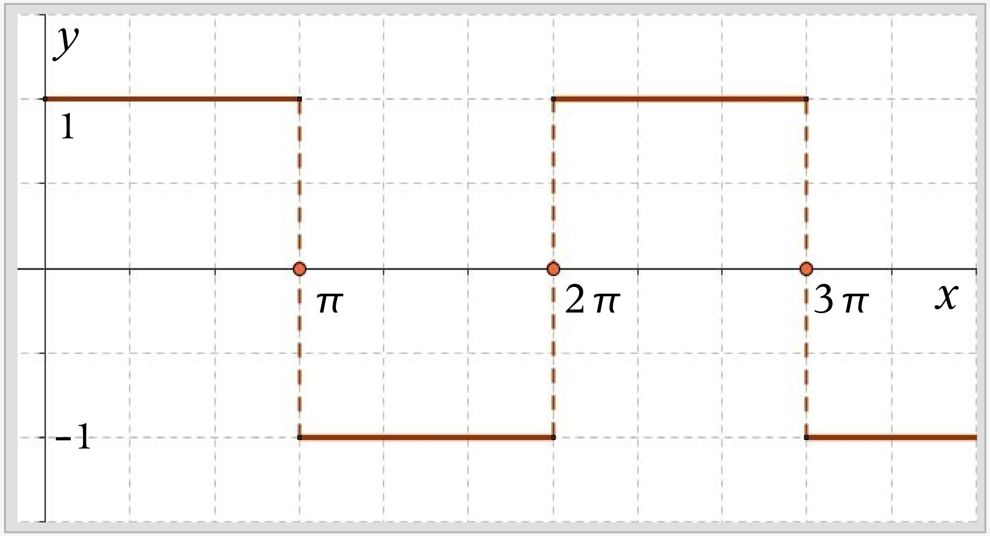
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ -1 & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases} \qquad f(-x) = -f(x)$$

und der Periode $T = 2\pi$ in eine Fourier-Reihe:



$$\int \sin(a\,x)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(a\,x)$$

Fourier-Reihe einer periodischen Funktion: Lösung 1



$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ -1 & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases}$$

Da $f(x)$ eine ungerade Funktion ist, reduziert sich ihre Entwicklung auf

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n x)}$$

Die Berechnung der Fourierkoeffizienten b_n geschieht nach der Formel

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(n x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(n x)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cdot \sin(n x)\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n x)\, dx - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin(n x)\, dx = \frac{1}{n\pi} \left(\left[-\cos(n x) \right]_0^{\pi} + \left[\cos(n x) \right]_{\pi}^{2\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left[\cos(2\pi n) - 2\cos(\pi n) + \cos 0 \right]$$

$$\cos(2\pi n) = \cos 0 = 1$$

$$\cos(\pi n) = 1 \qquad n - \text{gerade}$$

$$\cos(\pi n) = -1 \qquad n - \text{ungerade}$$

$$\cos(\pi n) = (-1)^n$$

Die Fourierkoeffizienten verschwinden für gerades n, d.h. für $n = 2k$.

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left[\cos(2\pi n) - 2\cos(\pi n) + \cos 0\right] = \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

$$b_{2k} = \frac{1}{2k\pi}\left[1 + 1 - 2\right] = 0 \qquad n = 2k \; - \; \text{gerade}$$

$$b_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)\pi}\left[1 + 1 + 2\right] = \frac{4}{(2k-1)\pi} \qquad n = 2k-1 \; - \; \text{ungerade}$$

Die Fourier-Reihe der Rechteckskurve besitzt damit die Gestalt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$
$$= \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \ldots\right]$$

