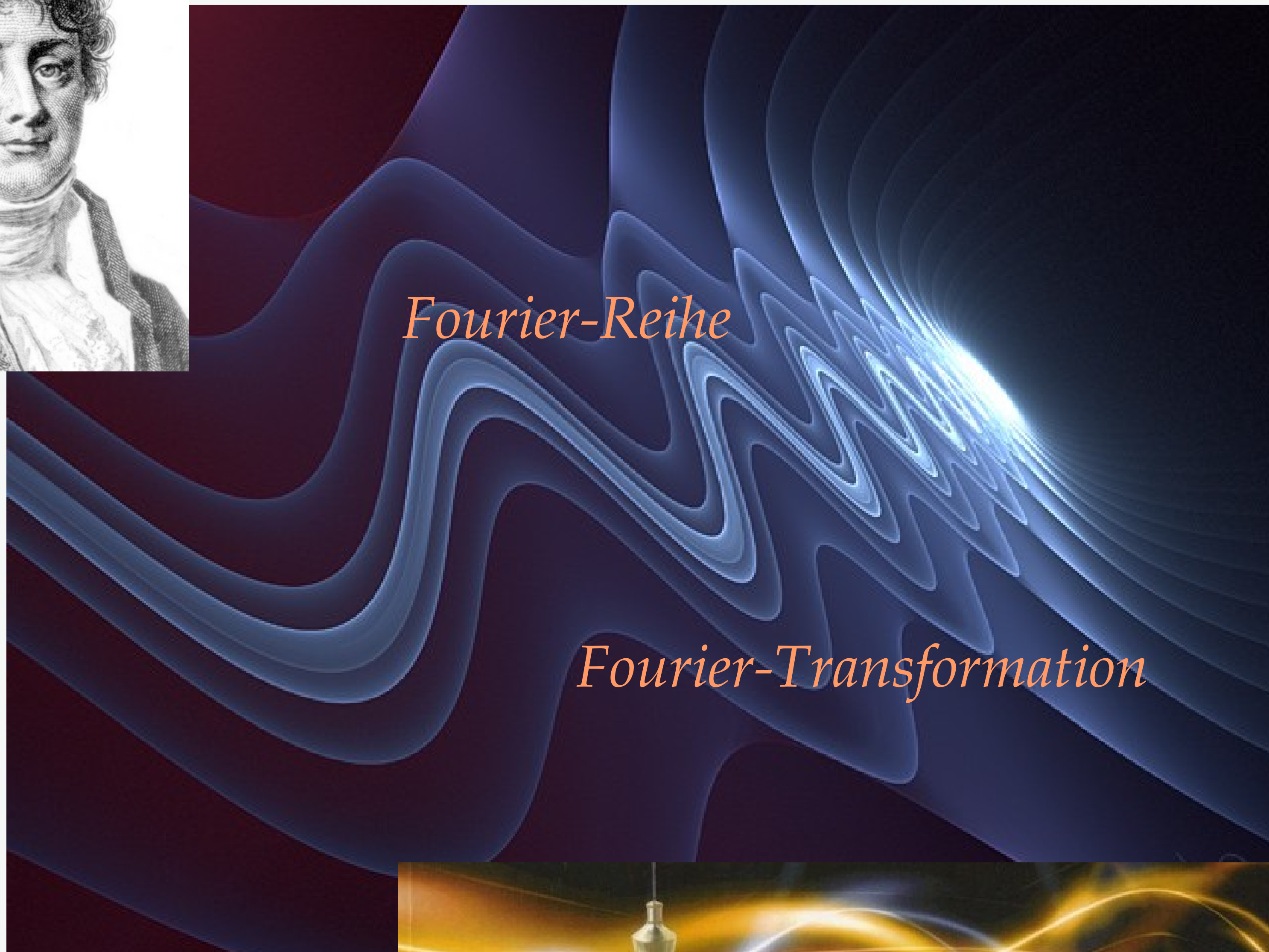

Fourier-Reihe
Fourier-Transformation

Eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f(x)$ kann in eine unendliche Reihe von Potenzfunktionen x^n entwickelt werden

