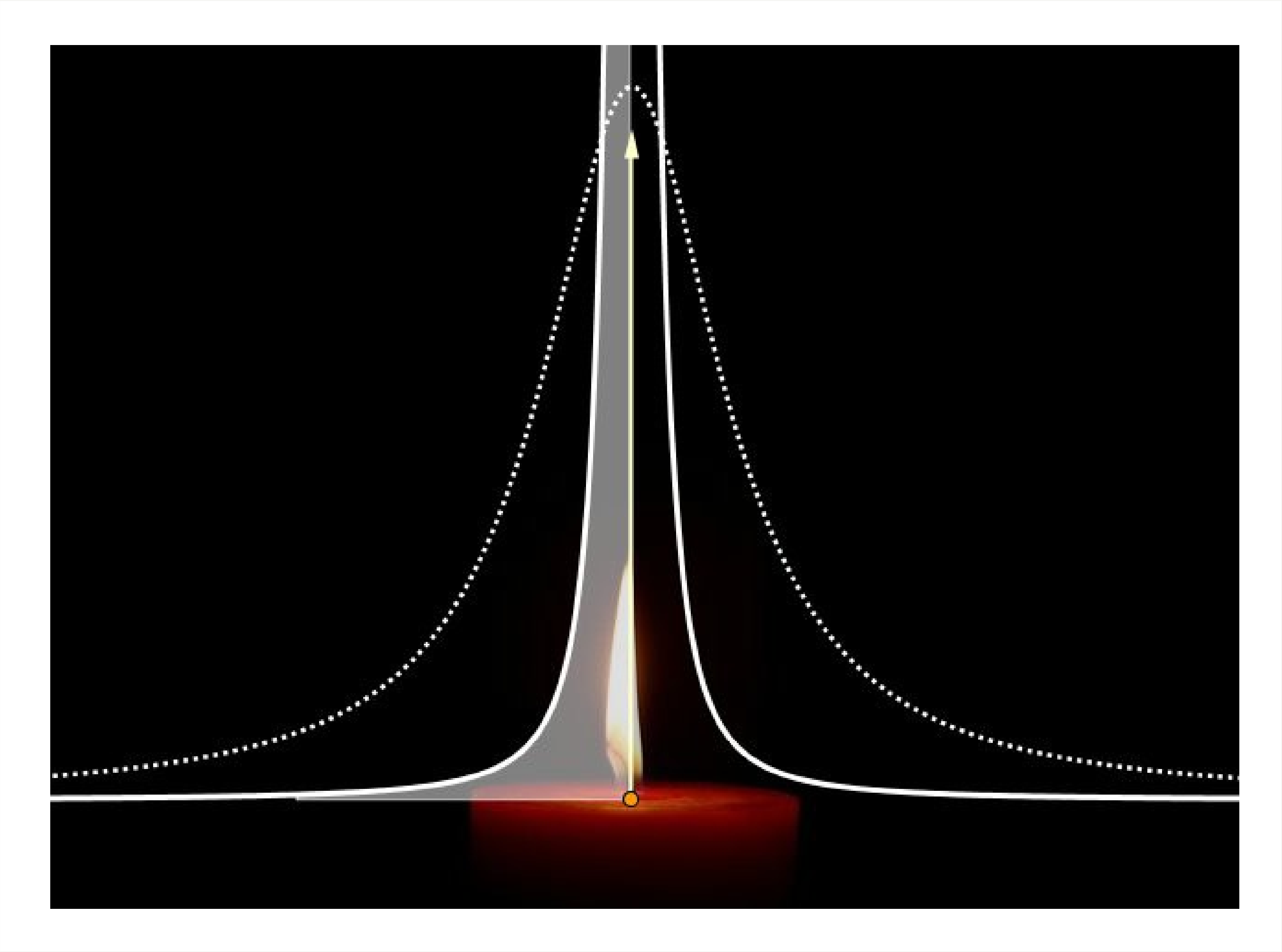

http://www.flickr.com/photos/topher76/269385965/

# *Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integranden*

# Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integranden

Uneigentliche Integrale mit unendlichem Integrationsgebiet sind leicht zu erkennen: eine der angegebenen Grenzen ist unendlich groß. Schwieriger ist es, eine Polstelle des Integranden im Integrationsintervall zu bemerken.