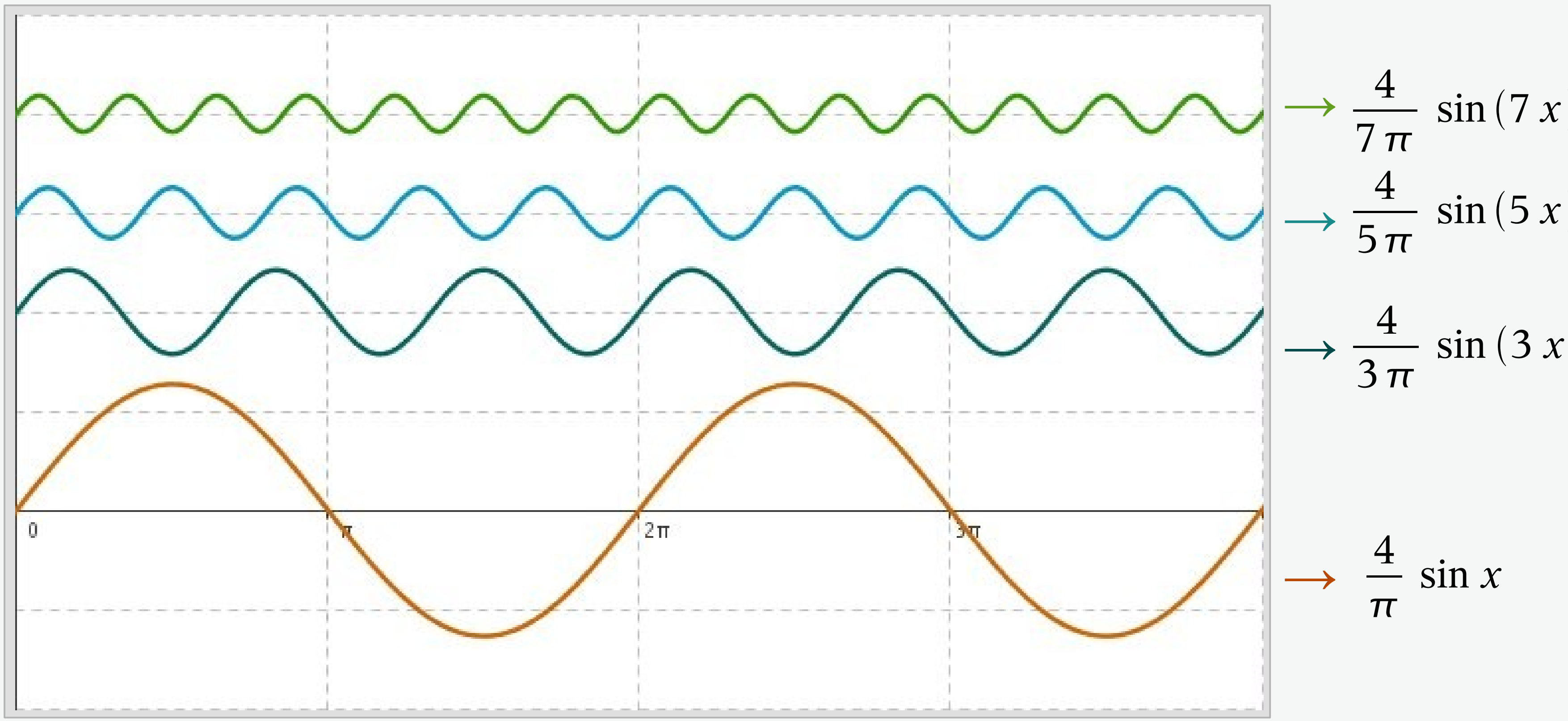
Durch Abbruch dieser Reihe nach dem 1., 2. bzw. 3. Glied erhalten wir die folgenden Näherungsfunktionen:

1. Näherung: $f_1(x) = \frac{4}{\pi}\sin x$

2. Näherung: $f_2(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)\right]$

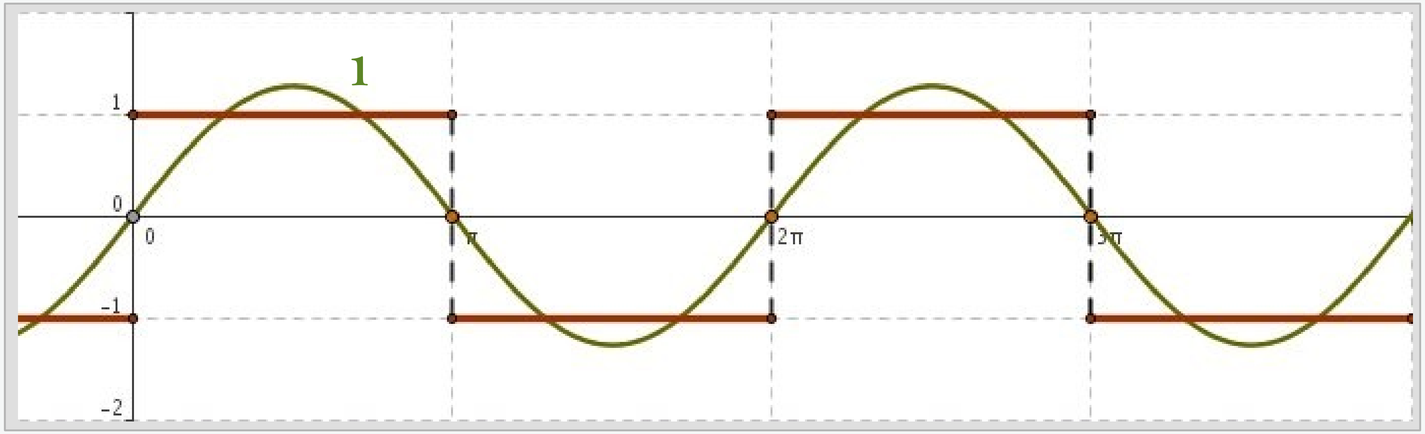
3. Näherung: $f_3(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x)\right]$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \ldots\right]$$