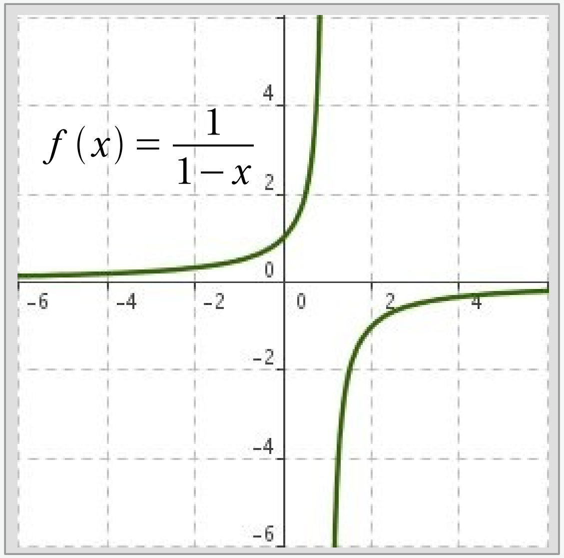
$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots}$$

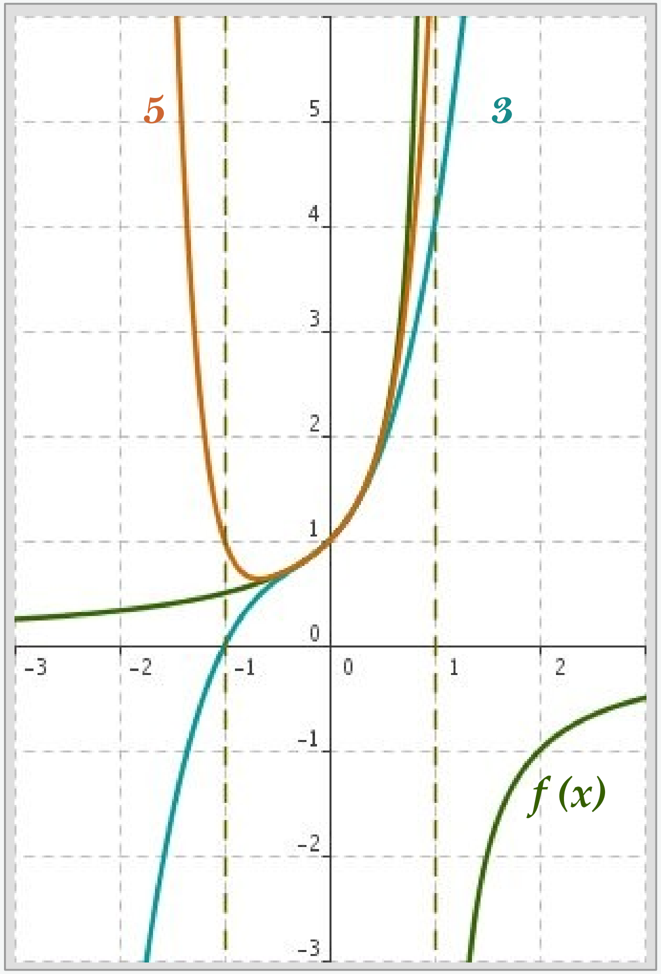
Vom besonderen praktischen Interesse sind die Fälle, in denen sich die Funktion $f(x)$ durch wenige Summanden recht genau approximieren lässt

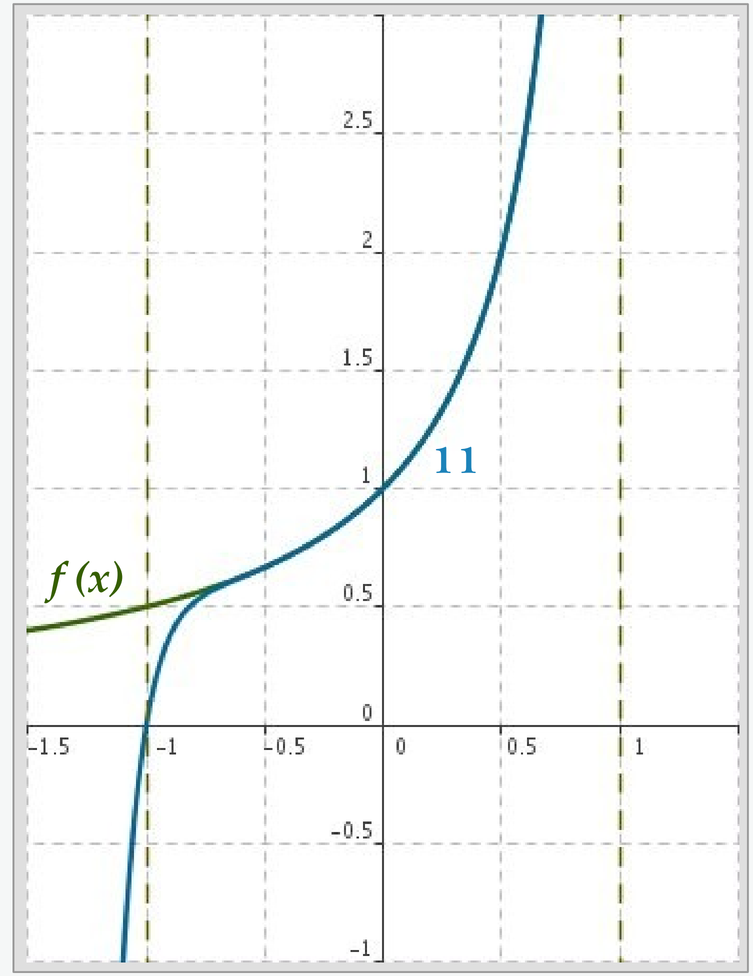
$$f(x) \simeq a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Beispiel:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$$