Wir berechnen die Fläche $A$ unterhalb der Kurve $f(x) = 1/x^2$ im Intervall [-1, 1].

$$A = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-1}^{1} = -2 \quad - \quad \underline{\text{falsch!}}$$

Die Funktion $f(x) = 1/x^2$ besitzt an der Stelle $x = 0$ eine Polstelle, also ist unbeschränkt.

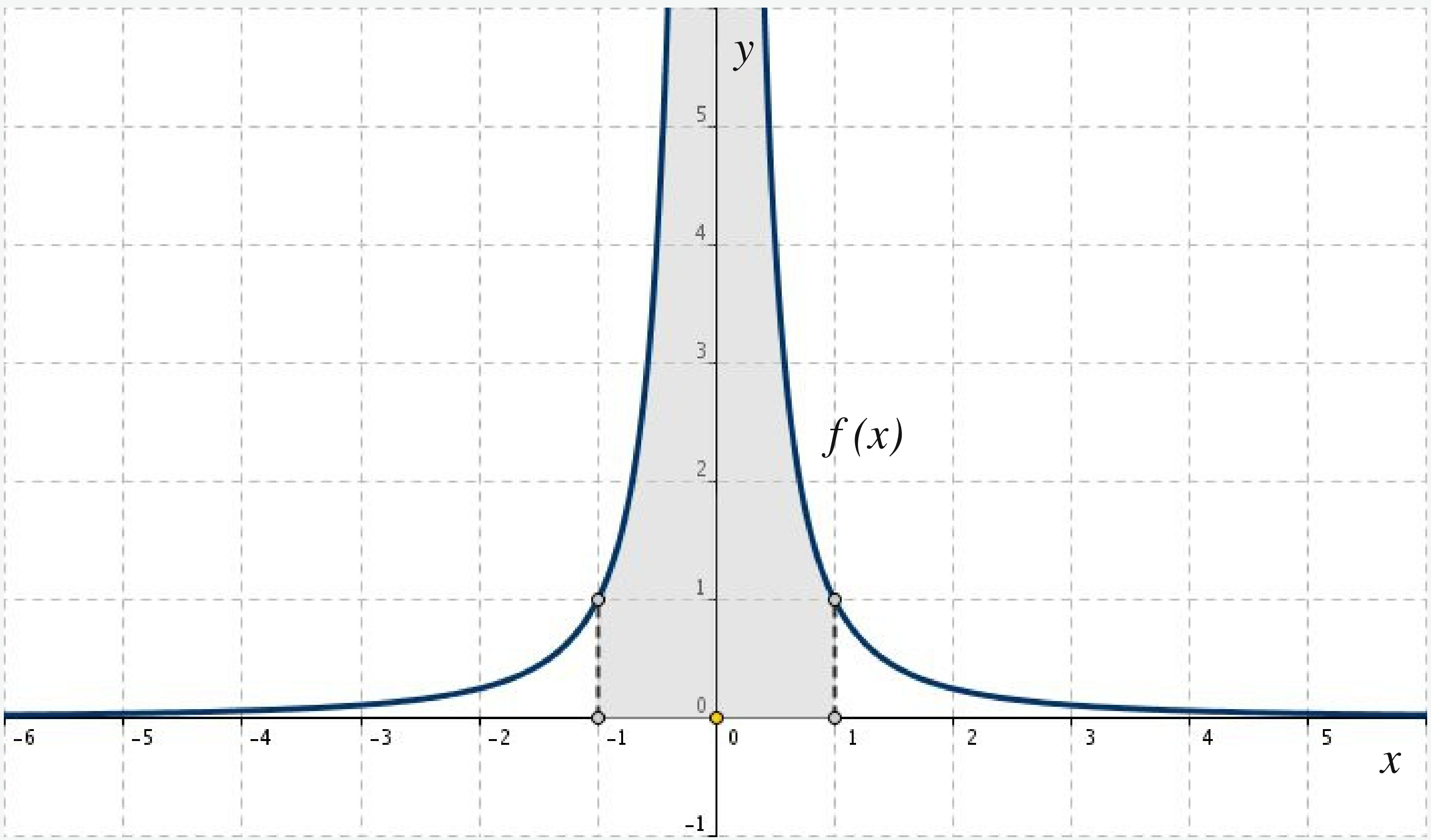


*Abb. 4-1: $f(x) = 1/x^2$ mit Polstelle bei $x = 0$*

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

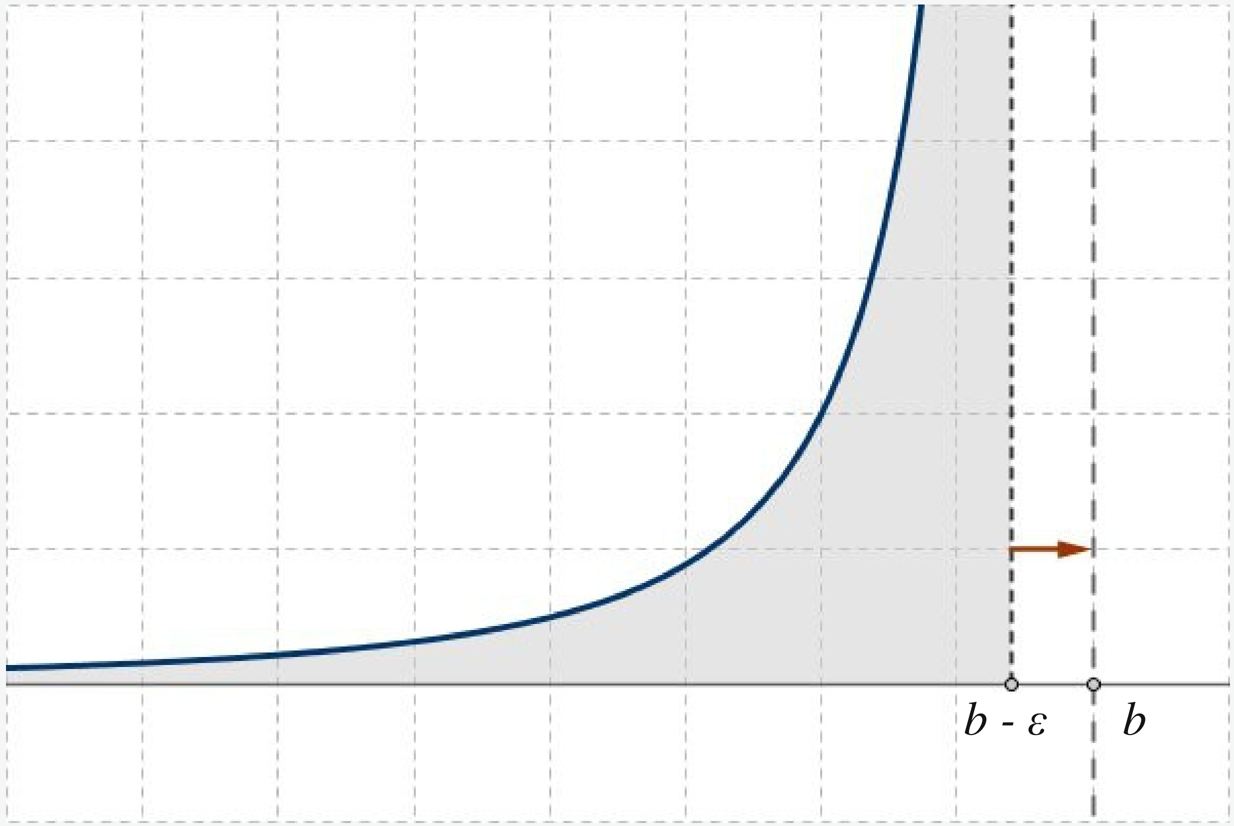


*Abb. 4-2: Zur Berechnung des Integrals der Funktion $f(x)$*

Die Funktion $f(x)$ hat in der oberen Integrationsgrenze $x = b$ eine Polstelle.

Wenn die Funktion $f(x)$ an der oberen Integrationsgrenze $x = b$ eine Polstelle hat, und wenn die Funktion für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ im Intervall $[a,\ b - \varepsilon]$ integrierbar ist, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx\,, \qquad \varepsilon > 0 \qquad \bullet$$

Man nähert das gesuchte Integral durch ein bestimmtes Integral auf einem Bereich an, der die Polstelle nicht enthält und bildet dann den Grenzwert bei Annäherung der Grenze an die Polstelle. Existiert dieser Grenzwert, so nennt man • uneigentliches Integral der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$. Analoges gilt für eine Polstelle an der unteren Integrationsgrenze $x = a$ :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx\,, \qquad \varepsilon > 0 \qquad \bullet\bullet$$

Integrale der Art • oder • • nennt man auch uneigentliche Integrale 2. Art.