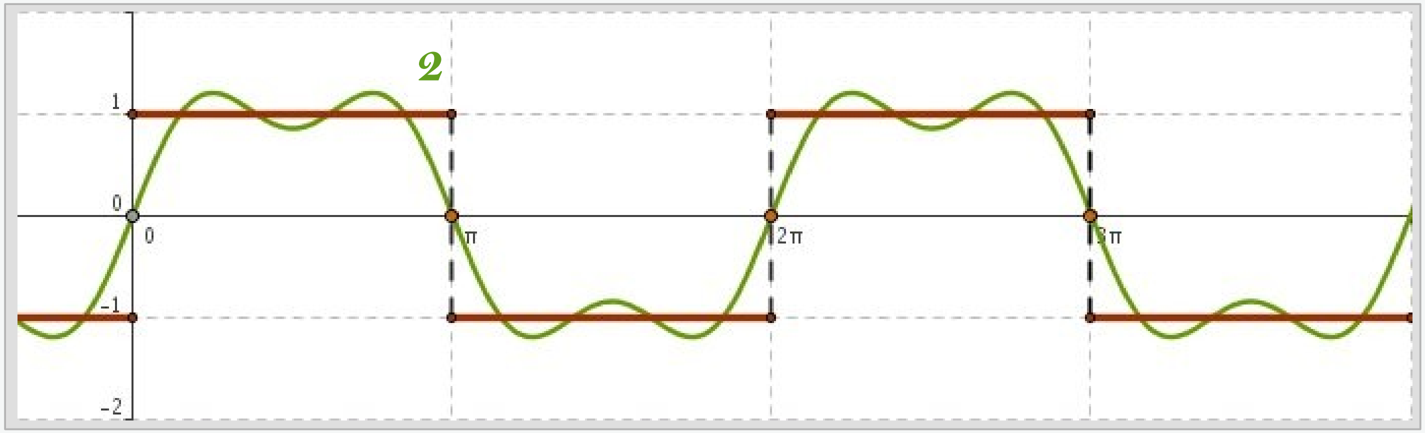


Lösung 1: Näherungskurven

1. Näherung: $f_1(x) = \frac{4}{\pi} \sin x$

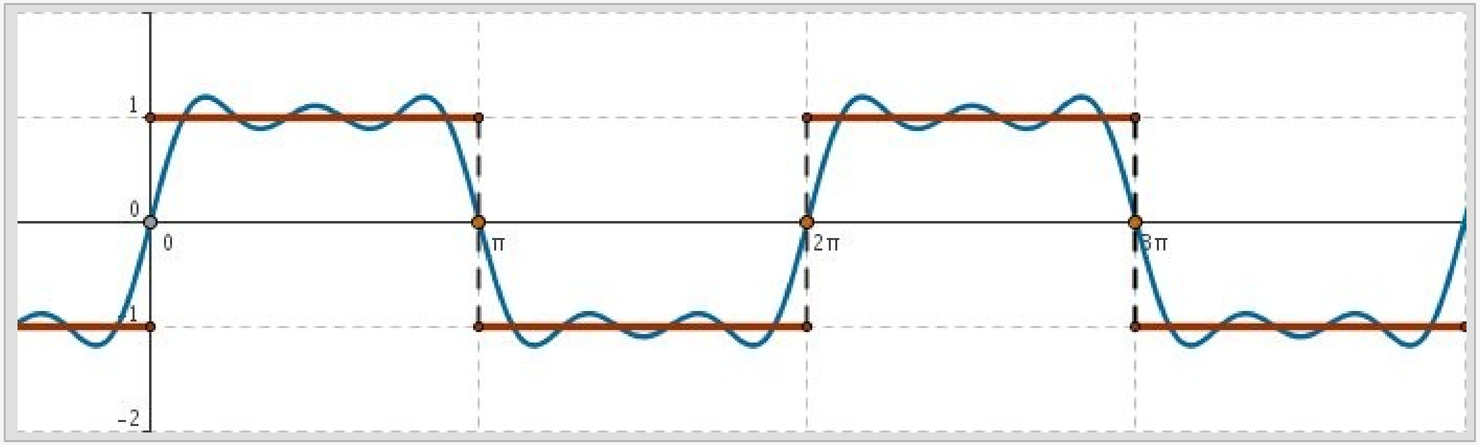


2. Näherung: $f_2(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin(3x) \right]$



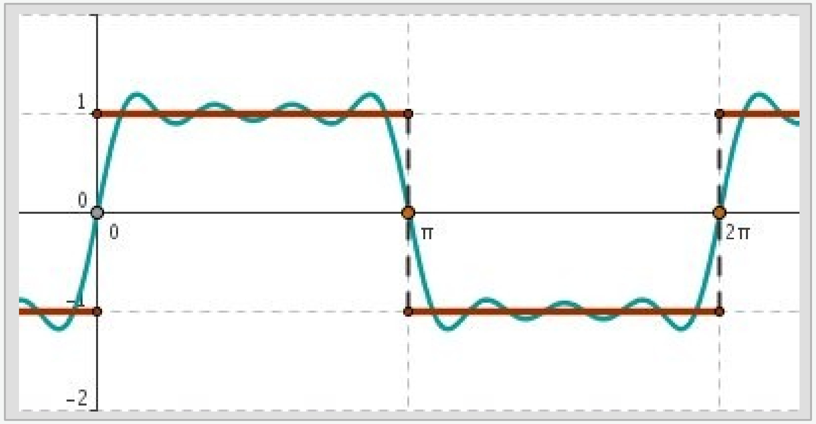
Lösung 1: Näherungskurven

3. Näherung: $$f_3(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x)\right]$$



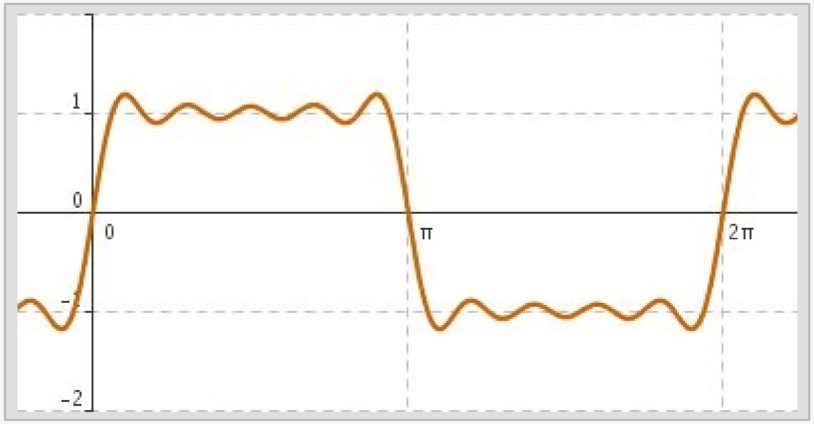
4. Näherung:

$$f_4(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \ldots + \frac{1}{7}\sin(7x)\right]$$