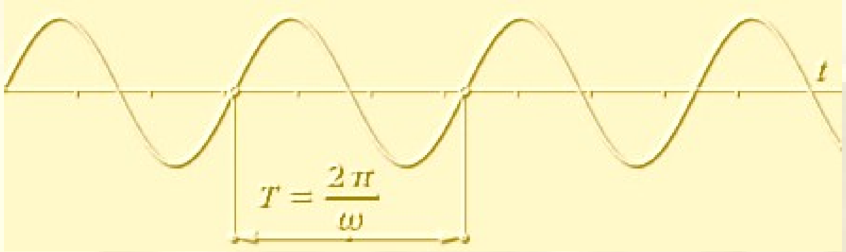
$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$f_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

$$f_{11}(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{11}$$

Harmonische Schwingung



$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$y(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t) + A_2 \cdot \cos(\omega t)$$

A – Amplitude

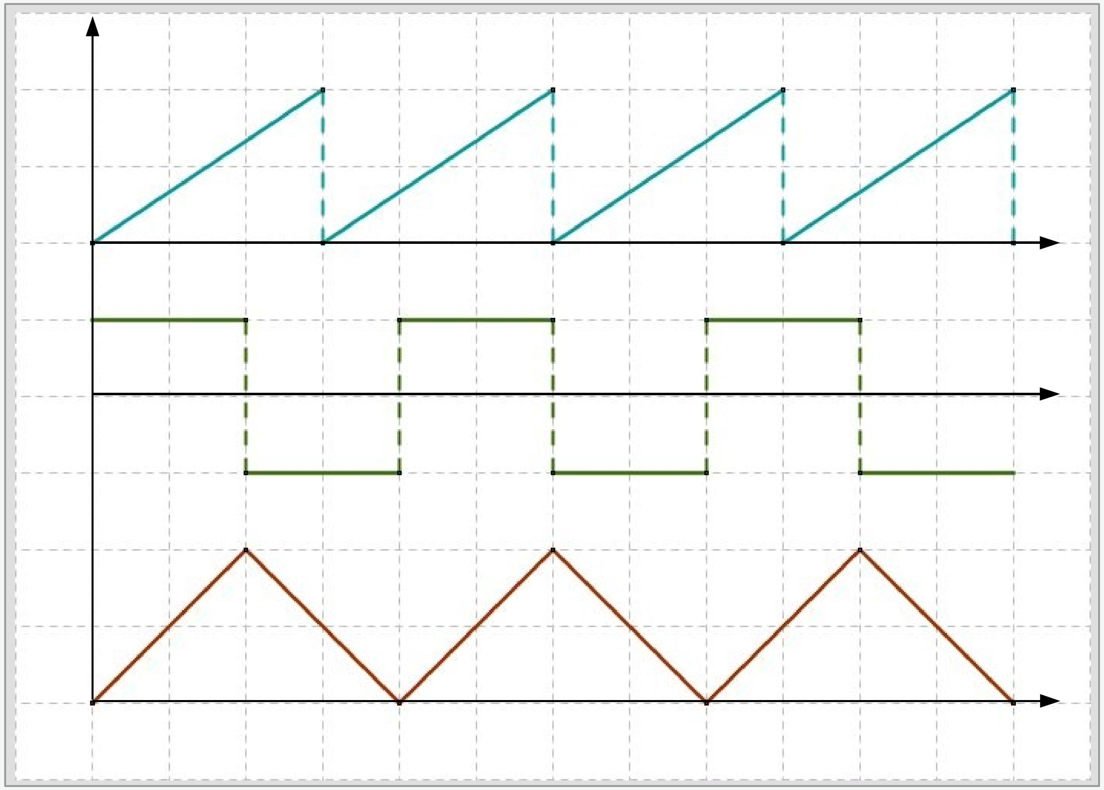
ω – Kreisfrequenz der Schwingung

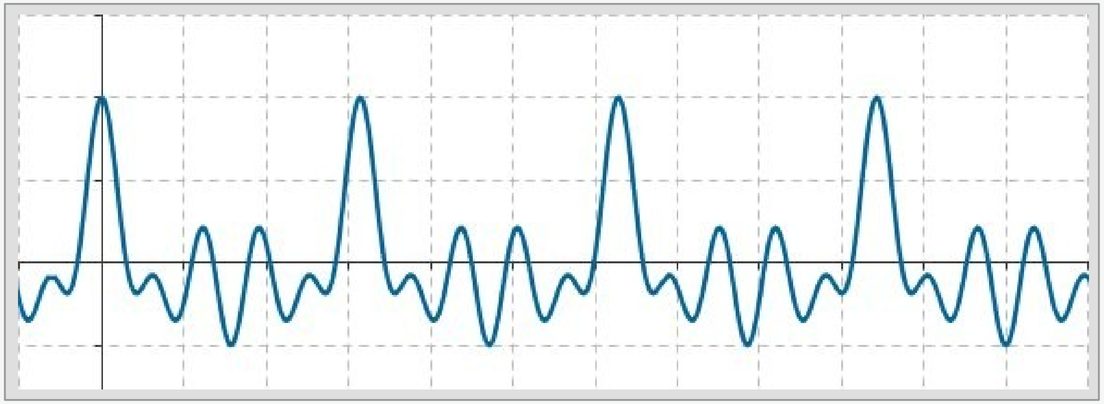
φ – Phase

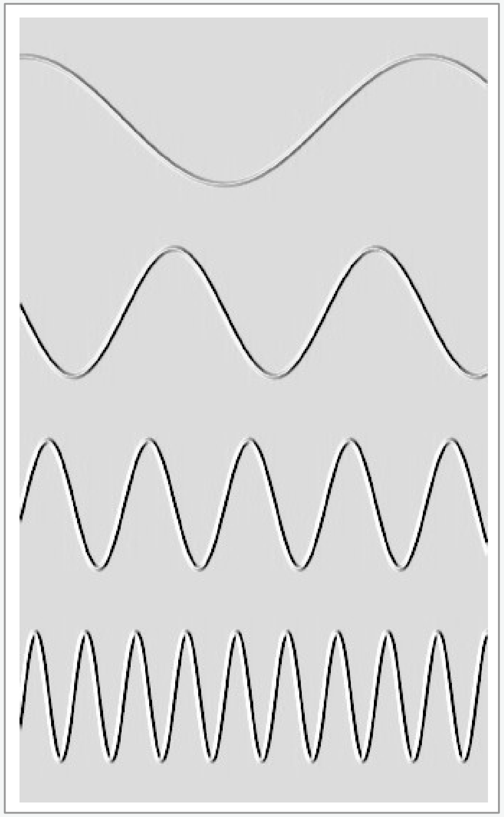
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$A_1 = A\cos\varphi\,, \qquad A_2 = A\sin\varphi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} - \text{ Periode}$$