Befindet sich eine Polstelle innerhalb des Integrationsbereiches $[a, b]$ an der Stelle $x = c$, so wird das Intervall aufgeteilt, sodass zwei uneigentliche Integrale 2. Art entstehen. Diese werden dann einzeln gelöst

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta \to 0} \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

$$\varepsilon\,,\ \delta > 0$$

Das uneigentliche Integral existiert, wenn beide Grenzwerte auf der rechten Seite unabhängig voneinander existieren. Dies wird auch durch die verschiedenen Symbole $\varepsilon$ und $\delta$ ausgedrückt, die unabhängig voneinander Null zustreben.

Bei der Funktion $f(x) = 1/x$ ist Integrationsbereich an der Polstelle $x = 0$ aufzuteilen:

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\,x}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{d\,x}{x^2} + \lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{1} \frac{d\,x}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \to 0} \left[ -\frac{1}{x} \right]_{\delta}^{1} =$$

$$= -2 + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} + \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} = \infty$$

Die zu berechnende Fläche ist nicht negativ, aber unendlich. Das uneigentliche Integral existiert deshalb nicht.

Berechnen Sie folgende Integrale

Aufgabe 8: $\quad I = \int\limits_0^1 \frac{d\,x}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 9: $\quad I = \int\limits_0^1 \frac{d\,x}{x^2}$

Aufgabe 10: $\quad I = \int\limits_1^4 \frac{d\,x}{\sqrt{4 - x}}$

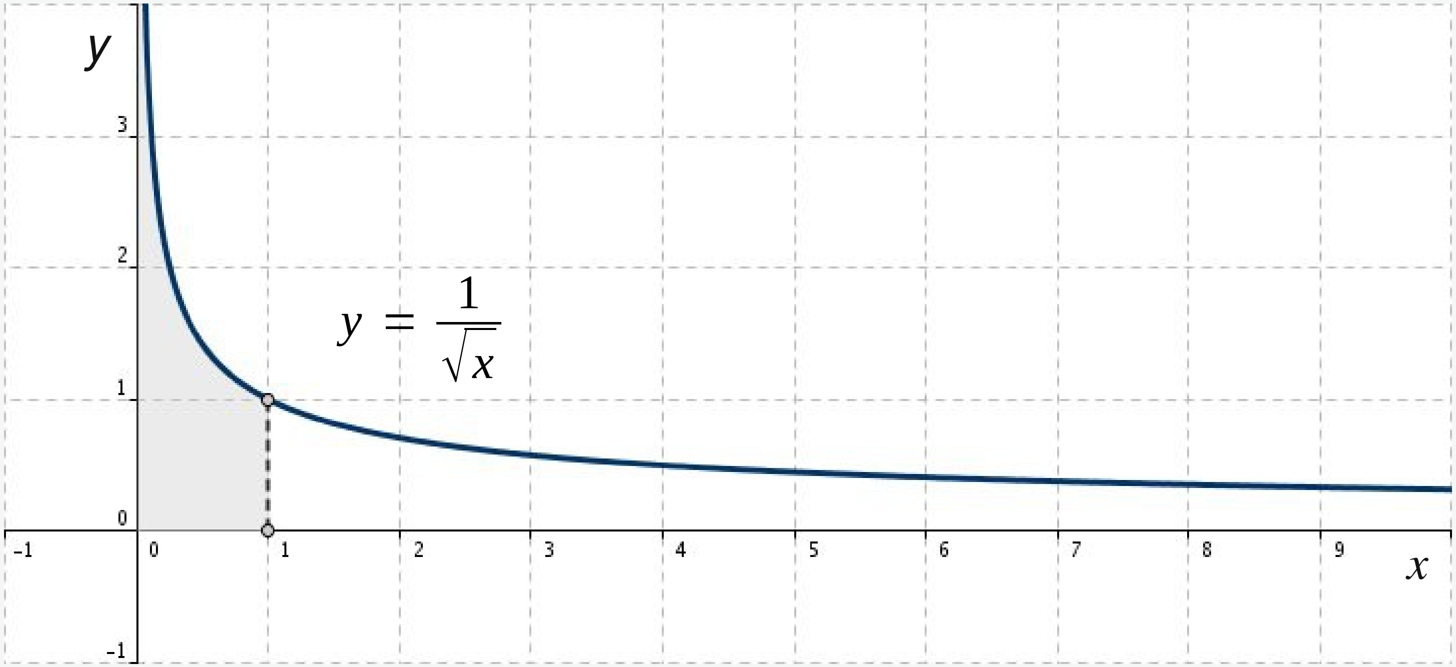


*Abb. 5-1: Zur Berechnung des Integrals der Funktion $y = 1/\sqrt{x}$ im Intervall [0, 1]*

Wir berechnen die Fläche über dem Intervall [0, 1]. Die $y$-Achse ist eine Asymptote, und es gibt keinen Schnittpunkt mit der $y$-Achse.