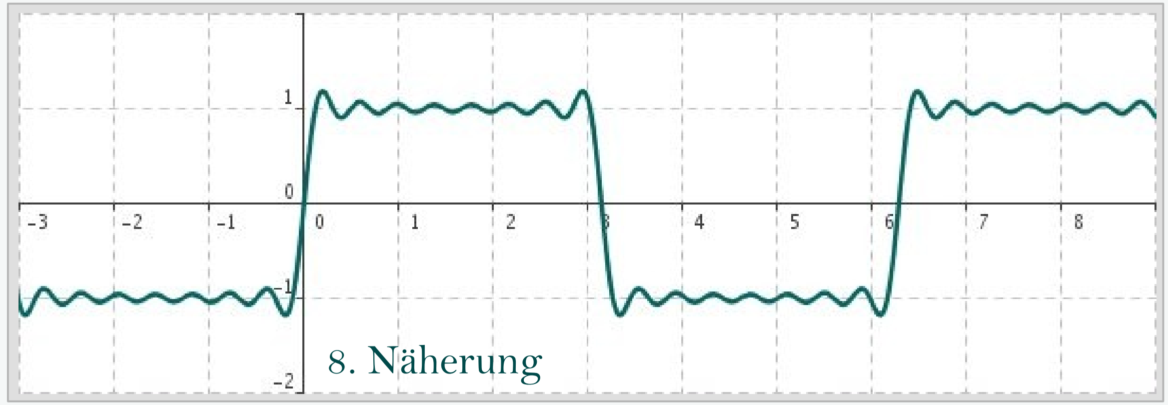


5. Näherung:

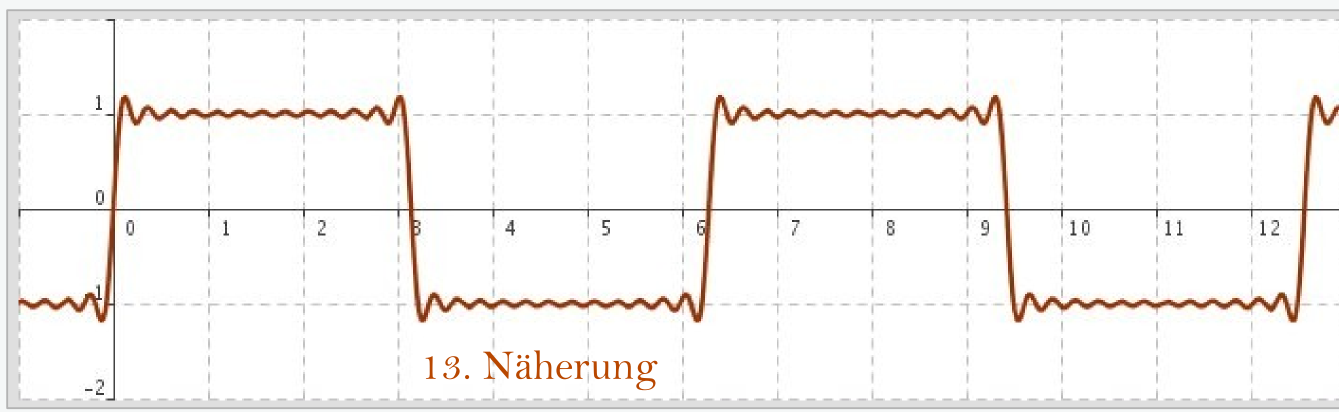
$$f_5(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \ldots + \frac{1}{9}\sin(9x)\right]$$



Je mehr Glieder berücksichtigt werden, um so "besser" ist die Näherung.



$$f_8(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x) + \ldots + \frac{1}{15}\sin(15x)\right]$$



$$f_{13}(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x) + \ldots + \frac{1}{25}\sin(25x)\right]$$