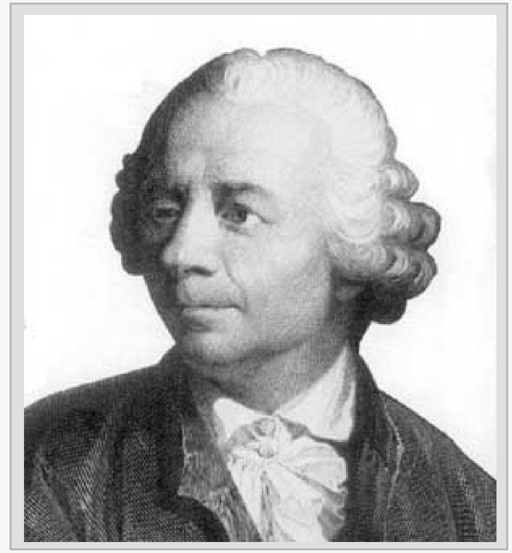






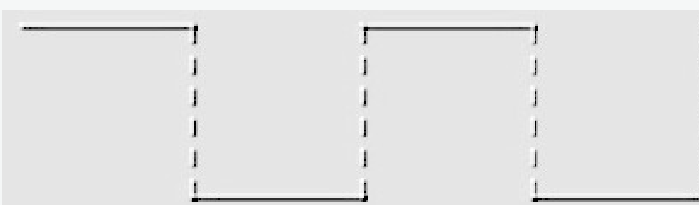
Das Problem der schwingenden Saite

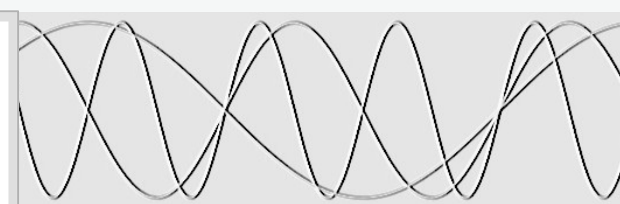
Daniel Bernoulli (1700-1782)



Leonhard Euler (1707-1783)

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783)





"Ich habe mir vorgenommen, in diesem Werke die mathematischen Gesetze, welchen die Verbreitung der Wärme gehorcht, zu entwickeln und glaube, dass die nachfolgende Theorie einen der wichtigsten Zweige der ganzen Physik ausmachen wird."

Jean Baptiste Fourier (1768-1830)

"keine einzige Funktion existiert, die nicht wenigstens in einem Teil ihres Verlaufs durch eine bestimmte trigonometrische Reihe ihre Darstellung findet."

Jean Baptiste Fourier (1768-1830)

Fourier benutzte trigonometrische Reihen in seinem berühmten Werk "Analytische Theorie der Wärme", um Eigenschaften von Lösungen der Wärmegleichung zu untersuchen. Die Idee, allgemeine Funktionen als eine Fourier-Reihe darzustellen (oder eine Potenzreihe), beeinflusste die Entwicklung der mathematischen Analyse grundlegend.

> *"Mathematik ist mit den verschiedensten Phänomenen vergleichbar und bringt die geheimen Ähnlichkeiten zwischen ihnen zum Vorschein."*

> *"Gestern hatte ich meinen 21. Geburtstag. In dem Alter hatten Newton und Pascal bereits mehrfach Anspruch auf Unsterblichkeit erhoben." (Fourier 1789)*

Die Materie Fouriers wabert !

Der Bruch, den Fourier vollzog, hätte kaum radikaler sein können.

Fourier behauptete, ein universales Beschreibungsmodell für alle Naturerscheinungen geschaffen zu haben.

Fouriers Modell

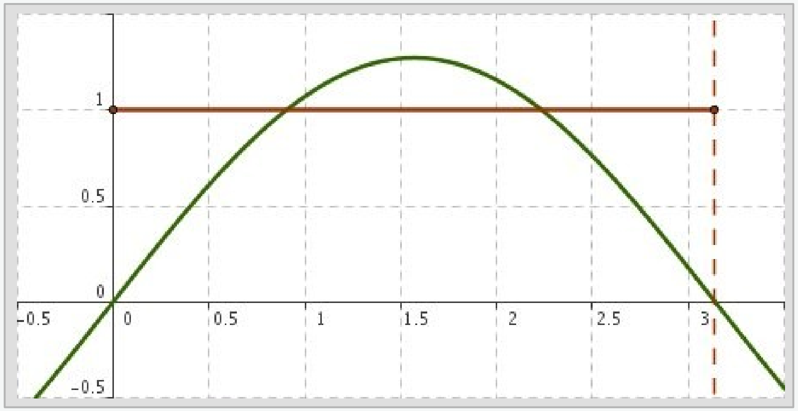
- begreift alle physikalischen Phänomene prinzipiell als Summen von Schwingungen,
- bricht radikal mit dem aus der griechischen Antike stammenden atomistischen Materieverständnis.

Christiaan Huygens war ein niederländischer Astronom, Mathematiker und Physiker.