Die Funktion $f(x)$ ist nicht im ganzen Intervall [0, 1] definiert und ist dort unbeschränkt.

Im Folgenden

- berechnen wir das Integral $\int\limits_{\lambda}^{1} f(x)\,dx \qquad (0 < \lambda < 1)$
- und bestimmen den Grenzwert $\lim\limits_{\lambda \to 0} \int\limits_{\lambda}^{1} f(x)\,dx \quad (\lambda > 0)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}, \qquad F(x) = 2\sqrt{x}$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\lambda \to 0} \int\limits_{\lambda}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\lambda \to 0} \left[2\sqrt{x}\,\right]_{\lambda}^{1} = \lim_{\lambda \to 0} \left(2 - 2\sqrt{\lambda}\right) =$$

$$= 2 - \lim_{\lambda \to 0} 2\sqrt{\lambda} = 2 - 0 = 2$$

Die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x)$ im Intervall von 0 bis 1 hat den Flächeninhalt 2.

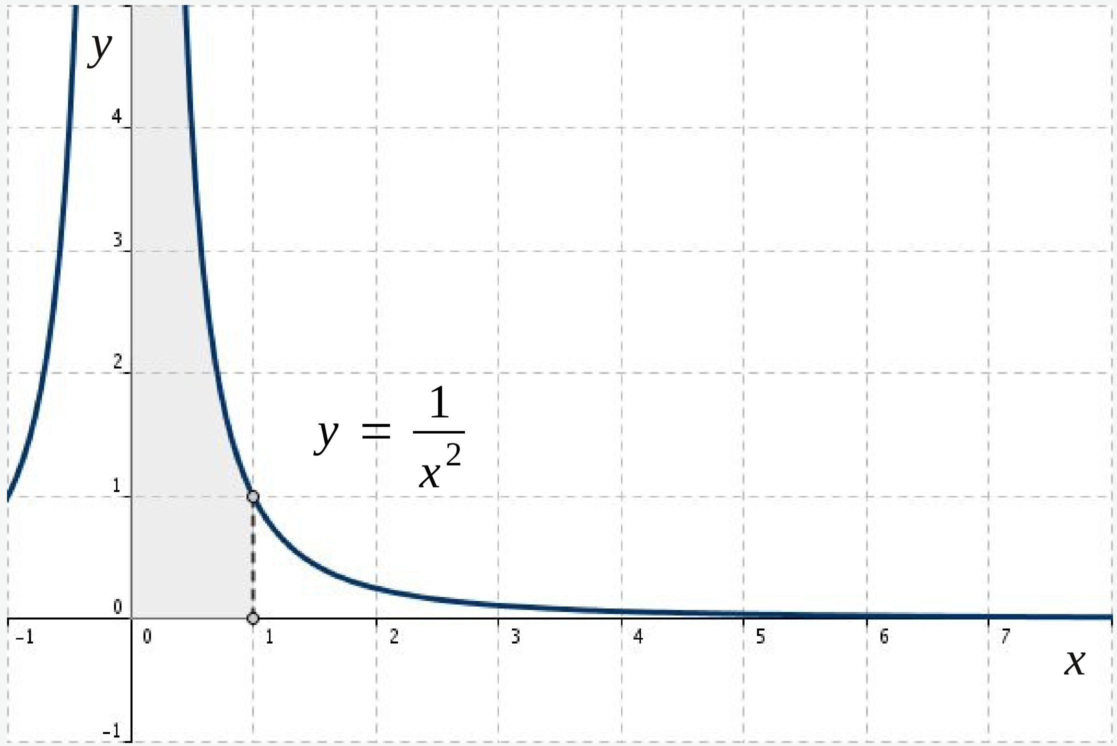


*Abb. 5-2: Zur Berechnung des Integrals der Funktion y = 1/x² im Intervall [0, 1]*

Die Funktion $f(x)$ ist nicht im ganzen Intervall $[0, 1]$ definiert und ist unbeschränkt in diesem Intervall.