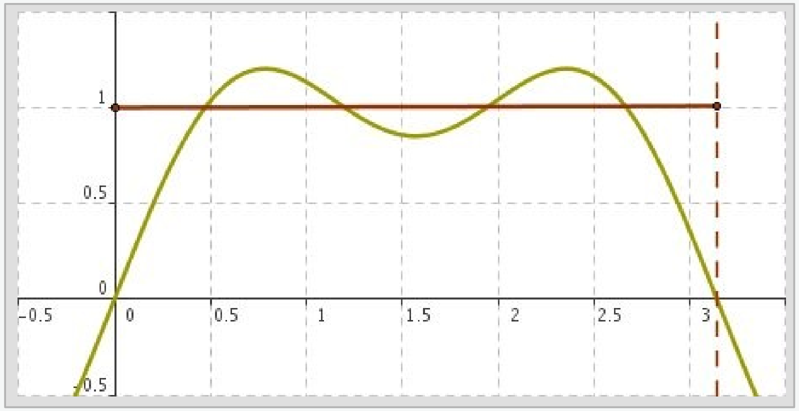
Zu Beginn des 18. Jahrhunderts wurden Versuche unternommen, physikalische Vorgänge mit Schwingungsmodellen zu beschreiben. Ein wichtiger Vorläufer ist Christiaan Huygens, der eine Wellentheorie des Lichts entwickelte. Seine Ansätze konnten sich jedoch nicht durchsetzen, was vor allem mit der Dominanz Newtons und seiner Korpuskeltheorie zusammenhing.

Fourier:
"Man verfährt am einfachsten und bleibt meist mit der Erfahrung in Einklang, wenn man sich die Verbreitungsweise der Wärme ähnlich wie die des Lichtes vorstellt."

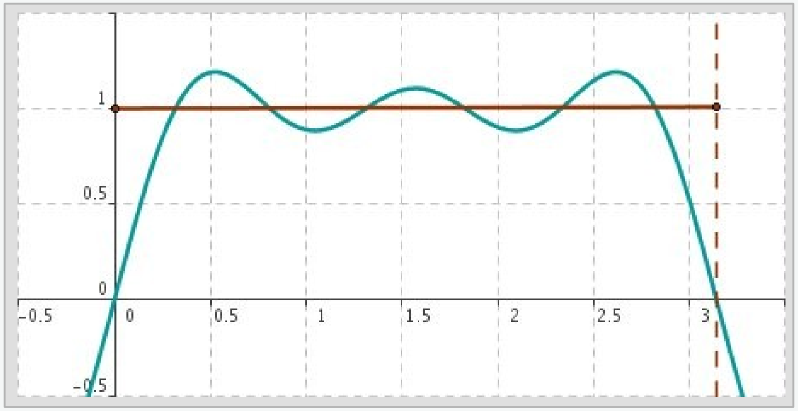
Am 21. Dezember 1807 stellte Fourier im “Institut de France” die Beschreibung einer Rechteckwelle als Grenzwert harmonischer Summen.



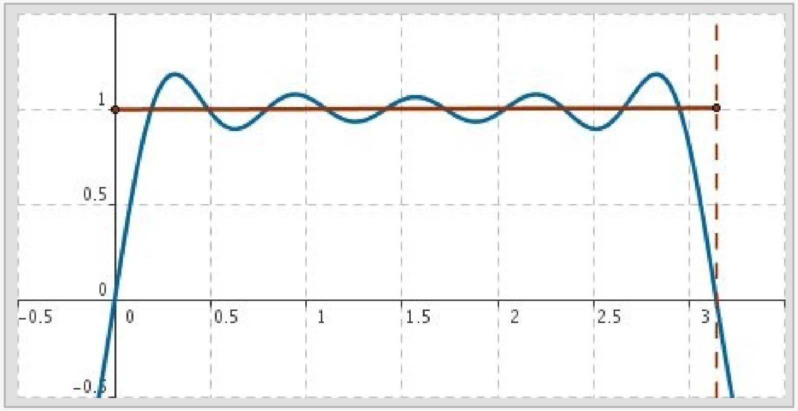
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sin x$$



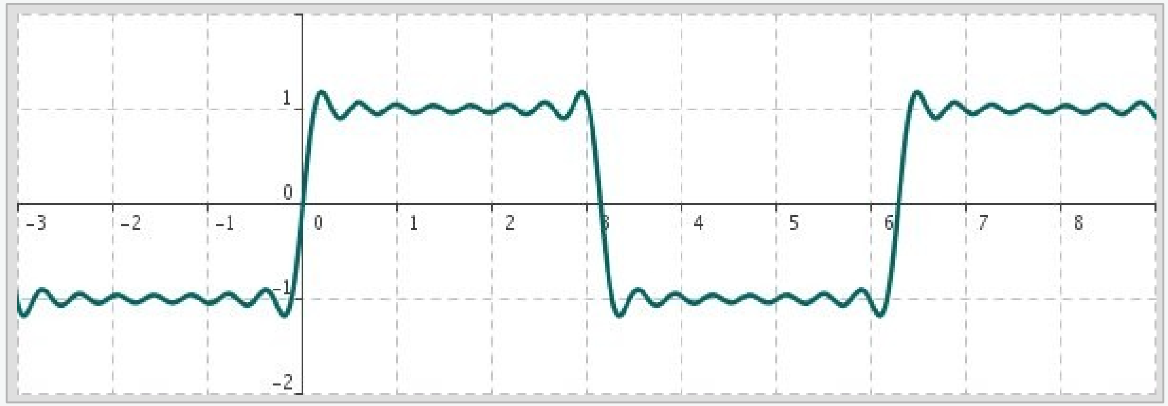
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin(3x) \right]$$



$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) \right]$$



$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \ldots + \frac{1}{9} \sin(9x) \right]$$



$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x) + \ldots + \frac{1}{15}\sin(15x)\right]$$

> *"Je mehr Glieder man in der Gleichung für $y(t)$ benutzt, desto eckiger wird die Linie an den Umbiegungspunkten, und desto gerader an den Scheiteln; wenn die Anzahl der Glieder unendlich geworden ist, sind die Ecken ganz scharf, die Scheitel ganz gerade geworden, die Curve verläuft parallel ... "*

Je mehr Glieder berücksichtigt werden, um so "besser" ist die Näherung.

Diese Beschreibung missfiel einigen Mitgliedern der Academie des Sciences, so dass eine Veröffentlichung seines Vortrags vorerst abgelehnt wurde. Erst 1812 bekam er einen Preis von der Akademie.

$f(x)$ ist eine nicht sinusförmige periodische Funktion mit der Periode 2π

$$\boxed{f(x) = f(x + 2\pi)}$$

Bei periodischen Funktionen ist die Integration über eine volle Periode invariant gegen Verschiebung des Integrationsintervalls

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x)\,dx$$

Man erkennt das aus einer Aufteilung der Integration

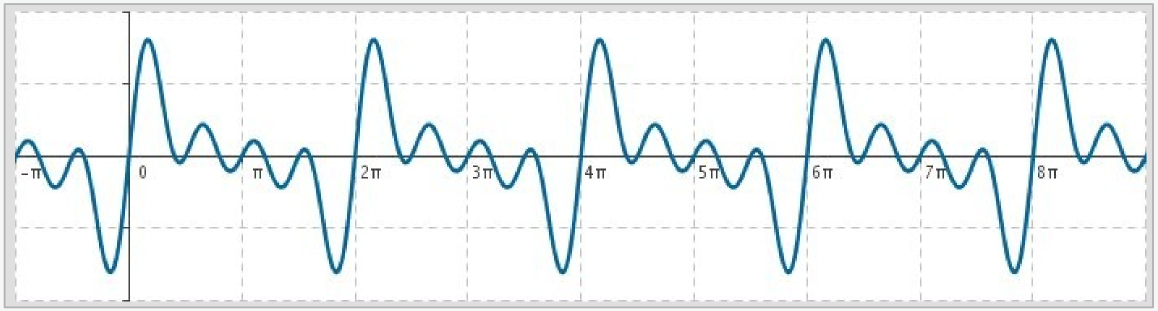
$$\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x)\,dx = \int_{\alpha-\pi}^{-\pi} f(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \int_{\pi}^{\alpha+\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$\int_{\alpha-\pi}^{-\pi} f(x)\,dx = -\int_{-\pi}^{\alpha-\pi} f(x)\,dx = -\int_{\pi}^{\alpha+\pi} f(x+2\pi)\,d(x+2\pi) = -\int_{\pi}^{\alpha+\pi} f(x)\,dx$$