Zur Berechnung der unter Funktionskurve liegenden Fläche:

- Wir berechnen ein Integral $\int_{\lambda}^{1} f(x)\,dx \quad (0 < \lambda < 1)$
- und bestimmen den Grenzwert $\lim\limits_{\lambda \to 0} \int_{\lambda}^{1} f(x)\,dx \quad (\lambda > 0)$

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{\lambda}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\lambda \to 0} \left[ -\frac{1}{x} \right]_{\lambda}^{1} = \lim_{\lambda \to 0} \left( -1 + \frac{1}{\lambda} \right)$$

$\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{1}{\lambda}$ existiert nicht $\Rightarrow$ der Grenzwert existiert nicht.

Für $\lambda \to 0$ übersteigt die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x) = 1/x^2$ von $\lambda$ bis 1 jede Schranke.

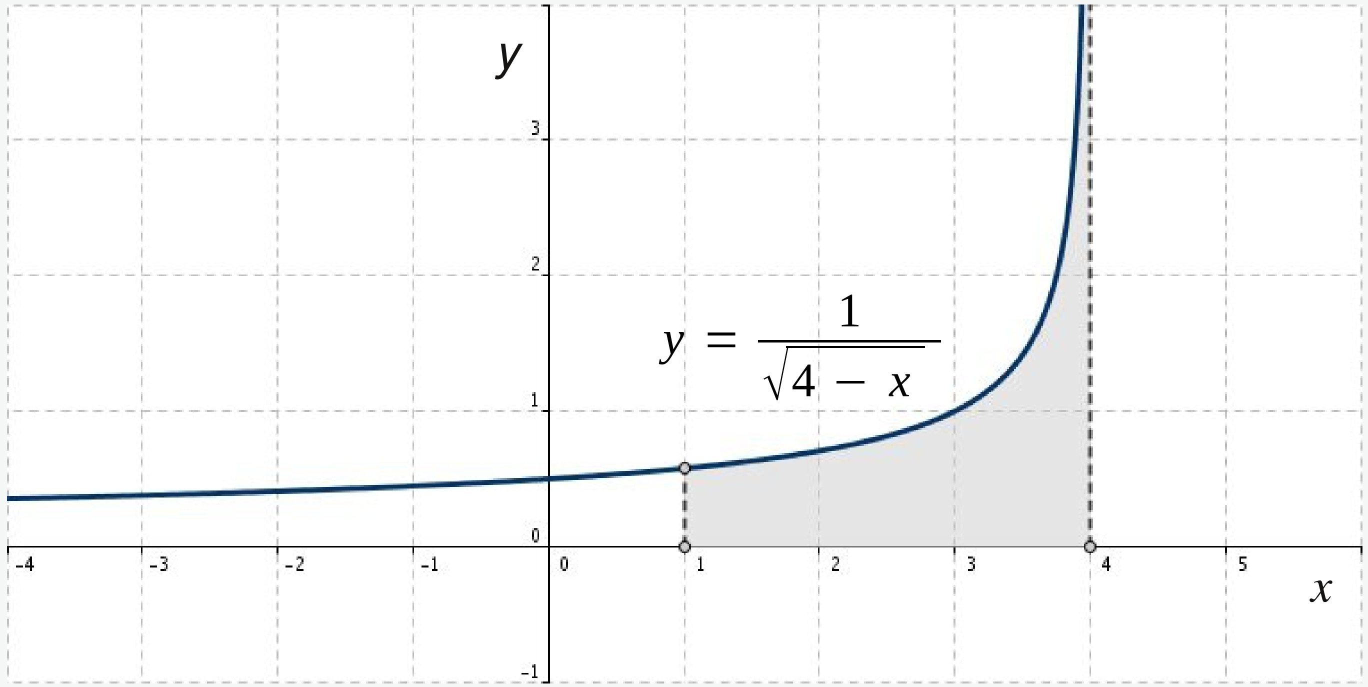


*Abb. 5-3: Zur Berechnung des Integrals der Funktion y*

$$I = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{4 - x}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_1^{4-\varepsilon} (4 - x)^{-1/2}\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[-2 \cdot (4 - x)^{1/2}\right]_1^{4-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left(-2\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$$