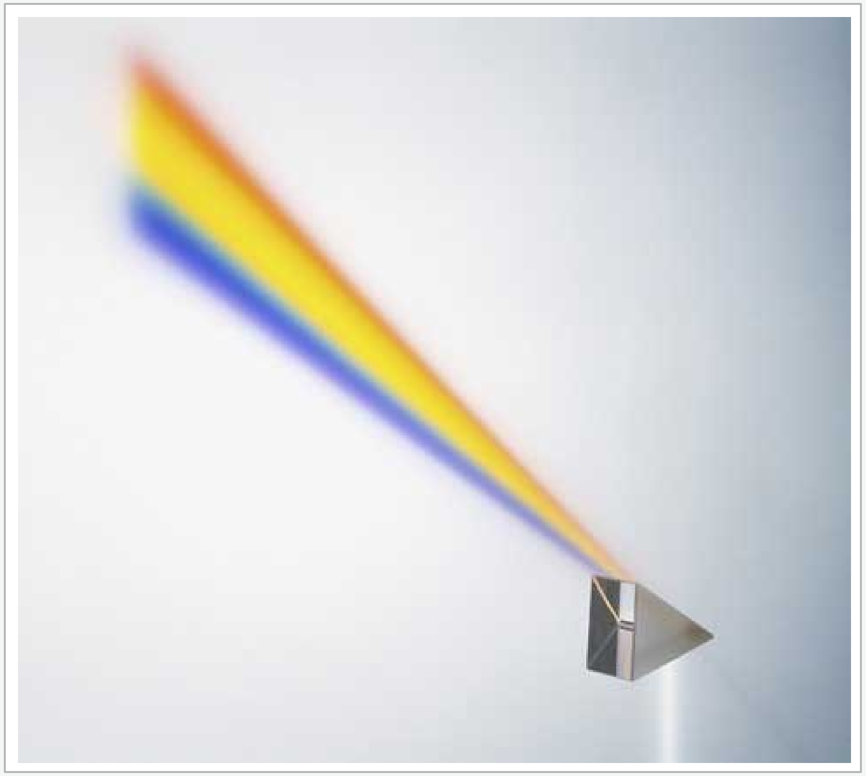
Die Funktion $f(x)$ kann unter gewissen Voraussetzungen in eine unendliche trigonometrische Reihe der Form

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\,x) + b_n \cdot \sin(n\,x) \right] = \\
&= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos x + a_2 \cdot \cos(2\,x) + a_3 \cdot \cos(3\,x) + \ldots \\
&\qquad + b_1 \cdot \sin x + b_2 \cdot \sin(2\,x) + b_3 \cdot \sin(3\,x) + \ldots
\end{aligned}
$$

entwickelt werden. Diese Art der Darstellung heißt Fourier-Reihe von $f(x)$. Die Konstanten $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ sind die Fourierkoeffizienten.



Die Fourier-Reihe bietet eine Möglichkeit, die periodischen Funktionen nach ihren Teilfrequenzen systematisch zu zerlegen. Die Zerlegung nach Frequenzen entspricht dem, was ein Prisma mit dem einfallenden Licht macht. Der Lichtstrahl ist eine Überlagerung von Beiträgen verschiedenster Frequenzen. Da die Lichtbrechung beim Prisma frequenzabhängig ist, wird der Strahl “zerlegt”, der Ausfallwinkel hängt von der Frequenz des entsprechenden Anteils ab.



Die Fourier-Reihe von $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\,x) + b_n \cdot \sin(n\,x) \right]$$

Die Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(n\,x)\,dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(n\,x)\,dx$$

Es handelt sich um die Projektion auf ein orthogonales Basissystem. Die Menge

$$\left\{ \sqrt{\frac{1}{2}},\ \cos(n\,x),\ \sin(n\,x);\ \ n = 1, 2, \ldots \right\}$$

ist ein Orthonormalessystem für periodische Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx$$

Beispiel 1: $\mathbb{R}^2$ Basisvektoren $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \quad \text{für alle} \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^2$$

Beispiel 2: $\mathbb{R}^n$ Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots), \quad \ldots, \vec{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \ldots + v_n \vec{e}_n \quad \text{für alle} \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

Beispiel 3: Polynome

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Formal ist das Polynom durch einen Vektor von Koeffizienten a_i bestimmt:

$$\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

Jeder solche Vektor entspricht einem Polynom. Der Vektor $\vec{e}_i$ entspricht dabei dem Monom x^i, und die Monome bilden eine Basis des Raumes der Polynome.